

УДК: 519.67 : 004.9

Квантильные меры формы для распределений с тяжелыми хвостами

В. Г. Полосин

Пензенский государственный университет,
Россия, 440026, г. Пенза, ул. Красная, д. 40

E-mail: polosin-vitalij@yandex.ru

*Получено 21.07.2023, после доработки — 01.07.2024.
Принято к публикации 29.08.2024.*

Современная литература содержит многочисленные примеры применения распределений с тяжелыми хвостами для прикладных исследований сложных систем. Моделирование экстремальных данных обычно ограничено небольшим набором форм распределений, которые исторически применяются в данной области прикладных исследований. Расширение набора форм возможно посредством сопоставления мер форм распределений. В работе на примере бета-распределения второго рода показано, что неопределенность моментов тяжелохвостых бета-распределений ограничивает применимость классических методов моментов для исследования их форм. На данном этапе сохраняется актуальность построения методов сопоставления распределений с помощью квантильных мер формы, которые освобождены от ограничений на параметры формы. Цель работы состоит в компьютерном исследовании возможности построения пространства квантильных мер форм для проведения сравнения распределений с тяжелыми хвостами. На основе компьютерного моделирования проводится картирование реализаций распределений в пространстве параметрических, квантильных и информационных мер формы. Картирование распределений в пространстве только параметрических мер формы показало, что наложение множества распределений с тяжелыми хвостами в пространстве квантильных мер асимметрии и эксцесса не позволяет сопоставить формы распределений, принадлежащие разным типам распределений. Хорошо известно, что информационные меры содержат дополнительную информацию о мере формы распределений. В работе предложен квантильный коэффициент энтропии в качестве дополнительной независимой меры формы, построенной на отношении интервалов энтропийной и квантильной неопределенностей. На примере логнормального распределения и распределения Парето иллюстрируются возможности сравнения форм распределений с реализациями бета-распределения второго рода. В частности показано, что, несмотря на близость положений форм в трехмерном пространстве, формы реализаций логнормального распределения отсутствуют среди реализаций бета-распределения второго рода. Картирование положения устойчивых распределений в трехмерном пространстве квантильных мер форм позволило оценить параметры формы бета-распределения второго рода, для которого форма наиболее близка к форме распределения Леви. Из материала статьи следует, что отображение распределений в трехмерном пространстве квантильных мер форм значительно расширяет возможность сравнения форм для распределений с тяжелыми хвостами.

Ключевые слова: квантильные меры, распределение с тяжелыми хвостами, квантильные асимметрия и контрэксцесс, квантильный коэффициент энтропии, устойчивые распределения

UDC: 519.67 : 004.9

Quantile shape measures for heavy-tailed distributions

V. G. Polosin

Penza State University,
40 Krasnaya st., Penza, 440026, Russia

E-mail: polosin-vitalij@yandex.ru

Received 21.07.2023, after completion — 01.07.2024.

Accepted for publication 29.08.2024.

Currently, journal papers contain numerous examples of the use of heavy-tailed distributions for applied research on various complex systems. Models of extreme data are usually limited to a small set of distribution shapes that in this field of applied research historically been used. It is possible to increase the composition of the set of probability distributions shapes through comparing the measures of the distribution shapes and choosing the most suitable implementations. The example of a beta distribution of the second kind shown that the lack of definability of the moments of heavy-tailed implementations of the beta family of distributions limits the applicability of the existing classical methods of moments for studying the distributions shapes when are characterized heavy tails. For this reason, the development of new methods for comparing distributions based on quantile shape measures free from the restrictions on the shape parameters remains relevant study the possibility of constructing a space of quantile measures of shapes for comparing distributions with heavy tails. The operation purpose consists in computer research of creation possibility of space of the quantile's measures for the comparing of distributions property with heavy tails. On the basis of computer simulation there the distributions implementations in measures space of shapes were been shown. Mapping distributions in space only of the parametrical measures of shapes has shown that the imposition of regions for heavy tails distribution made impossible compare the shape of distributions belonging to different type in the space of quantile measures of skewness and kurtosis. It is well known that shape information measures such as entropy and entropy uncertainty interval contain additional information about the shape measure of heavy-tailed distributions. In this paper, a quantile entropy coefficient is proposed as an additional independent measure of shape, which is based on the ratio of entropy and quantile uncertainty intervals. Also estimates of quantile entropy coefficients are obtained for a number of well-known heavy-tailed distributions. The possibility of comparing the distributions shapes with realizations of the beta distribution of the second kind is illustrated by the example of the lognormal distribution and the Pareto distribution. Due to mapping the position of stable distributions in the three-dimensional space of quantile measures of shapes estimate made it possible the shape parameters to of the beta distribution of the second kind, for which shape is closest to the Lévy shape. From the paper material it follows that the display of distributions in the three-dimensional space of quantile measures of the forms of skewness, kurtosis and entropy coefficient significantly expands the possibility of comparing the forms for distributions with heavy tails.

Keywords: quantile measures, heavy-tailed distribution, quantile skewness and counter-kurtosis, quantile entropy coefficient, stable distributions

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2024, vol. 16, no. 5, pp. 1041–1077 (Russian).

1. Введение

Распределения с тяжелыми хвостами играют важную роль для прогнозирования возникновения экстремальных событий при установлении контроля над стохастическими системами. Такие распределения используют при моделировании развития эпидемий [Mazucheli et al., 2022] и обмена данных в компьютерных и телекоммуникационных сетях [Rasheed, Yau, Low, 2020], для исследования различных вероятностных процессов в физике, энергетике, геологии, экономике и других научных приложениях [Katicas et al., 2021; Захаров, 2017; Chaskalovic, Assous, 2022; Shlesinger, Klafter, Zumofen, 1999; Foss, Korshunov, Zachary, 2011].

Распределения с тяжелыми хвостами составляют основу моделирования в приложениях анализа катастроф, стихийных бедствий и природных катаклизмов, таких как землетрясения, наводнения, ураганы, сходы лавин и другие. Теорию экстремальных значений используют при моделировании сейсмической активности, так как поведение хвостов распределений редких сильнейших землетрясений имеет принципиальное значение при построении долгосрочного сейсмического прогноза. Для построения оценок сейсмической опасности в работе [Pisarenko, Rodkin, 2010] дан анализ моделей на основе обобщенного распределения максимальных значений и обобщенного распределения Парето. При моделировании землетрясений также используются логнормальные распределения и распределения стабильных распределений Леви. Прогнозирование экстремальных наблюдений требуется в гидрологии для предсказания наводнений. Алгоритмы обработки данных гидрологических исследований также основаны на квантильной оценке неопределенности гидрологических прогнозов. Теория применения экстремальных значений для экстраполяции прогнозов путем поиска квантильных регрессий рассмотрена в [Turalis, Paracharalampous, 2023]. Ранее оценки квантилей высокого порядка для распределений с тяжелыми хвостами были рассмотрены Н. М. Марковичем [Маркович, 2002], где предполагается, что хвост распределения типа Парето. В работе [Вайчюлис, Маркович, 2021] даны новые оценки параметров суженного распределения Парето, которые иллюстрируют данные о заболеваемости COVID-19. В статье [Weng et al., 2023] экстремальные модели применены для исследования динамической надежности конструкций вследствие нестационарных случайных воздействий путем оценки вероятностей экстремального изменения ее параметров.

Для распределения с тяжелым хвостом используется несколько определений. Согласно наиболее общему определению распределение относят к распределению с тяжелым хвостом, если хвост распределения не ограничен экспоненциально убывающей функцией и характеризуется более тяжелым хвостом, чем хвост экспоненциального распределения [Asmussen, 2003; Foss, Korshunov, Zachary, 2011]. Для такого распределения вероятность наблюдения значений случайной величины с ростом ее значений убывает медленнее, чем вероятность наблюдения значений экспоненциального распределения. Иногда термин «тяжелый хвост» используется для распределений, если его хвост тяжелее, чем хвост нормального распределения. К распределениям с тяжелым хвостом относят все распределения с правильно меняющимся хвостом, которое задано как произведение степенного распределения на медленно меняющуюся функцию $L(x)$ значения x [Лебедев, 2018]

$$[1 - F(x)] = x^{-\alpha} L(x) \quad \text{при } x \rightarrow +\infty.$$

Распределение со степенным хвостом рассматривается как частный случай распределения с правильным хвостом. В случае распределения со степенным хвостом $L(x) \equiv \text{const}$.

В работах [Asmussen, 2003; Foss, Korshunov, Zachary, 2011] распределения с тяжелыми хвостами разделяют на три подкласса: распределения с толстым хвостом, распределения с длинным хвостом и субэкспоненциальные распределения. Распределение с толстым хвостом демонстрирует большую асимметрию или эксцесс по сравнению с нормальным распределением, при этом

в статьях по анализу финансов часто термины «толстый хвост» и «тяжелый хвост» используют как синонимы [Родионова, Копнова, 2023].

Распределения с длинным хвостом вводятся из условия: если случайная величина превышает некоторый уровень x , то вероятность события, при котором случайная величина превысит любой другой более высокий уровень, приближается к 1:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} P\left(X > x + \frac{t}{X} > x\right) = 1. \quad (1)$$

Субэкспоненциальные распределения введены в [Чистяков, 1964] для исследования систем с ветвящимися случайными процессами. Все субэкспоненциальные распределения являются длиннохвостыми. Для таких распределений большие значения суммы независимых случайных величин достигаются за счет одного большого слагаемого. Субэкспоненциальное распределение задано из условия пропорциональности вероятности события «сумма n случайных величин больше некоторого предельного значения x » и произведения числа n суммируемых случайных величин на значение функции хвоста распределения $[1 - F(x)]$, рассчитанной для предельного значения x [Лебедев, 2018]:

$$P\left(\sum_{i=1}^n X_i > x\right) = n \cdot [1 - F(x)] \quad \text{при } x \rightarrow \infty. \quad (2)$$

Вероятностная интерпретация субэкспоненциального распределения состоит в том, что вероятность справедливости неравенства «сумма n независимых случайных величин с общим распределением $F(x)$ больше предельного значения x » приблизительно равна вероятности выполнения неравенства «максимальная случайная величина из массива n случайных величин с общим распределением $F(x)$ больше предельного значения x » при условии, что предельное значение x стремится к бесконечности [Лебедев, 2018]:

$$P\left(\sum_{i=1}^n X_i > x\right) = P\left(\max\{X_i\}_n > x\right) \quad \text{при } x \rightarrow \infty. \quad (3)$$

В такой интерпретации субэкспоненциальное распределение используется для предсказания катастроф или редких событий, развивающихся по принципу одного большого скачка. Распределение Вейбула – Гнеденко и логарифмическое гамма-распределение относятся к подклассу субэкспоненциальных распределений.

Тяжесть хвоста распределения является важным инструментом классификации распределений. Карл Пирсон [Pearson, 1905] предложил для оценки тяжести хвоста распределения использовать стандартную меру куртозиса (от греч. *κυρτός* — хвост, изогнутость), определяемую как четвертый стандартизированный момент распределения. Там же была предложена классификация, согласно которой все распределения разделены на платокуртические, лептокуртические и мезокуртические распределения.

В отечественной литературе принято название эксцесса распределения, равного стандартной мере куртозиса, уменьшенной на 3 [Вадзинский, 2001]. Так как четвертый стандартизированный момент нормального распределения равен 3, то это удобно для классификации хвостов распределений, когда эксцесс нормального распределения равен нулю. В этом случае, если эксцесс распределения равен нулю, такие распределения относят к мезокуртическим распределениям, для которых тяжесть хвоста принимается равной тяжести нормального распределения. Распределения с отрицательным эксцессом относят к платокуртическим распределениям, для которых вероятность наблюдения экстремальных значений в хвосте распределения меньше по сравнению с хвостом нормального распределения. Классическим примером платокуртического

распределения является равномерное распределение, которое не производит выбросов и имеет минимальный отрицательный эксцесс, равный $-\frac{6}{5}$.

Распределения с положительным эксцессом относят к лептокуртическим распределениям, что характеризует большую вероятность наблюдения экстремальных значений в хвосте распределения по сравнению с нормальным распределением. Хвосты лептокуртических распределений асимптотически приближаются к нулю медленнее, чем хвосты распределения Гаусса. Классическим примером лептокуртического распределения является распределение Лапласа. Так как хвосты распределения Лапласа асимптотически приближаются к нулю медленнее, чем хвосты нормального распределения Гаусса, то лептокуртическое распределение Лапласа производит больше выбросов, чем нормальное распределение. Следует отметить, что все распределения с тяжелыми хвостами характеризуются положительным эксцессом и относятся к лептокуртическим распределениям, поскольку для всех распределений с тяжелыми хвостами вероятность наблюдения экстремальных значений больше по сравнению с нормальным распределением Гаусса.

Применимость параметрических мер асимметрии и эксцесса к распределениям с тяжелыми хвостами обсуждается достаточно давно. На основе исследования поведения традиционных показателей асимметрии и эксцесса к распределениям с тяжелыми хвостами в статье [Bonato, 2010] делается вывод о неустойчивости оценок асимметрии и эксцесса с помощью стандартизированных моментов распределений при наличии экстремальных значений. В частности, отмечается недостоверность стандартизированного третьего момента для оценки симметричного распределения с тяжелыми хвостами, поскольку стандартизированный третий момент воспринимает наличие экстремальных значений как асимметрию всего распределения, и такая оценка асимметрии для симметричного распределения отлична от нулевого значения.

Начиная с 60-х годов XX столетия исследования эмпирических данных заставили отказаться от предположения о нормальности распределения в пользу различных альтернатив с тяжелым хвостом. Для распределения с тяжелым хвостом вероятность того, что человек столкнется со значительными отклонениями от среднего значения, намного больше, чем в случае нормального распределения. Влияние тяжелых хвостов на управление рисками было теоретически исследовано на примере формирования финансового портфеля в работах [Bradley, Taqqu, 2003; Li et al., 2022].

Прогнозирование возникновения экстремальных событий имеет большое значение в управлении финансовыми рисками. Моделирование финансовых рисков также основано на использовании распределений с тяжелыми толстыми хвостами [Li et al., 2022; Морозова, Пырлик, 2009]. Для прогнозирования экстремальных событий большое распространение получило моделирование событий на основе распределения Леви [Zumofen, Klafter, Blumen, 1993; Geisel, 2006] и логнормального распределения [Колмаков, 2015; Щетинин, 2008; Бобков, Колмаков, 2017; Сикан, 2020; Костылева, Гулин, Дубиничев, 2009; ГОСТ Р ИСО 16269-4-2017].

В разделах эконометрики для моделирования волатильности находит применение обобщенное бета-распределение второго рода [Harvey, Palumbo, 2023; Moghaddam, Mills, Serota, 2019; McDonald, Ransom, 2008]. В [Harvey, Palumbo, 2023] сделан вывод о том, что модели на основе обобщенного бета-распределения второго рода дают исчерпывающее описание свойств реализованной волатильности, и благодаря наличию в семействе реализаций с толстым хвостом их трудно превзойти при исследовании экстремальных данных. Также отмечено, что при прогнозировании поведения волатильности распределение с толстым хвостом работает намного лучше, чем модели с тонким хвостом. В работе [Moghaddam, Mills, Serota, 2019] сделано утверждение о том, что обобщенное бета-распределение второго рода содержит некоторые уникальные свойства, которые обеспечивают успех его применения в качестве стационарного распределения для стохастического моделирования экономического обмена, распределения богатства и дохода населения различных регионов.

Повышенный интерес в современной литературе к использованию бета-распределения второго рода связан с тем, что бета-распределение второго рода содержит более разнообразный набор моделей по сравнению с популярными двухпараметрическими распределениями, такими как распределения Вейбулла, гамма-распределения и логнормальное распределение. По этой причине бета-распределение второго рода часто используется для аппроксимации данных с экстремальными значениями. В работе [Yang, Frees, Zhang, 2011] показано преимущество применения обобщенного бета-распределения второго рода в качестве основы при построении многомерной асимметричной модели. Семейство вероятностных законов, основанных на обобщенном бета-распределении второго рода, также применяется для оценки погрешности аппроксимации с помощью конечных элементов Лагранжа [Chaskalovic, Assous, 2011]. Обобщенные бета-распределения второго рода содержат желательные свойства для их применения в гидрологии и метеорологии [Mielke, Jonson, 1974].

Интерес к применению обобщенного бета-распределения второго рода связан с тем, что в своем составе это семейство включает как реализации моделей с тяжелыми хвостами, для которых моменты не определены, так и большое многообразие форм реализаций, для которых определены основные параметрические моменты. В настоящее время предварительный выбор формы модели остается неформализованным, что ограничивает применимость разнообразия форм бета-распределений. Несмотря на многообразие задач применения распределений с тяжелыми хвостами, сохраняется неопределенность относительно того, как соотносятся распределения с тяжелыми хвостами между собой, что ограничивает применимость моделей исторически сложившимся традиционным набором прикладных задач. По этой причине автор полагает, что исследование форм распределений с тяжелыми хвостами будет представлять интерес для широкого круга исследователей.

Несмотря на то что среди тяжелохвостых распределений выделяют три подкласса, в настоящее время сохраняется проблема сопоставления распределений с тяжелыми хвостами между собой и построения методов их классификации. Подобное состояние объясняется тем, что на данный момент отсутствуют меры и инвариантные величины, удобные для разделения и проведения классификации распределений. Так как в ряде случаев к распределениям с тяжелым хвостом относят распределения, для которых определены все степенные моменты, и распределения, для которых моменты не существуют, то существование моментов может быть положено для разделения моделей распределений с тяжелыми хвостами на подклассы.

Во многих приложениях распределение случайных величин задано только на половине числовой оси. Для описания экстремальных значений таких случайных величин представляет интерес только один правый или только левый хвост реализаций, заданный на бесконечной числовой полуоси. Один тяжелый хвост содержат распределения Парето, распределения Леви, подсемейства обобщенного бета-распределения второго рода, распределение Фреше (обратное распределение Вейбулла), логарифмически-логистическое распределение, логарифмическое распределение Коши и др. Использование этих распределений часто ограничено исторически сложившимся кругом прикладных задач. В работе проводится исследование возможности построения информационных и параметрических мер форм распределений с тяжелыми хвостами и возможности сравнения различных распределений с тяжелыми хвостами между собой.

2. Постановка задачи

Задача исследования распределений с тяжелыми хвостами состоит в компьютерном моделировании положений реализаций распределений в пространстве параметрических, квантильных и информационных мер формы с целью сопоставления свойств острровершинности, скошенности, веса хвоста их энтропийной неопределенности.

Целью работы является выявление общих свойств различных распределений случайных величин и общих форм моделей, которые позволят расширить области применения тяжелохвостых моделей при проведении компьютерных и практических исследований. Поставленная цель достигается путем графического отображения форм реализаций различных моделей распределений с тяжелыми хвостами в пространстве квантильных мер форм. Такой подход также полезен для построения области пространства с характерными признаками распределений с тяжелыми хвостами и для оценки возможности их предварительной идентификации.

В данной работе рассмотрены особенности свойств распределений с тяжелыми хвостами на примере сопоставления семейства обобщенного бета-распределения второго рода с известными часто используемыми тяжелохвостыми распределениями, такими как логарифмические распределения, устойчивые распределения Леви и Коши, распределение Парето.

2.1. Обобщенное бета-распределение второго рода

Состав обобщенного бета-распределения второго рода включает распределения с тяжелыми хвостами. Интегральная функция обобщенного бета-распределения второго рода задана с помощью отношения неполной бета-функции $I(u, v, y)$ в виде

$$F_{GB2}(y; \zeta, \vartheta, a, u, v) = I\left(u, v; \left(1 + \left(\frac{y - \zeta}{\vartheta}\right)^{-a}\right)^{-1}\right). \quad (4)$$

Здесь a, u, v — параметры формы, которые принято называть степенью a , *первым и вторым параметрами формы* u, v ; ϑ и ζ — параметры масштаба и смещения (положения) распределения соответственно; y — значения случайной величины Y .

Тогда функция плотности обобщенного бета-распределения второго рода имеет вид

$$f_{GB2}(y; \zeta, \vartheta, a, u, v) = \frac{1}{B(u, v)} \frac{a}{\vartheta} \left(\frac{y - \zeta}{\vartheta}\right)^{au-1} \left(1 + \left(\frac{y - \zeta}{\vartheta}\right)^a\right)^{-(u+v)}. \quad (5)$$

Обобщенное бета-распределение второго рода случайной величины Y получено на основе бета-распределения второго рода случайной величины X при условии, что случайные величины X и Y связаны степенным соотношением

$$x = \left(\frac{y - \zeta}{\vartheta}\right)^a. \quad (6)$$

В работе [Hertzler, 2003] показана взаимосвязь стохастических уравнений для релаксации человека с классическими уравнениями вероятности и рассмотрено стохастическое уравнение на основе распределения вероятности бета-семейства, которое включает функцию плотности стационарного обобщенного бета-распределения второго рода как частный случай. Следует отметить, что стохастические модели, основанные на бета-распределении второго рода, находят широкое распространение в современной экономике, к примеру [Ma, Holden, Serota, 2016; Moghaddam, Mills, Serota, 2019].

2.2. Пространство вероятностных признаков формы для обобщенного бета-распределения второго рода

Обобщенное бета-распределение включает в себя множество форм простых распределений, выбираемых с помощью параметров формы a, u, v . При аппроксимации данных выбор

формы распределения можно получить на основе метода моментов. Обычно для этих целей используют коэффициенты асимметрии и эксцесса распределения, которые в общем случае могут быть записаны как [Kenney, Keeping, 1962]

$$Ex = \frac{m_4 - 4m_1m_3 + 6m_2m_1^2 - 3m_1^4}{(m_2 - m_1^2)^2} - 3, \quad (7)$$

$$Sk = \frac{m_3 - 3m_1m_2 + 2m_1^3}{(m_2 - m_1^2)^{1.5}}.$$

Здесь m_s — начальный момент распределения s -го порядка. Формула для расчета начальных моментов обобщенного бета-распределения второго рода определена в виде

$$m_s = \frac{\vartheta^s B(u + sa^{-1}, v - sa^{-1})}{B(u, v)}, \quad v > sa^{-1}. \quad (8)$$

На практике особое значение имеет стандартизированное бета-распределение второго рода, для которого параметры масштаба ϑ и смещения ζ (положения) равны 1 и 0 соответственно. Дело в том, что соотношение (6) обеспечивает преобразование случайной величины Y , распределенной в соответствии с обобщенным бета-распределением второго типа, к случайной величине X , имеющей стандартизированную форму бета-распределения второго рода с параметрами формы u и v . По этой причине случайная величина Y наследует многие свойства случайной величины X . Кроме того, форма стандартизированного бета-распределения второго рода часто используется как упрощенная стандартная модель с известным набором форм для получения более сложной модели путем масштабирования данных.

Компьютерное моделирование положений реализаций бета-распределений второго рода в пространстве параметрических мер формы позволяет оценить особенность группирования моделей бета-распределений второго рода при различных параметрах формы и проиллюстрировать ограничения, накладываемые на параметрические оценки стандартизированных моментов распределения. Для расчета асимметрии бета-распределений второго рода использована формула вида

$$Sk = \frac{2(2u + v - 1)}{(v - 3)} \sqrt{\frac{v - 2}{u(u + v - 1)}}, \quad v > 3. \quad (9)$$

Для расчета эксцесса бета-распределений второго рода формула имеет вид

$$Ex = \frac{6[(v - 1)^2(v - 2) + u(5v - 11)(u + v - 1)]}{u(u + v - 1)(v - 3)(v - 4)}, \quad v > 4. \quad (10)$$

Формулы асимметрии (9) и эксцесса (10) имеют явный характер и более удобны при вычислении координат реализаций распределения с заданными параметрами формы u и v для отображения реализаций в пространстве параметрических мер формы. Формулы (9) и (10) получены вследствие упрощения формул (7) и (8) при подстановке параметра степени a , равного единице.

Следует отметить, что применение эксцесса распределения неудобно для иллюстрации положений моделей бета-распределения второго рода, так как теоретически эксцесс стремится к бесконечности при условии, что первый параметр формы стремится к нулю. Это обусловлено наличием медленно сходящегося к нулю хвоста распределения. Известно, что все реализации бета-распределения второго рода имеют хвост более тяжелый, чем нормальное распределение, следовательно, нижнее значение эксцесса не превышает значения эксцесса нормального распределения, равного 3. Верхнее значение эксцесса бета-распределения второго рода стремится

к бесконечности при значении второго параметра формы ν , равного 4. В этом случае невозможна иллюстрация положений реализаций бета-распределения второго рода на бесконечном пространстве выше некоторого порогового значения эксцесса. По этой причине в качестве меры тяжести хвоста распределения использован контрэксцесс распределения, равный отношению дисперсии к квадратному корню от величины центрального момента распределения. Контрэксцесс можно также определить как квадратный корень от величины, которая обратна эксцессу распределению и смещена на эксцесс равномерного распределения. Формула для вычисления контрэксцесса имеет вид

$$\kappa = \frac{1}{\sqrt{Ex + 3}}. \quad (11)$$

Смещение необходимо, чтобы исключить деление на ноль при исследовании реализаций нормального распределения. Нелинейное преобразование корня квадратного обеспечивает увеличение диапазона отображения распределений с тяжелыми хвостами при приближении значений второго параметра формы к нижней границе допустимых значений, которая равна 4. Применение контрэксцесса позволяет все модели бета-распределений второго рода разместить на ограниченном от 0 до 0,6 интервале значений. Так как модели бета-распределения включают симметричные и несимметричные формы, то для исследования скошенности модели использован третий стандартный момент в качестве параметра асимметрии.

На рис. 1 показаны положения возможных реализаций бета-распределения второго рода в пространстве параметрических мер формы контрэксцесса и асимметрии.

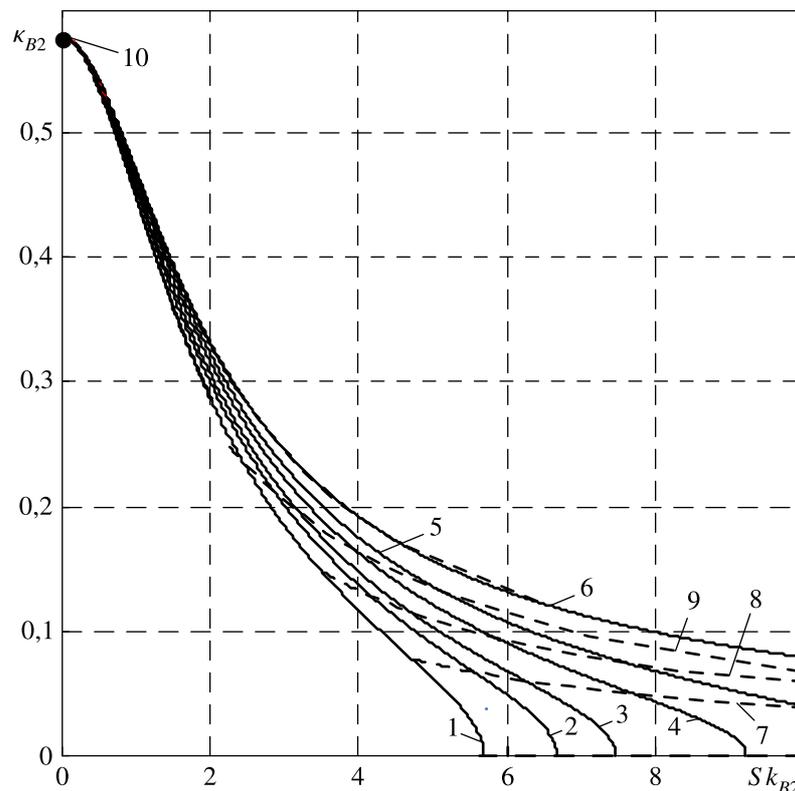


Рис. 1. Положение реализаций бета-распределения второго рода в пространстве параметрических оценок асимметрии и контрэксцесса

Для визуализации использованы два вида кривых. Сплошные кривые иллюстрируют положение траекторий моделей распределений, которые заданы пропорциональным изменением

параметров формы модели. Для траекторий отношение первого параметра формы ко второму параметру формы остается постоянным. Следовательно, отношение параметров форм остается одинаковым для любых точек траектории. Пунктирные кривые иллюстрируют положение моделей с эквивалентными значениями второго параметра формы. Во всех точках пунктирной кривой второй параметр формы сохраняет одинаковые значения.

На рис. 1 сплошные кривые с номерами 1, 2, 3, 4, 5 и 6 соответствуют траекториям вероятности, при которых отношение n второго параметра формы v к первому параметру формы u равно 0,2, 3, 5, 10, 20 и 400 соответственно. При уменьшении отношения параметров формы до 0,001 и увеличении до 2000 кривые траекторий находятся вблизи графических кривых с номерами 1 и 6. Поэтому эти кривые с номерами 1 и 6 можно принять в качестве кривых, ограничивающих возможные положения моделей бета-распределения второго рода в пространстве контрэксцесса и асимметрии. Пунктирные кривые с номерами 7, 8 и 9 иллюстрируют положение моделей с эквивалентными значениями второго параметра формы, соответственно равными 4,3, 5 и 7. При увеличении параметра v положение пунктирных кривых подобно положению траекторий и стремится к положению траектории 6.

Из рассмотрения рис. 1 можно видеть, что параметры формы возможных реализаций достаточно различимы в ограниченном диапазоне второго параметра от 4,1 до 7. При этом различимость первого параметра ограничена диапазоном от 3 до 10. В остальной части пространства параметрических признаков формы траектории расположены настолько близко, что становятся невозможными различимость реализаций и тем более однозначное определение их параметров формы. Это очевидно, что в пространстве контрэксцесса и асимметрии можно предварительно сделать выводы только о принадлежности моделей к семейству бета-распределения второго рода. Рассмотрение моделей в пространстве эксцесса и асимметрии приводит к такому же результату.

Однако из рассмотрения рис. 1 можно сделать вывод о том, что в пространстве асимметрии и эксцесса все модели бета-распределения второго рода лептокуртозисны и асимметричны. Важно отметить, что на исследование моделей в пространстве эксцесса и асимметрии накладываются ограничения на второй параметр формы, для которого допустимые значения всегда больше значения, равного 4. Это теоретическое ограничение накладывает четвертый порядок используемого момента для определения контрэксцесса. Очевидно, что в пространстве стандартизированных моментов асимметрии и эксцесса не отображаются модели с тяжелыми хвостами, которые интересны при исследовании данных, содержащих экстремальные значения.

3. Материалы и методы

В литературе по статистике можно найти много подходов, направленных на поиск надежных показателей местоположения и дисперсии. В качестве надежных показателей наиболее распространены медиана, которая является простой и высокоустойчивой к выбросам оценкой, заданной 50-м процентилем выборки, и показатель масштаба, который задан как межквартильный диапазон между 75-м и 25-м процентилями выборки. Надежные показатели местоположения и рассеивания хорошо известны в литературе. Например, возможно использование медианы и межквартильного диапазона для определения местоположения и разброса значений. Достоинство оценок состоит в том, что медиана и межквартильный диапазон основаны на квантилях распределения, что обеспечивает надежность оценки при наличии экстремальных значений [Kim, White, 2004; Bonato, 2010].

3.1. Квантильные оценки формы

В качестве альтернативной меры асимметрии часто используется мера, предложенная Боули (1920 г.), которая также основана на квантилях [Bowley, 1921; Kenney, Keeping, 1962]. Коэффициент асимметрии Боули относится к надежной оценке, которая равна нулю для любого

симметричного распределения. Знаменатель масштабирует коэффициент таким образом, чтобы значение коэффициента Боули находилось в пределах отрезка, ограниченного минимальным и максимальным значениями, равными -1 и 1 . Границы отрезка характеризуют собой крайнюю правую и крайнюю левую асимметрию соответственно. Формула для расчета оценки асимметрии Боули имеет вид

$$B_{Sk} = \frac{Q\left(\frac{3}{4}\right) - 2Q\left(\frac{1}{2}\right) + Q\left(\frac{1}{4}\right)}{Q\left(\frac{3}{4}\right) - Q\left(\frac{1}{4}\right)}. \quad (12)$$

Надежность оценки Боули обеспечивается использованием равновероятных разностных отрезков. Позже в 1975 году Хинкли [Hinkley, 1975] предложил обобщение коэффициента Боули, в котором мера Боули рассматривается как частный случай коэффициента Хинкли, равного 50. Использование коэффициента Хинкли считается недостатком оценки, так как остается неясен выбор этого коэффициента [Kim, White, 2004].

Для оценки тяжести хвостов также существуют различные стандартизированные оценки, которые существуют при любых положительных параметрах формы a , u , v . В работе [Moors, 1988] показано, что общепринятая мера эксцесса может быть интерпретирована как мера дисперсии в округе двух значений, характеризующих две части выборочных значений, полученные относительно центра. Основываясь на этой интерпретации, Дж. Мавр предложил надежную альтернативу для оценки эксцесса [Moors, 1988]:

$$M_{Ex} = \frac{Q\left(\frac{7}{8}\right) - Q\left(\frac{5}{8}\right) + Q\left(\frac{3}{8}\right) - Q\left(\frac{1}{8}\right)}{Q\left(\frac{6}{8}\right) - Q\left(\frac{2}{8}\right)}. \quad (13)$$

Квантильная мера эксцесса Мавра также относится к надежным оценкам на том основании, что межквартильные дистанции $\left(Q\left(\frac{7}{8}\right) - Q\left(\frac{5}{8}\right)\right)$ и $\left(Q\left(\frac{3}{8}\right) - Q\left(\frac{1}{8}\right)\right)$ соответствуют межквартильным диапазонам (разбросам) относительно центров $Q\left(\frac{6}{8}\right)$ и $Q\left(\frac{2}{8}\right)$ для частей выборочных данных, которые разделены медианой. Надежность интервальных оценок обеспечивает надежность меры эксцесса, заданной квантильной оценкой Мавра. Если вероятность для частей выборочных данных сосредоточена в окрестности квантилей $Q\left(\frac{6}{8}\right)$ и $Q\left(\frac{2}{8}\right)$, то обе межквартильные дистанции $\left(Q\left(\frac{7}{8}\right) - Q\left(\frac{5}{8}\right)\right)$ и $\left(Q\left(\frac{3}{8}\right) - Q\left(\frac{1}{8}\right)\right)$ относительно небольшие и соизмеримы с межквартильным диапазоном выборочных данных $\left(Q\left(\frac{6}{8}\right) - Q\left(\frac{2}{8}\right)\right)$, который определен относительно медианной оценки.

Поскольку теоретические оценки асимметрии Боули и эксцесса Мавра можно получить подстановкой квантильных функций распределений при соответствующих вероятностях в выражения (12) и (13), то для исследования способности этих оценок формы распределений с тяжелыми хвостами требуются квантильные функции этих распределений.

3.2. Квантильные функции и меры форм обобщенного бета-распределения

Современные практические исследования часто используют квантильные функции для построения различных характеристик распределения. Поскольку квантильные функции не содержат ограничения на параметры формы, то построенные на их основе характеристики распределения также освобождены от ограничений, которые наложены на параметрические моменты. Квантильная функция для обобщенного распределения второго рода получена на основе квантильной функции $Q^*(p; u, v)$ простого стандартизированного бета-распределения второго рода, которая зависит только от параметров формы u и v бета-функции $B(u, v)$. Взаимосвязь для функций квантилей при вероятности p имеет вид

$$Q(p) = \vartheta \left(Q_p^*(p, u, v) \right)^{1/a} + \zeta. \quad (14)$$

Здесь $Q_p^*(p, u, v)$ — квантильная функция бета-распределения второго рода, для которой порядок вероятности p определен из уравнения [Вадзинский, 2001]:

$$p = I\left(u, v; \frac{Q_p^*(p, u, v)}{1 + Q_p^*(p, u, v)}\right). \quad (15)$$

В дополнительном файле 1 даны квантильные функции для обобщенного бета-распределения второго рода и его подсемейств, полученные на основе интегральных функций.

Для некоторых подсемейств обобщенного бета-распределения второго рода существуют явные методы вычисления квантильных функций. Если принять первый параметр формы u равным единице, то получим квантильную функцию для распределения Берра типа XII, которая выражена непосредственно значением вероятности p и определена как [Burr, 1942]

$$Q(p; \vartheta, \zeta, a, v) = \vartheta \left[(1 - p)^{-1/v} - 1 \right]^{1/a} + \zeta. \quad (16)$$

Если принять равным единице второй параметр формы v , то получим квантильную функцию распределения Берра типа III, также заданную в явной форме:

$$Q(p; \vartheta, \zeta, a, u) = \vartheta \left(p^{-1/u} - 1 \right)^{-1/a} + \zeta. \quad (17)$$

Для определения квантильной функции обобщенного бета-распределения второго рода из выражения (14) при любых положительных параметрах формы a, u, v требуется определение квантильной функции $Q^*(p; u, v)$ стандартизированного бета-распределения второго рода. При этом для определения квантильной функции $Q^*(p; u, v)$ стандартизированного бета-распределения второго рода используется обратная интегральная функция бета-распределения, которая однозначно задана вероятностью p и вектором $[u, v]^{-1}$ параметров формы.

Значение случайной величины y , соответствующее заданной вероятности p , равно обратной функции бета-распределения второго рода, рассчитанной при заданной вероятности p и параметрах формы u и v . Формула для расчета случайной величины y имеет вид

$$y(p, u, v) = F_{B2}^{-1}(p | u, v). \quad (18)$$

Здесь p — вероятность, заданная интегральной функцией бета-распределения второго рода и равная отношению неполной бета-функции вида

$$p = I_{y/(1+y)}(u, v). \quad (19)$$

Обратная интегральная функция бета-распределения делает возможным получение квантилей при известном значении вероятности. Для определения положения квантиля использовано выражение вида

$$Q_p^*(p, u, v) = F_{B2}^{-1}(p | u, v). \quad (20)$$

Матричные лаборатории MatLab и MathCad в своем составе содержат обратную функцию бета-распределения $\text{betainv}(p, u, v)$, которая позволяет определить квантиль $Q_p^1(p, u, v)$ бета-распределения первого рода при известной вероятности p . Так как квантильные функции $Q_p^1(p, u, v)$ и $Q_p^*(p, u, v)$ бета-распределения первого и второго рода связаны соотношением

$$Q_p^*(p, u, v) = \frac{Q_p^1(p, u, v)}{1 - Q_p^1(p, u, v)}, \quad (21)$$

то для определения квантилей $Q_p^*(p, u, v)$ бета-распределения второго рода при проведении моделирования положений реализаций в пространстве мер формы была использована обратная

функция бета-распределения 1-го рода, которая содержится в составе матричных лабораторий MatLab и MathCad. Программная реализация определения квантильной функции бета-распределения второго рода выполнена в форме подпрограммы функции Beta_II_inf(p, u, v), которая реализует вычисление квантиля бета-распределения первого рода при заданных вероятности p и параметрах формы u и v , после чего вычисляется квантиль бета-распределения второго рода. Листинг подпрограммы функции в среде MatLab имеет вид

```
function[y] = Beta_II_inf(p, u, v)
x = betainv(p, u, v);  y = x./(1 - x);  end.
```

Подстановка выражения (14) квантильных функций обобщенного и стандартизированного распределений в выражения (12) и (13) позволяет записать оценки асимметрии Боули и эксцесса Мавра для обобщенного бета-распределения второго рода в виде

$$B_{Sk} = \frac{\left(Q_p^*\left(\frac{3}{4}\right)\right)^{-1/a} - 2\left(Q_p^*\left(\frac{1}{2}\right)\right)^{-1/a} + \left(Q_p^*\left(\frac{1}{4}\right)\right)^{-1/a}}{\left(Q_p^*\left(\frac{3}{4}\right)\right)^{-1/a} - \left(Q_p^*\left(\frac{1}{4}\right)\right)^{-1/a}},$$

$$M_{Ex} = \frac{\left(Q_p^*\left(\frac{7}{8}\right)\right)^{-1/a} - \left(Q_p^*\left(\frac{4}{8}\right)\right)^{-1/a} + \left(Q_p^*\left(\frac{3}{8}\right)\right)^{-1/a} - \left(Q_p^*\left(\frac{1}{8}\right)\right)^{-1/a}}{\left(Q_p^*\left(\frac{3}{4}\right)\right)^{-1/a} - \left(Q_p^*\left(\frac{1}{4}\right)\right)^{-1/a}}.$$
(22)

Как видим из записанных выражений (22), квантильные оценки формы обобщенного бета-распределения не зависят от параметров положения и масштаба распределения. Кроме того, полученные меры формы асимметрии Боули и эксцесса Мавра для обобщенного бета-распределения второго рода позволяют использовать квантили стандартизированного распределения и полностью определены заданием трех параметров формы: параметров формы (u , v) бета-функции и показателя степени a .

3.3. Квантильные меры форм логарифмического нормального распределения

Поскольку во многих исследованиях для случайных величин, заданных на половине числовой оси, часто используется логарифмическое нормальное распределение, то представляет интерес сопоставление набора форм логнормального распределения с формами других распределений, которые также заданы на половине числовой оси. В связи с тем, что логарифмическое распределение также имеет тяжелый хвост, то для исследователя представляет интерес соотношение меры формы логарифмического нормального и меры формы бета-распределений второго рода.

Интегральная функция логарифмического нормального распределения имеет вид

$$F_{LnN}(x, \mu, \sigma) = \frac{1}{2} \left(1 + \operatorname{erf} \left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma \sqrt{2}} \right) \right). \quad (23)$$

Здесь σ , μ — параметры логарифмического нормального распределения.

Квантильная функция для логарифмического нормального распределения задана в виде

$$Q_{LnN}(p, \mu, \sigma) = \exp(\mu) \cdot \exp\left(\sigma \sqrt{2} \cdot \left(\operatorname{erf}^{-1}(2p - 1)\right)\right). \quad (24)$$

Выполнив подстановку квантильной функции (24) в выражения (12) и (13), получим меры форм логарифмического нормального распределения в виде оценок асимметрии Боули и эксцесса

Мавра:

$$B_{SkLn} = \frac{\exp(0,6745 \cdot \sigma) + \exp(-0,6745 \cdot \sigma) - 2}{\exp(0,6745 \cdot \sigma) - \exp(-0,6745 \cdot \sigma)},$$

$$M_{ExLn} = \frac{\exp(1,1503 \cdot \sigma) - \exp(0,3186 \cdot \sigma) + \exp(-0,3186 \cdot \sigma) - \exp(-1,1503 \cdot \sigma)}{\exp(0,6745 \cdot \sigma) - \exp(-0,6745 \cdot \sigma)}. \quad (25)$$

Из записанных выражений следует, что оценки асимметрии Боули и эксцесса Мавра для логарифмического нормального распределения зависят от параметра σ . Следовательно, логарифмическое нормальное распределение содержит множество различных форм, определяемых параметром σ . Оценки квантильных мер асимметрии, эксцесса и контрэксцесса даны в таблице 1 для наиболее характерных форм распределений, заданных параметрах σ .

Таблица 1. Функции квантилей и квантильные меры формы распределений

Устойчивые распределения						
Тип распределения	Параметр формы	$Q_i(p_i)$	B_{Sk}	M_{Ex}	AM_{Ex}	DQ_σ
Гаусса	$\alpha = 2$	$\mu + \vartheta \sqrt{2} \cdot (\text{erf}^{-1}(2p - 1))$	0	1,223	0,811	1,349
Коши	$\alpha = 1$	$\mu + \vartheta \cdot \text{tg}(\pi(p - 0,5))$	0	2	0,5	2
Леви	$\alpha = 0,5$	$\mu + \vartheta \cdot 0,5 (\text{erf}^{-1}(1 - p))^{-2}$	0,683	4,076	0,245	9,095
Распределения с тяжелыми хвостами, применяемые на практике						
Парето	$k = 0,2$	$x_m(1 - p)^{-1/k}$	0,946	32,008	0,031	1020
	$k = 0,5$		0,688	4,088	0,245	14,22
	$k = 1$		0,5	2,171	0,461	2,667
	$k = 2$		0,386	1,646	0,608	0,845
	$k = 3$		0,346	1,515	0,66	0,487
	$k = 5$		0,312	1,423	0,703	0,26
	$k = 10$		0,287	1,362	0,734	0,26
	$k = 50$		0,267	1,317	0,759	0,762
Логарифмическое нормальное	$\sigma = 0,1$	$\exp(\sigma \sqrt{2} \cdot (\text{erf}^{-1}(2p - 1)))$	0,034	1,236	0,809	0,135
	$\sigma = 0,5$		0,167	1,302	0,768	0,687
	$\sigma = 1$		0,3250	1,5098	0,662	1,454
	$\sigma = 1,5$		0,467	1,862	0,537	2,387
	$\sigma = 2$		0,588	2,37	0,422	3,594
	$\sigma = 3$		0,766	3,941	0,254	7,431
	$\sigma = 4$		0,874	6,516	0,153	14,782
	$\sigma = 5$		0,934	10,649	0,094	29,108
	$\sigma = 10$		0,998	116,55	0,00858	849,7
	$\sigma = 20$		1	1360	0,00007	721 300
Часто используемые распределения						
Отраженное нормальное		$\vartheta \sqrt{2} \cdot (\text{erf}^{-1}(p))$	0,144	1,177	0,85	0,832
Экспоненциальное		$-\vartheta \cdot \ln(1 - p)$	0,262	1,306	0,766	1,099

3.4. Квантильные функции и меры форм устойчивых распределений

Если для исследователя интересно предположение о существовании определенного числа одинаково распределенных составляющих, то следует обратить внимание на устойчивые распределения, которые были введены в работе П. Леви (1925 г.) как предельные распределения для суммы одинаково распределенных случайных величин. Классическим примером устойчивых

распределений являются устойчивые распределения (распределения Леви) с характеристической функцией

$$\varphi(t; c, \alpha) = \exp(-c \cdot |t|^\alpha), \quad 0 \leq \alpha \leq 2. \quad (26)$$

Так как для всего многообразия форм данного семейства отсутствуют аналитические функции плотности, то данное семейство используется без априорного выбора наиболее подходящего аналитического представления функции плотности. Исключение составляют нормальное распределение, распределение Коши и распределение Леви.

В монографии [Золотарев, 1983] показано, что все устойчивые распределения могут быть определены через характеристическую функцию, которая, как известно, является полным аналогом распределения. Наиболее известным представителем семейства устойчивых распределений является нормальное распределение, которому соответствует характеристическая функция (26) при условии, что параметр α равен 2. Важная особенность устойчивых распределений состоит в том, что семейство содержит распределения с бесконечной дисперсией. При α , равном единице ($\alpha = 1$), характеристическая функция (26) определяет хорошо известное распределение Коши, которое часто используется при построении алгоритмов оценивания свойств распределения с тяжелыми хвостами.

Интегральная функция распределения масштабированного смещенного распределения Коши имеет вид

$$F_{\text{Cauchy}}(y; \xi, \vartheta) = \frac{1}{\pi} \arctg\left(\frac{y - \xi}{\vartheta}\right) + \frac{1}{2}. \quad (27)$$

Также известен явный вид несимметричного распределения Леви, которое задано выражением (26) при условии, что параметр α равен 0,5. Случайная величина распределения Леви задана на полуоси значений от ζ до ∞ . Для масштабированного смещенного распределения Леви интегральная функция имеет вид

$$F_{\text{Levy}}(y; \zeta, \vartheta) = 2 \left(1 - \operatorname{erf} \left(\sqrt{\frac{\vartheta}{y - \zeta}} \right) \right), \quad y \geq \zeta. \quad (28)$$

Так как распределение Леви не имеет моментов распределения, то распределение относится к распределениям с тяжелым хвостом, которые часто используются для случайных величин, заданных на положительной числовой оси. Пример применения устойчивых распределений для решения задачи оценивания параметров регрессионных уравнений в случае распределения случайных ошибок с большой дисперсией можно найти в [Денисов, Тимофеев, 2011]. Применение устойчивых распределений Коши и Леви в моделях стохастической динамики финансового рынка и индивидуальных моделей доходов-расходов подробно освещено в работах [Романовский, Романовский, 2007; Дубовиков, Старченко, 2011].

Квантильные функции для устойчивых распределений приведены в таблице 1. Подстановка квантильных функций устойчивых распределений в формулы (12) и (13) позволяет получить оценки асимметрии Боули и оценки эксцесса Мавра для устойчивых распределений, которые также даны в таблице 1. Для сравнения разбросов распределений даны межквартильные дистанции стандартизированных устойчивых распределений.

3.5. Квантильные функции и меры формы распределения Парето

На практике для аппроксимации тяжелых хвостов распределений обычно используется двухпараметрическое распределение Парето. Интегральная функция распределения Парето для случайной величины Y имеет вид

$$F_{\text{Pareto}}(y; y_m, k) = 1 - \left(\frac{y_m}{y}\right)^k, \quad y \geq y_m. \quad (29)$$

Здесь y_m — параметр масштаба распределения, k — степенной параметр формы распределения.

Квантильная функция распределения Парето имеет вид

$$Q(p, y_m, k) = y_m(1 - p)^{-1/k}. \quad (30)$$

Выполнив подстановку квантильной функции (30) в выражения в (12) и (13), получим меры форм распределения Парето в виде оценок асимметрии Боули и эксцесса Мавра:

$$B_{Sk} = \frac{0,25^k - 2 \cdot 0,5^k + 0,75^k}{0,25^k - 0,75^k}, \quad (31)$$

$$M_{Ex} = \frac{0,125^k - 0,375^k + 0,625^k - 0,875^k}{0,25^k - 0,75^k}.$$

Это следует из (31), оценки асимметрии Боули и эксцесса Мавра для распределения Парето заданы только степенным параметром k , который определяет множество форм семейства. Для наиболее используемых форм распределения Парето, оценки квантильной асимметрии Боули, квантильного эксцесса Мавра и квантильного контрэксцесса даны в таблице 1.

Следует отметить, что для распределения Парето дисперсия определена только при степенном параметре формы k , большем 2. Для параметра k , меньшего или равного единице ($k \leq 1$), становятся неопределенными все моменты распределения Парето. Так как для распределений Парето при параметрах $k \leq 3$ и $k \leq 4$ сохраняется неопределенность стандартизированных моментов третьего и четвертого порядка, исследование формы таких тяжелохвостых распределений в пространстве классических параметрических оценок асимметрии и эксцесса невозможно.

3.6. Квантильные функции часто используемых распределений

Распределения с тяжелыми хвостами — это распределения, для которых хвост распределения тяжелее, чем хвост экспоненциального распределения. Так как тяжесть хвоста исследуемого распределения определена относительно веса хвоста экспоненциального распределения, на практике интересно положение квантильных мер формы экспоненциального распределения. Интегральная функция экспоненциального распределения задана на положительной полуоси числовых значений случайной величины X и имеет вид

$$F(x; \vartheta) = 1 - \exp(-\vartheta^{-1} \cdot x), \quad x \geq 0. \quad (32)$$

Здесь ϑ — параметр масштаба распределения, часто определяемый через параметр скорости изменения распределения $\lambda = \vartheta^{-1}$. Форма этого распределения остается неизменной.

Квантильная функция распределения с тяжелыми хвостами определена с помощью выражения

$$Q_{\text{exp}}(p; \vartheta) = -\vartheta \cdot \ln(1 - p). \quad (33)$$

В случае когда случайная величина задана на положительной полуоси, представляет интерес полунормальное распределение, которое обычно используется в качестве априорного распределения вероятностей параметров дисперсии в алгоритмических задачах Байеса [Gelman, 2006]. Полунормальное распределение определено как распределение модуля несмещенного нормального распределения, интегральная функция которого имеет вид

$$F(x; \vartheta) = \text{erf}\left(\frac{x}{\vartheta \sqrt{2}}\right), \quad x \geq 0. \quad (34)$$

Квантильная функция полунормального распределения, полученного для модуля несмещенного нормального распределения, имеет вид

$$Q_{\text{HalfNorm}}(p; \vartheta) = \vartheta \sqrt{2} \cdot \text{erf}^{-1}(p). \quad (35)$$

После подстановки квантильных функций (33) и (35) в формулы (12) и (13) для квантильных оценок асимметрии Боули и эксцесса Мавра были получены числовые значения квантильных мер асимметрии и эксцесса для модуля нормально распределенной случайной величины, которые также даны в таблице 1.

3.7. Энтропия и интервалы энтропийной неопределенности для распределений с тяжелыми хвостами

Для исследования информационных процессов в сложных системах часто используют энтропию Шеннона, которая определена как математическое ожидание логарифма плотности распределения:

$$H(Y; u, v) = -E(\ln f(Y, u, v)). \quad (36)$$

Энтропия — это количественная оценка хаотических свойств сложных систем и ее процессов. В статье [Tahmasebi, Bahboodan, 2010] дан подробный вывод точных аналитических выражений энтропии Шеннона для семейства распределений Феллера – Парето и ряда ее подсемейств. Это было использовано для формирования информационной энтропии масштабированного обобщенного бета-распределения, что есть в [Polosin, 2022]. Для расчета энтропии Шеннона обобщенного бета-распределения второго рода получено выражение вида

$$H_{GB2}(\vartheta, a, u, v) = \ln(\vartheta a^{-1} B(u, v)) + (a^{-1} - u)[\psi(u) - \psi(v)] + (v + u)[\psi(u + v) - \psi(v)]. \quad (37)$$

Здесь $\psi(\cdot)$ — пси-функция.

Чтобы исследовать информационные свойства распределений, в работе [Полосин, 2020] была предложена информационная мера энтропийного интервала неопределенности при несимметричном распределении случайной величины, которая определена потенцированием энтропии:

$$\Delta_{Hs} = \exp(H(Y)). \quad (38)$$

Качественное отличие энтропийного интервала неопределенности — в том, что его мера задана в единицах случайной величины, протяженность которой характеризует информационные свойства распределения. Хаотические свойства распределения величины удобно отображать с помощью интервала энтропийной неопределенности, который задан как интервал равномерного распределения [Полосин, 2020]. Если распределению случайной величины Y соответствует масштабированное распределение (4), заданное на положительной оси реальных значений случайной величины Y , то выражение для определения энтропийного интервала неопределенности обобщенного бета-распределения второго рода примет вид

$$\Delta_{HGB2}(\vartheta, a, u, v) = \vartheta a^{-1} B(u, v) \exp\left[\left(a^{-1} - u\right)(\psi(u) - \psi(v)) + (v + u)(\psi(u + v) - \psi(v))\right]. \quad (39)$$

Энтропия и интервал энтропийной неопределенности для логарифмического нормального распределения и для часто используемых стабильных распределений даны в таблице 2. Выражения для энтропий многих распределений можно найти в работах [Lazo, Rathie, 1978].

Для распределений с тяжелыми хвостами интервал энтропийной неопределенности характеризуется следующими свойствами. Во-первых, интервал энтропийной неопределенности задан на информационном пространстве, следовательно, его дистанция является независимой мерой хаотических свойств полученных данных.

Другое важное свойство состоит в том, что его величина пропорциональна масштабу распределения и задана (нормирована) в единицах контролируемой величины. Если выражение (36) разделить на масштаб распределения, то получим стандартизированный интервал энтропийной

неопределенности, который зависит только от параметров формы обобщенного бета-распределения. По этой причине стандартизированный интервал энтропийной неопределенности обобщенного бета-распределения второго рода является удобным независимым инструментом анализа формы распределения, так как полностью определен через параметры формы распределения: a — степенной параметр, u, v — параметры бета-функции.

Третье свойство энтропийного интервала неопределенности состоит в том, что его мера задана на всем полубесконечном диапазоне значений параметров формы a, u, v , для которого существует плотность (5) обобщенного бета-распределения второго рода. Это свойство делает возможным использование энтропийного интервала для анализа распределений с длинными тяжелыми хвостами при условии, что оценки моментов распределений $m_s(a, u, v)$ не существуют. Возможность анализа форм обобщенного семейства бета-распределений второго рода с помощью стандартизированных моментов распределения ограничена условием существования бета-функции, накладываемым на параметры формы. Согласно накладываемому условию *произведение параметра степени a и второго параметра v бета-функции должно быть больше, чем порядок момента s : $a \cdot v > s$* . Для асимметрии и эксцесса распределения это произведение ограничено, соответственно, третьим и четвертым порядками начальных и стандартизированных моментов. Для интервалов параметрической неопределенности, таких как средний квадратический разброс, дисперсия и/или среднее квадратическое значение, произведение $(a \cdot v)$ ограничено вторым порядком момента. При оценке среднего значения произведение $a \cdot v$ не может быть меньше единицы, заданной первым порядком соответствующего момента. Использование энтропийного интервала в качестве оценки формы снимает рассмотренные ограничения и открывает новые возможности в области проведения анализа.

4. Результаты и их обсуждение

4.1. Коэффициенты информационно-параметрических неопределенностей для распределений с тяжелыми хвостами

В ранних работах автора [Полосин, 2020; Polosin, 2021] были введены коэффициенты энтропии для смещенных и несмещенных несимметричных распределений, которые определены как отношение интервала энтропийной неопределенности на интервалы параметрических неопределенностей, заданные с помощью второго начального или центрального моментов соответственно.

Использование межквартильного диапазона в качестве надежной оценки разброса случайной величины обеспечивает возможность построения информационных коэффициентов формы, которые имеют конечное значение во всем диапазоне параметров формы распределений с тяжелыми хвостами. В качестве такой оценки автор статьи использует квантильный коэффициент энтропии, равный отношению интервала энтропийной неопределенности к интервалу квантильной неопределенности. Если интервал квантильной неопределенности задан межквартильным диапазоном, то формула для расчета коэффициента энтропии примет вид

$$K_{HsQ} = \frac{\Delta_{Hs}}{Q\left(\frac{3}{4}\right) - Q\left(\frac{1}{4}\right)}. \quad (40)$$

Так как квантильные коэффициенты энтропии построены на отношении информационного и квантильного интервалов неопределенности распределения, то это независимые оценки свойств распределений. Для многих распределений коэффициент энтропии имеет характерное числовое значение, которое не зависит от параметров распределения. В таблице 2 даны характерные числовые значения межквартильных коэффициентов энтропии для устойчивых распределений Гаусса, Коши и Леви.

Таблица 2. Энтропия, интервал энтропийной неопределенности и коэффициент энтропии

Распределение	Параметр формы	$H(Y)$	Δ_H	K_{H_Q}
Устойчивые распределения				
Гаусса	$\alpha = 2$	$\ln(\vartheta \sqrt{2\pi e})$	$\vartheta \sqrt{2\pi e}$	3,064
Коши	$\alpha = 1$	$\ln(4\pi\vartheta)$	$4\pi\vartheta$	6,283
Леви	$\alpha = 0,5$	$0,5 + 1,5\gamma + \ln(4\vartheta \sqrt{\pi})$	$4\vartheta \sqrt{\pi} \cdot e^{0,5+1,5\gamma}$	3,055
Распределения с тяжелыми хвостами, применяемые на практике				
Парето	0,2	$\ln\left(\frac{y_m}{k}\right) + \frac{k+1}{k}$	$\frac{y_m}{k} \exp\left(\frac{k+1}{k}\right)$	1,978
	0,5			2,825
	$k = 1$			2,771
	$k = 2$			2,651
	$k = 3$			2,598
	$k = 5$			2,551
	$k = 10$			2,514
	$k = 50$			2,482
	$k = 100$			2,478
Логарифмическое нормальное	$\sigma = 0,1$	$0,5 + \mu + \ln(\sigma \sqrt{2\pi})$	$\sigma \sqrt{2\pi} \cdot \exp(0,5 + \mu)$	3,061
	$\sigma = 0,5$			3,006
	$\sigma = 1$			2,843
	$\sigma = 1,5$			2,597
	$\sigma = 2$			2,3
	$\sigma = 3$			1,668
	$\sigma = 4$			1,119
	$\sigma = 5$			0,71
	$\sigma = 10$			0,049
	$\sigma = 20$			0,0001146
Часто используемые распределения				
Полунормальное		$\ln(\vartheta \sqrt{2\pi e}) - 1$	$\vartheta e^{-1} \sqrt{2\pi e}$	1,828
Экспоненциальное		$1 + \ln(\vartheta)$	ϑe	2,474

Для сравнения хвостов распределений представляют интерес также экспоненциальное и полунормальное распределения, числовые значения которых также приведены в таблице 2.

Несмотря на то что многие распределения с тяжелыми хвостами характеризуются несколькими параметрами формы, межквартильный коэффициент энтропии сохраняет изменчивость от всех параметров, влияющих на форму распределений. Характерным примером служит бета-распределение второго рода. Для расчета межквартильного коэффициента энтропии бета-распределения второго рода была получена формула в виде

$$K_{HsQ} = \frac{a^{-1}B(u, v) \exp\left[\left(a^{-1} - u\right)(\psi(u) - \psi(v)) + (v + u)(\psi(u + v) - \psi(v))\right]}{\left(Q_p^*\left(\frac{3}{4}\right)\right)^{1/a} - \left(Q_p^*\left(\frac{1}{4}\right)\right)^{1/a}}. \tag{41}$$

Как видно из формулы (41), межквартильный коэффициент энтропии бета-распределения второго рода не зависит от параметров масштаба и смещения распределения, что делает возможным анализ бета-распределения во всем диапазоне всех трех параметров формы, в том числе для реализаций с толстыми тяжелыми хвостами при условии отсутствия параметрических моментов распределений.

Существуют распределения с тяжелым хвостом, формы которых определены только одним параметром. К примеру, достаточно часто для построения регрессий таких случайных величин

используется распределение Парето. Для расчета квантильного коэффициента энтропии распределения Парето была получена формула в виде

$$K_{H \text{ Pareto}} = \frac{1}{k} \frac{0,1875^{1/k}}{(0,75^{1/k} - 0,25^{1/k})} \exp\left(\frac{k+1}{k}\right). \quad (42)$$

Из формулы (42) следует, что межквартильный коэффициент энтропии распределения Парето определен степенным параметром формы k . В таблице 2 даны значения межквартильного коэффициента энтропии, которые рассчитаны для ряда наиболее характерных значений параметра формы распределения Парето.

Квантильный коэффициент энтропии для логарифмического нормального распределения также зависит только от одного параметра σ , определяющего многообразие форм семейства. Формула для расчета квантильного коэффициента энтропии логарифмического нормального распределения получена в виде

$$K_{HQLN} = \frac{\sigma \sqrt{2\pi} \cdot \exp(0,5)}{\exp(\sigma \sqrt{2} \cdot (\operatorname{erf}^{-1}(0,5))) - \exp(\sigma \sqrt{2} \cdot (\operatorname{erf}^{-1}(-0,5)))}. \quad (43)$$

Оценки межквартильного коэффициента энтропии для характерных значений параметра σ логарифмического нормального распределения также даны в таблице 2.

Отображение распределений с длинными хвостами в пространстве квантильных оценок коэффициента энтропии, асимметрии и эксцесса позволяет изображать реализации распределений с помощью изображающей точки в трехмерном пространстве, что обеспечивает их различимость, так как реализации с различными формами разнесены относительно друг друга. Это удобно для установления соотношения между реализациями распределений и выявления наиболее близких аппроксимаций. Кроме того, при большом объеме данных карты распределений с тяжелыми хвостами могут быть использованы для предварительной оценки свойств распределения и выявления наиболее благоприятных регрессий.

4.2. Компьютерное исследование пространства квантильных мер форм для распределений с тяжелыми хвостами

Компьютерное исследование положений возможных распределений с тяжелыми хвостами состоит в картировании реализаций распределений с тяжелыми хвостами в пространстве квантильных мер форм для обеспечения возможности сопоставления форм распределений, включенных в разные семейства. Картирование в пространстве мер форм позволило выявить одинаковые формы распределений, принадлежащие разным семействам, и сопоставить формы распределений, принадлежащие одному семейству. По этой причине область возможных реализаций распределений с тяжелыми хвостами была исследована с помощью компьютерных технологий.

Последовательность проводимых компьютерных вычислительных процессов и реализации процедур построения графиков возможных положений реализаций в пространстве квантильных мер формы распределения иллюстрирует алгоритм 1, приведенный в таблице 3.

Картирование положений объектов достигается проецированием трехмерного пространства форм на двумерные эпюры проекций изображений пространства. Для удобства выбора исследуемой проекции используется графический редактор выбора исследуемого пространства. Ввод целочисленной переменной MM соответствует выбору пространства квантильных оценок асимметрии и эксцесса при значении переменной MM , равном 1, пространства квантильных оценок асимметрии и коэффициента энтропии при значении переменной MM , равном 2, или пространства квантильных оценок контрэкссесса и коэффициента энтропии при значении переменной MM , равном 3.

Таблица 3

Алгоритм 1. Последовательность вычислительных процессов
<pre> MM = menu('Выбор пространства', 'AM-B', 'AM-KHsO', 'B-KHsO'); B_AM_KHsQ_Beta2(MM); B_AM_KHsQ_Beta2_equal_u(MM); B_AM_KHsQ_LogNorm(MM); B_AM_KHsQ_Pareto(MM); B_AM_KHsQ_Persistent(MM); PLOT_set_(MM); </pre>

Далее последовательно вызываются подпрограммы `B_AM_KHsQ_Beta2(MM)` и `B_AM_KHsQ_Beta2_equal_u(MM)`, которые реализуют процесс определения координат и процедуры построения графиков положений для возможных реализаций бета-распределений второго рода при фиксированных отношениях параметров форм и при фиксированных значениях первого (или второго) параметра формы соответственно.

Вычисление и построение дополнительного набора форм реализаций логарифмического нормального распределения, реализаций распределения Парето и реализаций устойчивых распределений, таких как распределения Леви, Коши и Гаусса, осуществляются соответственно с помощью процедур `B_AM_KHsQ_LogNorm(MM).m`, `B_AM_KHsQ_Pareto(MM).m` и `B_AM_KHsQ_Persistent(MM).m`. Завершает работу программы процедура `PLOT_set_(MM)` выбора набора и построения надписей для изображения картированного пространства квантильных мер форм, управляемая целочисленной переменной *MM*. Такой подход позволяет при необходимости включить в исследования дополнительный набор форм реализаций. Дополнительный файл 2 содержит листинги программ моделирования пространств квантильных мер асимметрии, эксцесса, контрэксцесса и коэффициента энтропии, которые были использованы для подготовки этой статьи.

Фиксирование отношений параметров форм обеспечивает возможность построения множества точек при пропорциональном изменении параметров формы распределений. Так как для таких линий каждой точке соответствует индивидуальное значение параметра формы, то такие линии представляют собой траектории относительно параметров формы. Процедуры вычисления координат пространства квантильных мер формы и построения графиков положений возможных реализаций бета-распределений второго рода при фиксированных отношениях второго к первому параметров формы иллюстрирует схема алгоритма выполнения процедуры `B_AM_KHsQ_Beta2(MM)`, приведенная на рис. 2.

Входными параметрами процедуры являются вектор отношения параметров формы и границы вектора первого параметра формы. После оценки размерности вектора отношения параметров устанавливается значение цикла, равное числу кривых положений реализаций при заданных отношениях параметров формы. Значения вектора второго параметра формы вычисляются в заданных границах. После оценки размерности первого параметра устанавливается значение цикла, равное числу кривых положений реализаций с эквивалентными значениями первого параметра формы.

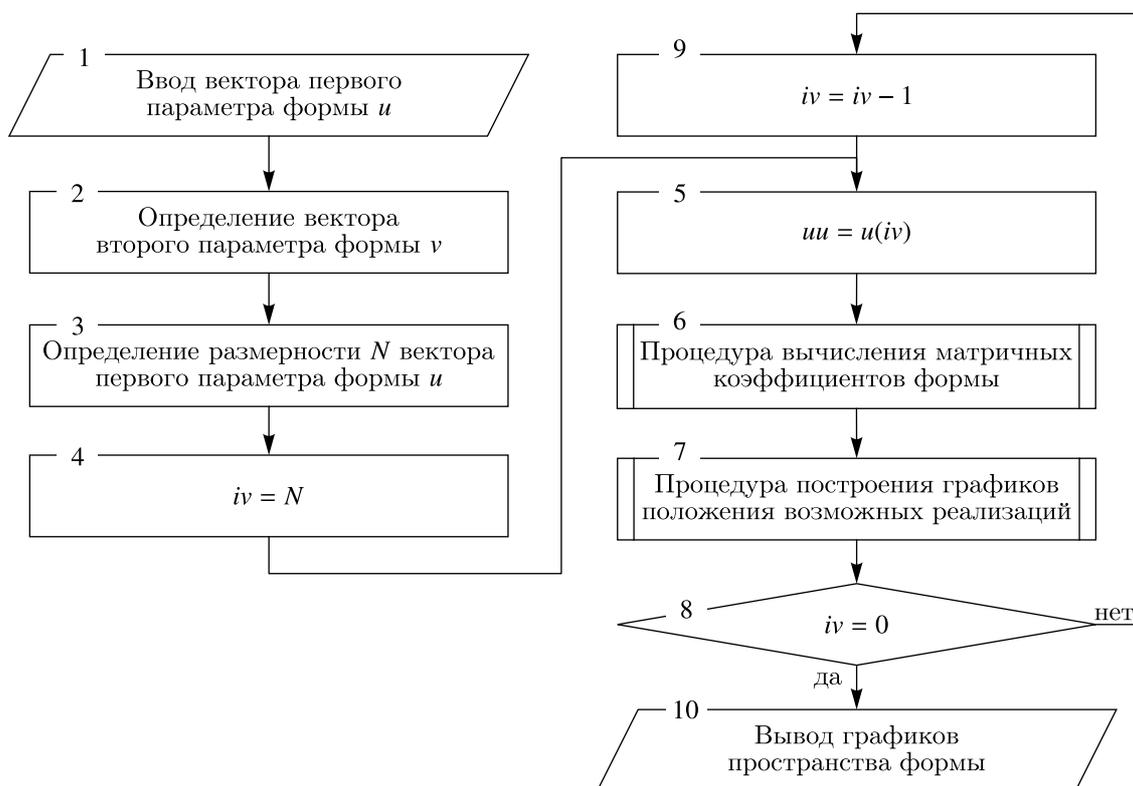
В организованном цикле проводятся вычисление вектора второго параметра формы для фиксированного значения отношения параметра формы, вычисление матричных коэффициентов формы и построение графиков положений возможных реализаций. По окончании цикла выводятся графики положения реализаций, рассчитанные при заданных отношениях параметров формы. Дополнительный файл 2 содержит листинг программного кода процедуры `B_AM_KHsQ_Beta2(MM)` в среде MATLAB.

Рис. 2. Схема выполнения процедуры $V_AM_KHsQ_Beta2(MM)$

Фиксирование значения одного из параметров форм обеспечивает возможность построения множества точек при пропорциональном изменении второго параметра формы. Так как каждой точке соответствуют одинаковые значения одного из параметров формы, то кривые иллюстрируют положение реализаций для эквивалентных значений фиксированного параметра.

Процессы вычисления координат пространства квантильных мер формы и построения возможных реализаций для эквивалентных значений параметров формы u иллюстрирует схема алгоритма выполнения процедуры $V_AM_KHsQ_Beta2_equal_u(MM)$, приведенная на рис. 3. Входными параметрами являются вектор первого параметра формы и вектор границы второго параметра формы. Значения вектора второго параметра формы вычисляются в заданных границах. После оценки размерности первого параметра устанавливается значение цикла, равного числу кривых положений реализаций с эквивалентными значениями первого параметра формы. В организованном цикле проводятся вычисление матричных коэффициентов формы и построение графиков положений возможных реализаций. По окончании цикла выводятся графики положения реализаций при фиксированных значениях первого параметра формы в пространстве форм. Дополнительный файл 2 содержит листинг программного кода процедур $V_AM_KHsQ_Beta2_equal_u(MM)$, выполненных в среде MatLab,

Построение положений возможных реализаций в пространстве робастных мер форм обеспечивает возможность сравнения состава форм реализаций, принадлежащих разным семействам распределений с тяжелыми хвостами. Поскольку на практике часто используются для аппроксимации экстремальных событий логарифмическое нормальное распределение [Колмаков, 2015; Щетинин, 2008; Бобков, Колмаков, 2017; Сикан, 2020; Костылева, Гулин, Дубиничев, 2009] и распределение Парето [Pisarenko, Rodkin, 2010; Маркович, 2002; Вайчюлис, Маркович,

Рис. 3. Схема последовательности процедуры $B_AM_KHsQ_Beta2_equal_u(MM)$

2021], имеет смысл выполнить сравнительный анализ для наборов форм этих распределений и рассмотреть возможность расширения набора форм за счет других семейств распределений, в частности бета-распределений второго рода. Для этих целей разработаны и включены в основной пакет процедуры робастных мер форм для логарифмического нормального распределения $B_AM_KHsQ_LogNorm(MM)$ и для распределения Парето $B_AM_KHsQ_Pareto(MM)$, которые имеют похожие алгоритмы реализации. Дополнительный файл 2 содержит листинги программного кода процедур $B_AM_KHsQ_LogNorm(MM)$ и $B_AM_KHsQ_Pareto(MM)$, выполненных в среде MatLab,

В разделах экономических задач распространено использование устойчивых распределений Леви и распределения Коши для моделирования финансовых рисков [Li et al., 2022; Морозова, Пырлик, 2009; Zumofen, Klafter, Blumen, 1993; Geisel, 2006]. По этой причине разработана процедура $B_AM_KHsQ_Persistent(MM)$, предназначенная для расчета робастных мер формы и картирования реализаций устойчивых распределений. Процедура $B_AM_KHsQ_Persistent(MM)$ также позволяет реализовать картирование положений часто используемых распределений, таких как экспоненциальное распределение и полунормальное распределение. Листинг программного кода процедуры $B_AM_KHsQ_Persistent(MM)$ также приведен в дополнительном файле 2.

Поскольку для работы процедур требуются обратные кумулятивные функции, то дополнительный файл 2 также содержит листинги подпрограмм для обратных кумулятивных функций бета-распределения второго рода, логарифмического нормального распределения и распределения Парето. Там же приведена процедура $PLOT_set(MM)$, предназначенная для построения надписей на изображении топологического пространства робастных мер формы распределений. Таким образом, приведенный набор программ и процедур обеспечивает возможность картирова-

ния реализаций распределений с тяжелыми хвостами при выполнении компьютерного исследования.

4.3. Пространство квантильных мер асимметрии и эксцесса

Квантильные меры формы асимметрии и эксцесса распределения полностью определены параметрами формы распределения и не зависят от таких параметров, как масштаб и положение распределения. На практике для иллюстрации положения возможных реализаций в пространстве признаков форм более удобно использовать контрэксцесс, так как его значения ограничены интервалом от 0 до 1. Квантильный контрэксцесс определен как обратная величина квантильной меры эксцесса Мавра в виде равенства

$$AM_{Ex} = M_{Ex}^{-1}. \quad (44)$$

Формула (44) использована для расчета квантильного контрэксцесса ряда распределений с тяжелыми хвостами. Значения квантильной меры контрэксцесса для исследуемых распределений также даны в таблице 1. Рисунок 4 иллюстрирует положение реализаций в пространстве квантильных оценок асимметрии и контрэксцесса для распределений с тяжелыми хвостами.

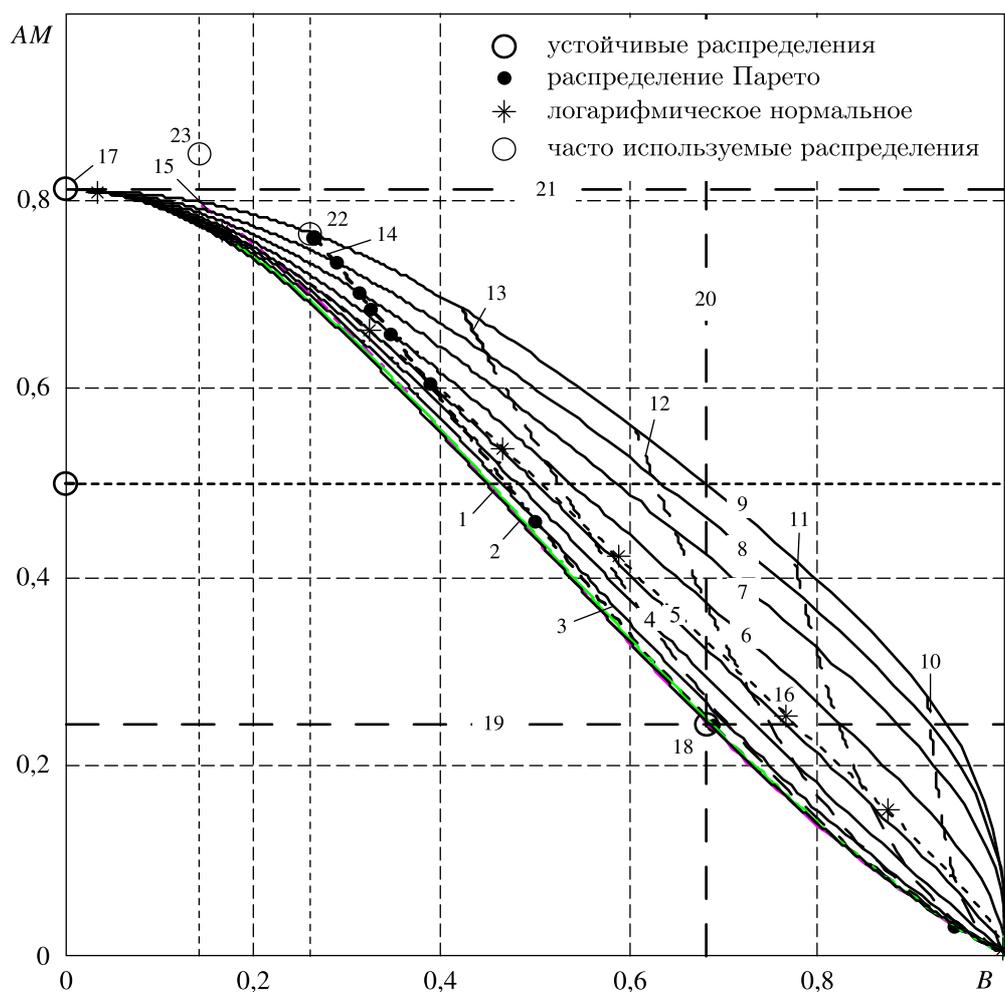


Рис. 4. Положение реализаций распределений с тяжелыми хвостами в пространстве квантильных оценок асимметрии и контрэксцесса

Поскольку бета-распределение включает в себя достаточно большое многообразие распределений, на рис. 4 показана поверхность, заданная кривыми бета-распределения второго рода. Для иллюстрации использованы траектории, под которыми понимается множество точек, соответствующее сохранению пропорциональности между параметрами, заданными как отношение n второго параметра формы ν бета-распределения к первому параметру u . Траектории удобны для исследования формы, так как для управления изменением параметров формы достаточно изменять только один из параметров. На рис. 4 под номерами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9 даны траектории возможных реализаций для отношения n второго к первому параметрам формы распределения, равного значениям 0,1; 0,5; 1; 1,5; 2; 3; 5; 10 и 500 соответственно. При уменьшении отношения менее 0,1 и увеличении отношения на порядок больше, чем 500, положения реализаций группируются вблизи траекторий с номерами 1 и 9. Траектории 1 и 9 отношения 0,1 и 500 ограничивают пространство наиболее вероятного положений для всех возможных реализаций бета-распределения второго рода. Следует обратить внимание на то, что траектории отношения n , равного 0,1 и 0,5, обозначенные номерами 1 и 2, практически накладываются друг на друга и не различимы. Также плохо различима траектория с номером 3 для отношения n , равного 1.

Множество точек равных значений исследуемого параметра формы иллюстрируют пунктирные кривые, построенные для возможных реализаций распределения при одинаковых параметрах формы. На рис. 4 пунктирные кривые, обозначенные номерами 10, 11, 12, 13, 14 и 15, иллюстрируют положение реализаций, для которых остается неизменным первый параметр формы u бета-распределения второго рода, равный значениям 0,13; 0,2; 0,3; 0,5; 1 и 3 соответственно. Положение этих кривых качественно иллюстрирует возможные значения первого параметра формы, при котором различимы положения реализации бета-распределения второго рода. Если первый параметр формы выбрать больше 3, то в пространстве квантильных мер формы асимметрии и контрэксцесса реализации распределений становятся практически не различимыми.

На практике для аппроксимации распределений часто используется логарифмическое нормальное распределение, которое также задано на половине оси случайных величин. Положение реализаций логарифмически нормального распределения при различных значениях параметра σ показано в виде графика кривой 16, который изображен множеством точек. В таблице 1 рассчитаны квантильные асимметрия B и контрэксцесс AM для характерных реализаций логнормального распределения при различных параметрах формы σ . На рис. 4 с помощью условных обозначений в виде звездочек (*) показаны положения для всех реализаций логарифмических распределений из таблицы 2, которые группируются вблизи траектории бета-распределения второго рода с отношением n второго к первому параметрам формы, равным 2. Как можно видеть из рис. 4, семейство бета-распределений второго рода содержит реализации, для которых квантильные асимметрия и контрэксцесс соответствуют логарифмическому нормальному распределению. Качественное отличие логнормальных распределений от реализаций бета-распределения второго рода состоит в том, что для всех реализаций логнормальных распределений можно рассчитать все начальные и центральные моменты.

На рис. 4 также дано положение возможных реализаций распределения Парето, которое совпадает с положением реализаций бета-распределения второго рода, заданных кривой 14 и построенных при условии, что первый параметр формы u равен единице. Большие точки на этой кривой иллюстрируют положение характерных реализаций распределения Парето, для которых значения квантильных асимметрии и контрэксцесса даны в таблице 1.

При стремлении параметров формы u или ν к бесконечности (большим значениям) реализации семейства бета-распределения второго рода стремятся к формам с нулевой асимметрией и оценкой квантильного контрэксцесса, равной 0,813, что соответствует эксцессу Мавра нормального распределения, равного 1,23. Так как положение нормального распределения определено точкой 17, то очевидно, что все реализации бета-распределения второго рода имеют эксцесс

больше, чем нормальное распределение, т. е. более тяжелые хвосты распределения в сравнении с нормальным распределением.

Следует отметить, что при конечных значениях параметров формы бета-распределение второго рода всегда остается асимметричным, так как задано на полуоси для модуля случайной величины и характеризуется одним тяжелым хвостом на бесконечном полуинтервале.

Точка 22 на рис. 4 иллюстрирует положение экспоненциального распределения, которое используется для определения оценки ограниченности хвоста распределения. Согласно теории вероятностей к распределениям с тяжелыми хвостами относят такие распределения, для которых существуют экстремальные значения с вероятностью большей, чем вероятность экспоненциального распределения при том же экстремальном значении. В этом случае говорят, что хвост распределения не ограничен экспоненциально. По этой причине значения квантильных эксцесса и контрэксцесса экспоненциального распределения, равные 1,0306 и 0,766 соответственно, могут быть приняты для ограничения положения распределений с тяжелым хвостом. Очевидно, что бета-распределение содержит в своем составе реализации, для которых хвост распределения ограничен экспоненциально, причем все эти реализации характеризуются значениями квантильной асимметрии меньшими, чем квантильная асимметрия экспоненциального распределения, равного 0,262.

Так как для определения свойств асимметричного бета-распределения второго рода не удобно использование симметричных моделей, на практике часто для сравнения асимметричных свойств применяют экспоненциальное распределение и распределение для модуля несмещенного нормального распределения, которые заданы на положительной полуоси. Положение полунормального распределения для модуля несмещенного нормального распределения иллюстрирует точка 23, для которой квантильные асимметрия и контрэксцесс равны 0,144 и 0,85 соответственно. Эта точка представляет интерес для сравнения вероятности появления экстремальных значений для хвоста исследуемого распределения относительно вероятности появления таких же экстремальных значений при исследовании хвостов нормального распределения.

Следует отметить, что экспоненциальное и полунормальное распределения характеризуются конечными значениями стандартизированных моментов и находятся вблизи линии 21, ограничивающей все возможные реализации бета-распределения второго рода относительно квантильного контрэксцесса. Поскольку для экспоненциального и полунормального распределений существуют стандартизированные центральные моменты, то формы этих распределений качественно отличаются от ряда форм бета-распределения второго рода.

Для анализа свойств распределений с тяжелыми хвостами представляют интерес известные формы устойчивых распределений Коши и Леви, для которых также отсутствуют параметрические моменты. Положение форм распределения Коши иллюстрируется точкой 24, для которой квантильные контрэксцесс и асимметрия равны 0,5 и 0 соответственно. Распределение Коши удобно использовать для сравнения симметричных форм распределений с тяжелыми хвостами. Для сопоставления тяжести хвоста распределений, определенных на положительной числовой полуоси, более подходит устойчивое распределение Леви. Положение распределения Леви иллюстрирует точка 18, для которой квантильные асимметрия и контрэксцесс равны 0,683 и 0,245 соответственно. Линии 19 и 20 разделяют все пространство на четыре части относительно квантильных асимметрии и контрэксцесса распределения Леви.

4.4. Пространство квантильных мер коэффициента энтропии и контрэксцесса

Применение дополнительных квантильных мер формы на основе отношения интервалов информационных и квантильных неопределенностей расширяет возможность отображения реализаций распределений с тяжелыми хвостами и проведения последующего анализа. В статье

в качестве квантильной меры формы использован квантильный коэффициент энтропии, заданный отношением интервала энтропийной неопределенности к межквартильному диапазону.

Рисунок 5 иллюстрирует картирование положений возможных реализаций бета-распределения второго рода в пространстве квантильного коэффициента энтропии и квантильного контрэксцесса, где сохранены обозначения, использованные на рис. 4. В пространстве квантильного коэффициента энтропии и квантильного контрэксцесса наиболее доступны для исследования реализации бета-распределения второго рода при условии, что отношение n второго и первого параметров формы находится в диапазоне от 0,1 до 500 и значение первого параметра формы находится в диапазоне от 0,1 до 3.

Очевидно, что пространство квантильного коэффициента энтропии и квантильного контрэксцесса обеспечивает различимость более широкого диапазона параметров бета-распределения второго рода, которое содержит реализации с тяжелыми хвостами. В этом пространстве хорошо различимы траектории, обозначенные номерами 1, 2 и 3 и рассчитанные при отношении n , равном 0,1; 0,5 и 1, которые практически не различимы в пространстве квантильных мер асимметрии и эксцесса. Поскольку все траектории проходят на большем расстоянии друг относительно друга, то траектории становятся более различимыми как вблизи начала координат, так и вблизи положения нормального распределения, что расширяет диапазон различимости реализаций при малых и больших значениях параметра формы u .

Дополнительно на рис. 5 определено положение логарифмического нормального распределения с помощью кривой 16, которая проходит вблизи траектории 4 бета-распределения второго рода, соответствующей отношению n , равному 1,5. По положениям реализаций логарифмического нормального распределения, обозначенных звездочками, можно установить, что проекция кривой 16 пересекает проекцию траектории 4. Звездочками обозначены реализации, для которых квантильные контрэксцессы и квантильные коэффициенты энтропии даны в таблице 1 и таблице 2 соответственно. Из сопоставления положений кривой 16 и траекторий бета-распределения второго рода на проекциях, данных на рис. 4 и рис. 5, можно предположить, что положения возможных реализаций для логарифмического нормального распределения не совпадают с положением поверхности реализаций бета-распределения. Действительно, несмотря на то что логарифмическое нормальное распределение часто используют для аппроксимации экстремальных данных, для всех реализаций этого распределения существуют параметрические моменты высокого порядка, что качественно отличает реализации логарифмического нормального распределения от реализаций бета-распределений второго рода.

В двумерном пространстве квантильных мер формы, изображенном на рис. 5, также даны положения возможных реализаций распределения Парето, положения которых совпадают с кривой 14, построенной при постоянном значении первого параметра формы u бета-распределения второго рода, равного 1. Большие точки на кривой 14 иллюстрируют положение реализаций распределения Парето, для которых квантильные контрэксцессы и квантильные коэффициенты энтропии даны в таблице 1 и таблице 2 соответственно.

С целью проведения классификации распределений представляет интерес положение устойчивых распределений. В двумерном пространстве на рис. 3 даны положения только устойчивых распределений: Гаусса и Леви. Положение изображающей точки распределения Коши находится за пределами пространства из-за большого значения квантильного коэффициента энтропии, равного 6,283.

Все реализации распределений, для которых квантильный коэффициент энтропии равен квантильному коэффициенту энтропии распределения Гаусса, расположены на пунктирной линии 21. Так как квантильные коэффициенты энтропии для распределений Леви и Гаусса имеют близкие значения, положение распределения Леви также находится в непосредственной близости к линии 21.

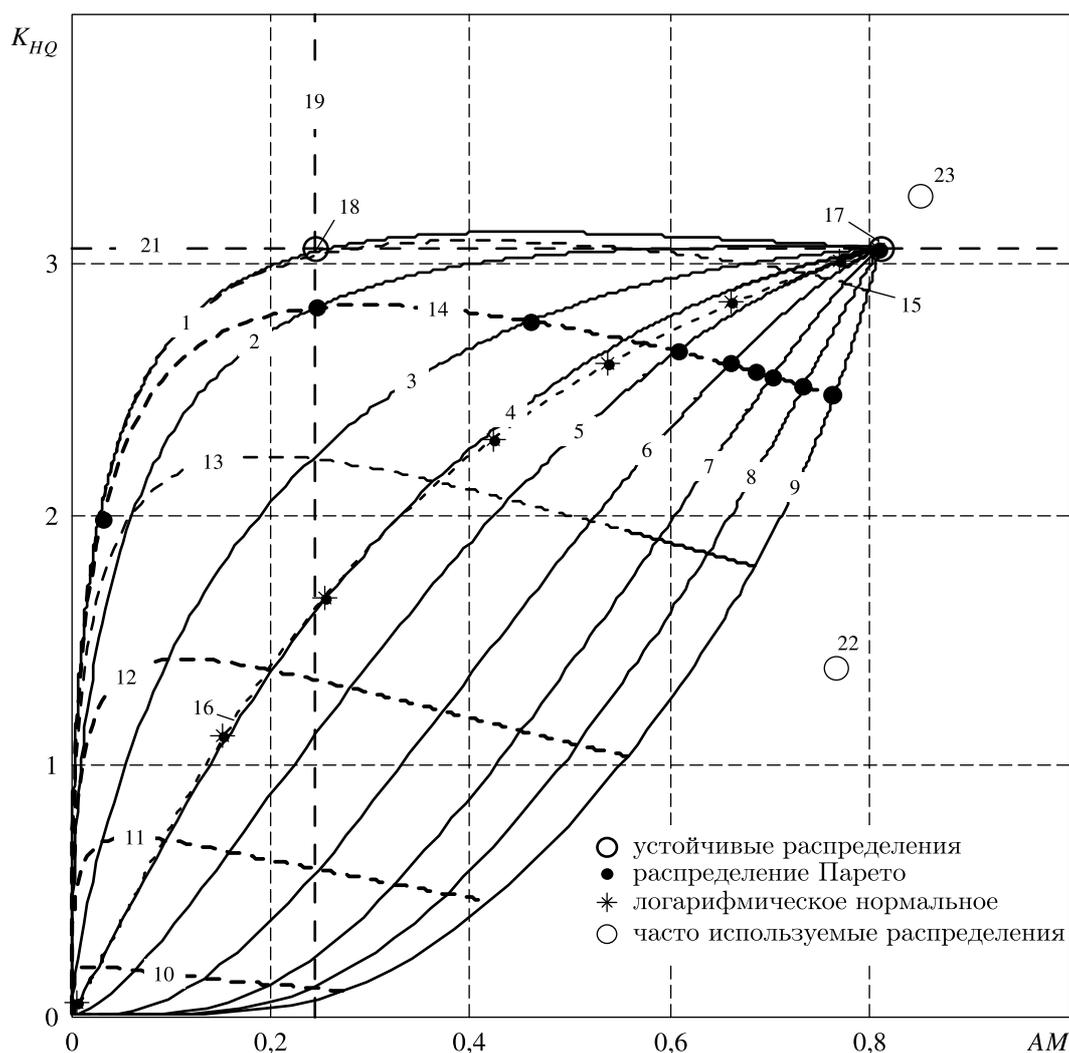


Рис. 5. Положение реализаций распределений с тяжелыми хвостами в пространстве квантильных мер формы контрэкссесса и коэффициента энтропии

Поскольку между изображающими точками распределения Леви и Гаусса траектория 1 находится выше линии 21, то бета-распределение второго рода содержит реализации, для которых квантильный коэффициент энтропии больше, чем квантильный коэффициент энтропии устойчивых распределений Гаусса и Леви. Такие реализации бета-распределения характеризуются отношением второго к первому параметров формы, близким к значению 0,1.

4.5. Пространство квантильных мер коэффициента энтропии и асимметрии

Квантильный коэффициент энтропии обеспечивает возможность получения двумерного пространства квантильных мер формы коэффициента энтропии и асимметрии, которое дано на рис. 6, где также сохранены обозначения, используемые на рис. 4 и 5. Поскольку квантильный коэффициент энтропии является независимой квантильной мерой формы распределений с тяжелыми хвостами, изображение реализаций в пространстве квантильных мер коэффициента энтропии и асимметрии содержит дополнительную информацию о свойствах, форме и взаимном расположении распределений.

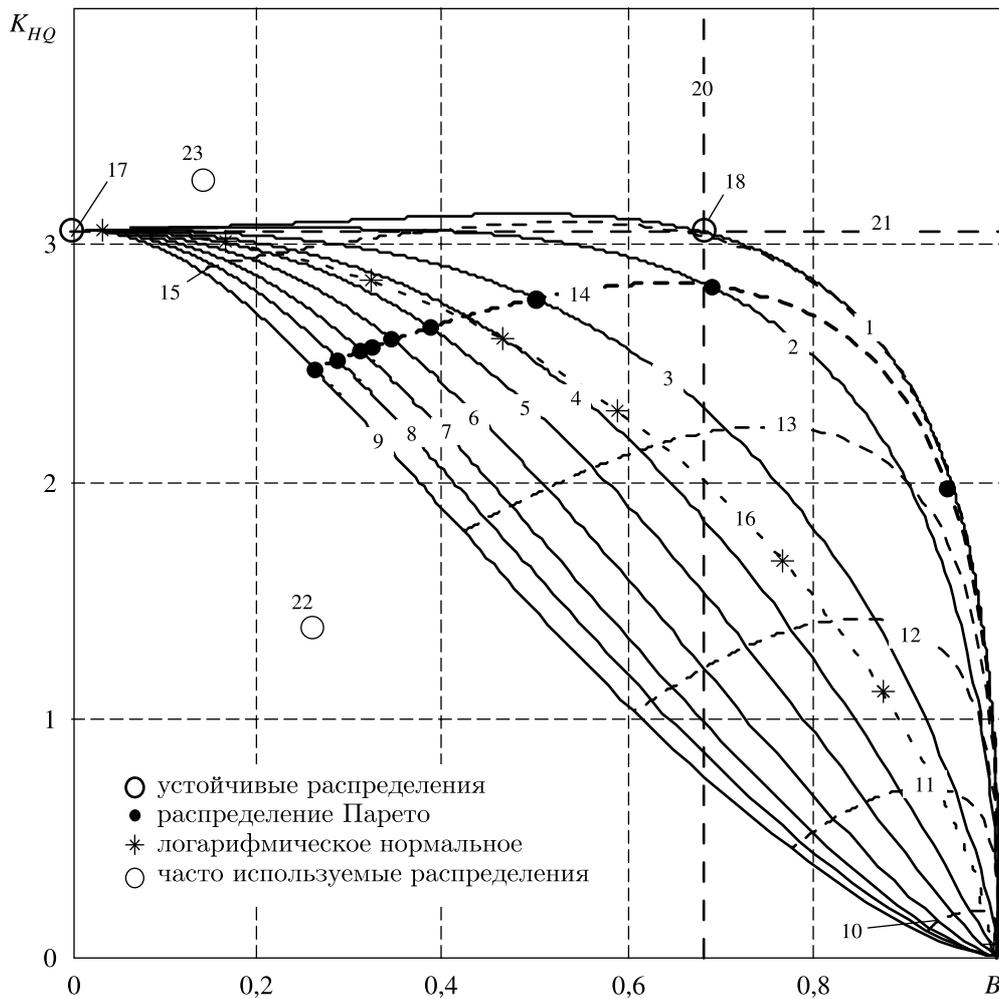


Рис. 6. Положение реализаций распределений с тяжелыми хвостами в пространстве квантильных оценок асимметрии и коэффициента энтропии

Пространство квантильного коэффициента энтропии и квантильной асимметрии также обеспечивает различимость широкого диапазона параметров бета-распределения второго рода, ограниченных диапазоном отношения n от 0,1 до 500 и диапазоном изменения первого параметра формы от 0,1 до 3. В этом пространстве траектории с номерами 1, 2 и 3 также хорошо различимы.

В пространствах на рис. 4 и 5 даны изображающие точки 22 и 23 для часто используемых экспонатного и полунормального распределений соответственно. Поскольку изображающие точки 22 и 23 для экспоненциального и полунормального распределений расположены на большом удалении от траекторий бета-распределения, можно однозначно положить, что формы экспоненциального и полунормального распределений отличаются от форм реализаций, которые включает бета-распределение второго рода.

Множество возможных положений для логарифмического нормального распределения иллюстрирует кривая 16, которая при значениях параметра σ более 5 расположена вблизи траектории 3, при значениях параметра σ меньше 1 проходит вблизи траектории 5 и пересекает траекторию 4 вблизи точки значения параметра σ , равного 1,5. Для обозначенных звездочками реализаций логарифмического нормального распределения квантильные асимметрии и квантильные коэффициенты энтропии даны в таблице 1 и таблице 2. Несмотря на то что положения

кривой 16 на рис. 4 и 6 проходит вблизи траекторий бета-распределения второго рода, сравнение положений кривых подтверждает удаленное расположение реализаций логарифмического нормального распределения относительно поверхности реализаций бета-распределения второго рода. При этом трехмерное пространство квантильных мер формы обеспечивает возможность подбора параметров бета-распределения второго рода для аппроксимации реализаций логарифмического нормального распределения. Формы таких аппроксимаций характеризуются близкими значениями квантильных мер формы. Расстояние, заданное в трехмерном пространстве форм, следует интерпретировать как различие свойств распределений с тяжелыми хвостами, качественно отличающихся тем, что все моменты логарифмического нормального распределения заданы во всем диапазоне значений параметра σ , в то время как параметрические моменты для ряда реализаций бета-распределения второго рода не существуют.

Так как на всех трех проекциях трехмерного пространства мер форм положение возможных реализаций распределения Парето совпадает с положением реализаций бета-распределения, заданных кривой 14, то очевидно, что бета-распределение содержит формы, для которых все три квантильные меры форм совпадают с квантильными мерами распределения Парето. Существенное различие между распределением Парето и бета-распределением второго рода состоит в области задания случайной величины при условии, что параметр смещения равен нулю. Поскольку бета-распределение второго рода задано на всей положительной числовой оси от 0 до бесконечности, в отличие от распределения Парето, заданного на положительной числовой оси от значения y_m (параметр масштаба) до бесконечности, при использовании формы бета-распределения в качестве аппроксимации реализаций распределения Парето необходимо обеспечить равенство масштабов распределений и сдвиг распределений на дистанцию, равную масштабу y_m распределения Парето. Так как кривая 14 иллюстрирует множество точек бета-распределения второго рода при условии, что первый параметр формы u равен 1, то, выполнив подстановку в выражении (2) параметров $u = a = 1$, параметров $\zeta = \vartheta = y_m$ и $v = k$, получим функцию плотности распределения Парето вида

$$f_{\text{Pareto}}(y; k) = \frac{k \cdot y_m^k}{y^{1+k}}. \quad (45)$$

Как можно видеть на примере сопоставления реализаций распределения Парето и бета-распределения второго рода, пространство мер позволяет проводить анализ распределений с целью выбора реализаций с общими формами и проводить предварительную оценку их параметров. Несложно видеть, что реализация распределения Парето с параметром формы k , равным 1, расположена на пересечении траектории с отношением n параметров формы бета-распределения, равным 1, и кривой 14, построенной для параметра формы u , равного 1.

Представляет интерес реализации распределения Парето с параметром формы 0,5. Изображающая точка для этой реализаций расположена на линиях 19 и 20, которые заданы квантильными оценками контрэкспесса и асимметрии распределения Леви. Из сравнения параметров в таблице 1 следует равенство оценок квантильных контрэкспессов распределения Леви и Парето с параметром формы k , равным 0,5. Следовательно, эти реализации характеризуются одинаковой тяжестью хвостов распределения. Также из таблицы 1 можно установить, что оценки квантильных асимметрий распределений Леви и Парето с параметром формы k отличаются на 0,005, что составляет 0,7 % от значений самих оценок. Следовательно, если при проведении исследований представляют интерес асимметрия и тяжесть хвостов, то вместо распределения Леви можно использовать распределение Парето, которое задано более простой математической формой. Такой подход открывает новые возможности и упрощает проведение многих теоретических исследований. Между тем следует отметить, что информационные формы распределений Леви и Парето различны. Информационное различие форм распределений будет проявляться при сравнении

распределений с помощью различных критериев. Таким образом, совпадение положения распределений Леви и Парето в пространстве квантильных мер асимметрии и контрэксцесса (или эксцесса) не дает право выполнить подобную замену, так как в ряде исследований информационные свойства распределений имеют более важное значение. Из сопоставления распределений Леви и Парето можно положить, что информационная мера формы содержит информацию о характере вершины распределения независимо от других мер формы распределения.

При проведении практических исследований представляет интерес возможность замены единственной формы распределения Леви гибким набором близко расположенных форм бета-распределения второго рода. Подобная замена позволяет расширить набор форм моделей с тяжелыми хвостами для решения задач, основанных на форме распределения Леви. Применение моделей бета-распределений второго рода представляет интерес для решения теоретических и прикладных задач в различных областях научных исследований: экономики, физики, химии, биофизики и др.

В трехмерном пространстве квантильных мер форм распределению Леви соответствует изображающая точка 18, расположенная в непосредственной близости от траектории 1 бета-распределений второго рода.

Траектория 1 определена отношением второго параметра формы к первому, равным 0,1, значение которого можно использовать как начальное условие для определения параметров форм бета-распределения второго рода. Устойчивое решение можно получить при использовании оптимизации системы уравнений, записанной относительно трех параметров формы:

$$\left\| \begin{array}{l} KHsQ_{GenBeta-II}(u, v) - 3,0555 \\ AM_{GenBeta-II}(u, v) - 0,2563 \\ B_{GenBeta-II}(u, v) - 0,6828 \end{array} \right\| \rightarrow \min. \quad (46)$$

Решение в трехмерном пространстве устойчиво относительно начальных условий. При использовании итерационных методов оптимизации было получено устойчивое решение относительного первого (u) и второго (v) параметров формы, равных 4,32 и 0,518 соответственно. Для оптимальной формы бета-распределения второго рода были рассчитаны квантильные меры формы — асимметрия, контрэксцесс и коэффициент энтропии, которые равны 0,675; 0,253 и 3,052 соответственно. Относительные отклонения оценок квантильных мер форм бета-распределения и распределения Леви не превысили 1 %, 3,5 % и 0,1 % соответственно. Различие значений квантильных мер формы для оптимальных реализаций бета-распределений второго рода и реализаций распределения Леви можно объяснить тем, что распределение Леви расположено вблизи поверхности реализаций бета-распределения второго рода на некотором расстоянии от нее. Для пространства квантильных мер формы расстояние между распределением Леви и оптимальной формой бета-распределения второго рода составило 0,0176 условных единиц.

При моделировании распределений с тяжелыми хвостами находит применение стабильное распределение Леви, для которого отсутствие второго момента предполагает неограниченность флуктуаций. Это стабильное распределение имеет важное значение в экономических науках для описания хаотических процессов и часто используется для анализа, подобно распределению Гаусса. Важно отметить, что из-за тяжелых хвостов распределение Леви не имеет стандартизированных моментов распределения. Так как все реализации распределения Леви имеют одинаковые значения квантильных мер формы асимметрии, контрэксцесса и коэффициента энтропии, равные 0,683; 0,245 и 3,055 соответственно, то положение точки 18 распределения Леви удобно для анализа свойств распределений с тяжелыми хвостами.

Пунктирная линия 20 соответствует положениям реализаций, для которых оценка квантильной асимметрии равна квантильной асимметрии распределения Леви. Бета-распределение

второго рода содержит реализации, которые могут быть как более, так и менее асимметричными по сравнению с распределением Леви.

Пунктирные линии 19 соответствуют положениям реализаций, для которых квантильный контрэксцесс равен квантильному контрэксцессу распределения Леви. На линии 19 все реализации распределений Леви-мезокуртические (Levi-Mesookurtic), так как характеризуются одинаковым квантильным эксцессом распределения, равным 4,076. Все реализации распределений, находящиеся ниже на рис. 4 и левее на рис. 5 относительно пунктирной линии 19, характеризуются большим квантильным эксцессом и, как следствие, более тяжелыми хвостами в сравнении с распределением Леви. Это Леви-лептокуртические распределения (Levi-Leptokurtic), к которым следует отнести распределения с квантильным эксцессом больше чем 4,076. Такие распределения характеризуются более толстыми хвостами, что приводит к большей вероятности обнаружения экстремальных событий в сравнении с распределениями Леви. В составе бета-распределений второго рода есть Леви-лептокуртические реализации при малых значениях параметров формы распределения, которые характеризуют значения квантильной асимметрии в диапазоне от 0,683 до 1.

Все реализации, расположенные выше на рис. 4 и правее на рис. 5 относительно пунктирной линии 19, являются Леви-платокуртическими (Levy-Platokurtic) распределениями. Для таких распределений вероятность экстремальных значений меньше, чем для распределения Леви. Рисунки 4 иллюстрирует, что большинство реализаций бета-распределения второго рода являются Леви-платокуртическими. Так как все реализации бета-распределения второго рода расположены ниже пунктирной линии 21, то эти распределения являются нормально-лептокуртическими распределениями с эксцессом большим, чем у нормального распределения.

5. Заключение

Двухмерные пространства на рис. 4, 5 и 6 являются тремя проекциями информационно-вероятностного пространства квантильных мер формы, координатные оси которого заданы квантильным коэффициентом энтропии, квантильной мерой асимметрией Боули и квантильной мерой контрэксцесса, которая является обратной мерой к квантильной мере эксцесса Мавра. Благодаря тому, что квантильные меры формы информационно-вероятностного пространства не зависят от параметров смещения и масштаба распределений, изображающая точка пространства соответствует единой форме множества реализаций, которая определена параметрами формы распределения. Если одна и та же точка отражает различные семейства и подсемейства распределений, то существует большая вероятность, что эти семейства включают одинаковые (идентичные) формы реализаций статистических распределений, которые однозначно характеризуются одинаковыми значениями квантильных мер форм информационно-вероятностного пространства.

В трехмерном пространстве квантильных мер форм все реализации бета-распределений второго рода расположены на поверхности, которая задана уравнениями квантильных мер асимметрии и эксцесса (22), контрэксцесса (44) и коэффициента энтропии (41). Множество точек поверхности определяет множество параметров форм u и v бета-распределения второго рода и включает распределения с тяжелыми хвостами. Расположение точек трехмерного пространства робастных коэффициентов формы повышает надежность выбора подсемейства распределения для установления формы реализации и надежность определения параметров формы этой реализации. Автор статьи считает, что надежный выбор параметра формы модели переводит задачу моделирования в ряд корректно поставленных задач, в которой остается определить только масштаб и положения (смещения) модели.

В качестве практического предложения квантильных мер асимметрии Боули и эксцесса Мавра при проведении исследований представляет интерес использование этих оценок для выбора параметров распределения. Для этих целей К. Пирсон и А. Райнд [Pearson, 1905; Rhind, 1909]

предложили отображать характеристики выборочных данных в пространстве параметров асимметрии и контрэксцесса. Несмотря на то что в современной литературе можно найти подробные диаграммы параметрических пространств асимметрии и эксцесса, применение диаграмм параметрических моментов ограничивается предварительным определением подсемейства распределения, поскольку иллюстрирует только границы областей расположения семейств и подсемейств распределений. Примеры подробных диаграмм содержатся в работах [Vargo, Pasupathy, Leemis, 2010; Губарев, 2011]. В работе [Жукова, 2016], в частности, отмечено, что наложение множеств распределений в пространстве коэффициентов асимметрии и эксцесса не позволяет сделать однозначный выбор типа распределения. В силу того, что моменты k -го порядка для распределений с тяжелыми хвостами не существуют, в современной литературе отсутствуют методики предварительного пространственного определения целого ряда подсемейств распределений с тяжелым хвостом.

Существующие методы определения параметров распределения на основе асимметрии Боули и эксцесса Мавра, к примеру [Головешкин и др., 2018], имеют ограниченную область применения, так как устойчивые решения могут быть достигнуты только при предварительном установлении семейства в пространстве стандартизированных моментов. Эти методики не применимы для реализаций бета-распределения второго рода с тяжелым хвостом, так как стандартизированные моменты этих распределений не существуют. Поскольку бета-распределения второго рода содержат тяжелохвостые реализации, которые используются для аппроксимации данных при наличии экстремальных значений, сохраняется необходимость в построении методик установления подсемейства для таких распределений.

Предложенный подход к построению закрытого пространства мер форм для распределений с тяжелыми хвостами позволяет систематизировать распределения путем картирования их положения в трехмерном пространстве квантильных мер, что облегчает проведение сравнительного анализа свойств распределений при выборе наиболее предпочтительной модели. Применение траекторий положения возможных реализаций распределения при одновременном пропорциональном изменении параметров форм распределения удобно для иллюстрации пространства и положения границ реализаций при условии достижения предельных значений параметров формы. Отображение кривых положения реализаций распределения при постоянных параметрах формы позволяет оценить параметры формы отдельных реализаций распределений.

С помощью картирования устойчивых распределений получены приближенные оценки параметров формы для реализации бета-распределения второго рода, для которого оценки мер формы асимметрии, контрэксцесса и коэффициента энтропии наиболее близки к соответствующим оценкам распределения Леви. Оценки использованы для определения наиболее оптимальной формы реализаций бета-распределения и для построения модели распределения Леви посредством минимизации расстояния между положениями моделей в пространстве квантильных мер форм асимметрии, контрэксцесса и коэффициента энтропии. Благодаря картированию также показано, что бета-распределение второго рода не содержит реализации, близкой к форме распределения Коши. В качестве перспективы, которую открывают полученные в работе результаты, автор полагает возможным построение карт сравнения распределений с тяжелыми хвостами для сопоставления свойств различных моделей и использования карт сравнения распределений для сопоставления существующих моделей с результатами исследования. Полученные реализации бета-распределения второго рода для аппроксимации моделей на основе распределения Леви и распределения Парето позволяют расширить возможности прикладного использования моделей распределений с тяжелыми хвостами. Материал статьи иллюстрирует, несмотря на близость расположения форм распределений в трехмерном пространстве, среди возможных реализаций бета-распределения второго рода отсутствуют формы реализаций логнормального распределения.

Таким образом, трехмерное пространство на основе квантильных мер форм асимметрии, контрэксцесса и коэффициента энтропии представляет собой удобный инструмент для сравнения и анализа форм распределений с тяжелыми хвостами.

Список литературы (References)

- Бобков В. Н., Колмаков И. Б.* Выявление социальной структуры и неравенства распределения денежных доходов населения Российской Федерации // Экономика региона. — 2017. — Т. 13, вып. 4. — С. 971–984.
Bobkov V. N., Kolmakov I. B. Vyyavleniye sotsial'noy struktury i neravenstva raspredeleniya denezhnykh dokhodov naseleniya Rossiyskoy Federatsii [Identifying the social structure and the inequality in monetary income of Russian population] // Ekonomika regiona. — 2017. — Vol. 13, No. 4. — P. 971–984 (in Russian).
- Вадзинский Р. Н.* Справочник по вероятностным распределениям. — СПб.: Наука, 2001. — 116 с.
Vadzinskiy R. N. Spravochnik po veroyatnostnym raspredeleniyam [Handbook of probability distributions]. — Saint Petersburg: Nauka, 2001. — 116 p. (in Russian).
- Вайчюлис М., Маркович Н. М.* Оценка параметров в суженном распределении Парето // Автоматика и телемеханика. — 2021. — Вып. 8. — С. 85–107.
Vaychyulis M., Markovich N. M. Otsenka parametrov v suzhennom raspredelenii Pareto [Estimation of parameters in the narrowed Pareto distribution] // Avtomatika i telemekhanika [Automation and telemechanics]. — 2021. — No. 8. — P. 85–107 (in Russian).
- Головешкин В. А., Жукова Г. Н., Ульянова М. В., Фомичёв М. И.* Вероятностный прогноз сложности индивидуальных задач коммивояжера на основе идентификации распределения сложности по экспериментальным данным // Автоматика и телемеханика. — 2018. — № 7. — С. 149–166.
Goloveshkin V. A., Zhukova G. N., Ulyanova M. V., Fomichev M. I. Veroyatnostnyy prognoz slozhnosti individual'nykh zadach kommivoyazhera na osnove identifikatsii raspredeleniya slozhnosti po eksperimental'nym dannym [Probabilistic prediction of the complexity of individual traveling salesman problems based on the identification of the distribution of complexity from experimental data] // Avtomatika i telemekhanika [Automation and telemechanics]. — 2018. — No. 7. — P. 149–166 (in Russian).
- ГОСТ Р ИСО 16269-4-2017. Статистические методы. Статистическое представление данных. Часть 4. Выявление и обработка выбросов. — М.: Стандартинформ, 2017.
 GOST R ISO 16269-4-2017. Statisticheskiye metody. Statisticheskoye predstavleniye dannykh. Chast' 4. Vyyavleniye i obrabotka vybrosov [Statistical methods. Statistical presentation of data. Part 4. Identification and treatment of outliers]. — Moscow: Standartinform, 2017 (in Russian).
- Губарев В. В.* Идентификация эмпирических распределений // Вестник Самарского государственного аэрокосмического университета. — 2011. — Т. 30, № 6. — С. 205–215.
Gubarev V. V. Identifikatsiya empiricheskikh raspredeleniy [Identification of empirical distributions] // Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo aerokosmicheskogo universiteta [Bulletin of the Samara State Aerospace University]. — 2011. — Vol. 30, No. 6. — P. 205–215 (in Russian).
- Денисов В. И., Тимофеев В. С.* Устойчивые распределения и оценивание параметров регрессионных зависимостей // Известия Томского политехнического университета. — 2011. — Т. 318, № 2. — С. 10–15.
Denisov V. I., Timofeev V. S. Ustoychivyye raspredeleniya i otsenivaniye parametrov regressionnykh zavisimostey [Stable distributions and estimation of parameters of regression dependencies] // Izvestiya Tomskogo politekhnicheskogo universiteta [News of the Tomsk Polytechnic University]. — 2011. — Vol. 318, No. 2. — P. 10–15 (in Russian).
- Дубовиков М. М., Старченко Н. В.* Экономифизика и фрактальный анализ финансовых временных рядов // Успехи физических наук. — 2011. — Т. 181, № 7. — С. 779–786.
Dubovikov M. M., Starchenko N. V. Ekonofizika i fraktal'nyy analiz finansovykh vremennykh ryadov [Econophysics and fractal analysis of financial time series] // Uspekhi fizicheskikh nauk [Advances in Physical Sciences]. — 2011. — Vol. 181, No. 7. — P. 779–786 (in Russian).
- Жукова Г. Н.* Идентификация вероятностных распределений по коэффициентам асимметрии и эксцесса // Автоматизация, современные технологии. — 2016. — № 5. — С. 26–33.
Zhukova G. N. Identifikatsiya veroyatnostnykh raspredeleniy po koeffitsiyentam asimmetrii i ekstessa [Identification of probability distributions by coefficients of skewness and kurtosis] // Avtomatizatsiya, sovremennyye tekhnologii [Automation, modern technologies]. — 2016. — No. 5. — P. 26–33 (in Russian).
- Захаров И. С.* Модель диффузионного процесса с тяжелыми хвостами в распределении // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. — 2017. — Т. 18, № 2. — С. 53–58.

- Zakharov I. S.* Model' diffuzionnogo protsessa s tyazhelymi khvostami v raspredelenii [Model of the diffusion process with heavy tails in the distribution] // Vestnik KRAUNTS. Fiz.-mat. nauki. — 2017. — Vol. 18, No. 2. — P. 53–58 (in Russian).
- Золотарев В. М.* Одномерные устойчивые распределения. — М.: Наука, 1983.
Zolotarev V. M. Odnomernyye ustoychivyye raspredeleniya [One-dimensional stable distributions]. — Moscow: Nauka, 1983 (in Russian).
- Колмаков И. Б.* Методология расчета и анализа интегральных оценок показателей поляризации денежных доходов населения // Вопросы статистики. — 2015. — № 2. — С. 23–36.
Kolmakov I. B. Metodologiya rascheta i analiza integral'nykh otsenok pokazateley polyarizatsii denezhnykh dokhodov naseleniya [Methodology for calculation and analysis of integral estimates of polarization indices of money income of population] // Voprosy statistiki. — 2015. — No. 2. — P. 23–36 (in Russian).
- Костылева Л. В., Гулин К. А., Дубиничев Р. В.* Социально-экономическое неравенство населения региона. — Вологда: ИСЭРТ РАН, 2009. — 148 с.
Kostyleva L. V., Gulin K. A., Dubinichev R. V. Sotsial'no-ekonomicheskoye neravenstvo naseleniya regiona [Socioeconomic inequality of the population of the region]. — Vologda: ISERT RAN, 2009. — 148 p. (in Russian).
- Лебедев А. В.* Основы стохастической теории экстремумов. — М.: МГУ, 2018. — 100 с.
Lebedev A. V. Osnovy stokhasticheskoy teorii ekstremumov [Fundamentals of stochastic extremum theory]. — Moscow: MGU, 2018. — 100 p. (in Russian).
- Маркович Н. М.* Оценивание квантилей высоких порядков для распределений с тяжелыми хвостами // Автоматика и телемеханика. — 2002. — Вып. 8. — С. 63–79.
Markovich N. M. Otsenivaniye kvantiley vysokikh poriadkov dlya raspredeleniy s tyazhelymi khvostami [High-order quantile estimation for heavy-tailed distributions] // Avtomatika i telemekhanika [Automation and telemechanics]. — 2002. — No. 8. — P. 63–79 (in Russian).
- Морозова М. М., Пырлик В. Н.* Устойчивое распределение и его модификации и ценообразование производных финансовых активов // Вестник НГУ. Сер. Социально-экономические науки. — 2009. — Т. 9, вып. 1. — С. 97–112.
Morozova M. M., Pyrlik V. N. Ustoychivoye raspredeleniye i yego modifikatsii i tsoobrazovaniye proizvodnykh finansovykh aktivov [Sustainable distribution and its modifications and pricing of derivative financial assets] // Vestnik NGU. Ser. Sotsial'no-ekonomicheskiye nauki [Bulletin of NGU. Series: Social and economic sciences]. — 2009. — Vol. 9, No. 1. — P. 97–112 (in Russian).
- Писаренко В. Ф., Родкин М. В.* Распределения с тяжелыми хвостами: приложения к анализу катастроф. — Сер. Вычислительная сейсмология. — Вып. 38. — М.: ГЕОС, 2007.
Pisarenko V. F., Rodkin M. V. Raspredeleniya s tyazhelymi khvostami: prilozheniya k analizu katastrof [Distributions with heavy tails: applications to the analysis of catastrophes]. — Ser. Vychislitel'naya seysmologiya [Ser. Computational seismology]. — No. 38. — Moscow: GEOS Publishing House, 2007 (in Russian).
- Полосин В. Г.* Пространство энтропийно-параметрических признаков для контроля формы несимметричных распределений // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Технические науки. — 2020. — Т. 55, № 3. — С. 44–57. — DOI: 10.21685/2072-3059-2020-3-5
Polosin V. G. Prostranstvo entropiyno-parametricheskikh priznakov dlya kontrolya formy nesimmetrichnykh raspredeleniy [The space of entropy-parametric features to control the shape of asymmetric distributions] // Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Tekhnicheskiye nauki [News of higher educational institutions. Volga region. Technical science]. — 2020. — Vol. 55, No. 3. — P. 44–57 (in Russian).
- Родионова Л. А., Копнова Е. Д.* Применение мер «тяжелохвостости» в задачах анализа финансовых временных рядов // Бизнес-информатика. — 2023. — Т. 17, № 3. — С. 38–52.
Rodionova L. A., Kopnova E. D. Primeneniye mer “tyazhelokhvostosti” v zadachakh analiza finansovykh vremennykh ryadov [Application of measures of heavy-tailedness in problems for analysis of financial time series] // Biznes-informatika. — 2023. — Vol. 17, No. 3. — P. 38–52 (in Russian).
- Романовский М. Ю., Романовский Ю. М.* Введение в эконофизику. Статистические и динамические модели. — М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2007. — 280 с.
Romanovsky M. Yu., Romanovsky Yu. M. Vvedeniye v ekonofiziku. Statisticheskiye i dinamicheskiye modeli [Introduction to econophysics. Statistical and dynamic models]. — Moscow–Izhevsk: Institute for Computer Research, Research Center “Regular and Chaotic Dynamics”, 2007. — 280 p. (in Russian).
- Сикан А. В.* Вероятностные распределения в гидрологии. Специальные главы теории и практики гидрологических расчетов. — СПб.: РГГМУ, 2020. — 286 с.
Sikan A. V. Veroyatnostnyye raspredeleniya v gidrologii. Spetsial'nyye glavy teorii i praktiki gidrologicheskikh raschetov [Probability distributions in hydrology. Special chapters on the theory and practice of hydrological calculations]. — Saint Petersburg: RGGMU, 2020. — 286 p. (in Russian).

- Чистяков В. П.* Теорема о суммах положительных случайных величин и ее приложения к ветвящимся случайным процессам // Теория вероятностей и ее применения. — 1964. — Т. 9, № 4. — С. 710–718.
Chistyakov V.P. Teorema o summakh polozhitel'nykh sluchaynykh velichin i yeye prilozheniya k vetvyashchimsya sluchaynym protsessam [A theorem on sums of independent random positive variables and its applications to branching processes] // Teoriya veroyatnostey i eye primeneniya. — 1964. — Vol. 9, No. 4. — P. 710–718 (in Russian).
- Щетинин Е. Ю.* Математическая теория экстремальных величин в моделировании и оценивании финансовых рисков // Финансовая информатика. — 2008. — Т. 1, № 1. — С. 63–70.
Shchetinin E. Yu. Matematicheskaya teoriya ekstremal'nykh velichin v modelirovanii i otsenivanii finansovykh riskov [Mathematical theory of extreme values in modeling and assessing financial risks] // Finansovaya informatika. — 2008. — Vol. 1, No. 1. — P. 63–70 (in Russian).
- Asmussen S.R.* Steady-state properties of GI/G/1. Applied probability and queues // Stochastic modeling and applied probability. — 2003. — Vol. 51. — P. 266–301.
- Bonato M.* Robust estimation of skewness and kurtosis in distributions with infinite higher moments // Finance Research Letters. — 2010. — Vol. 8, No. 2. — P. 77–78.
- Bowley A.L.* Elements of statistics. — London: P.S.King & Son Ltd., 1921. — <https://archive.org/details/elementsstatist03bowlgoog/page/n8/mode/2up>
- Bradley B. O., Taqqu M. S.* Financial risk and heavy tails // Handbook of heavy tailed distributions in finance / S. T. Rachev (ed.). — North Holland, 2003. — Vol. 1. — P. 35–103.
- Burr I.W.* Cumulative frequency functions // The Annals of Mathematical Statistics. — 1942. — Vol. 13. — P. 215–232.
- Chaskalovic J., Assous F.* Data mining techniques for scientific computing: Application to asymptotic paraxial approximations to model ultrarelativistic particles // Journal of Computational Physics. — 2011. — Vol. 230, No. 12. — P. 4811–4827.
- Chaskalovic J., Assous F.* Generalized beta prime distribution applied to finite element error approximation // Axioms. — 2022. — Vol. 11, No. 3. — P. 84.
- Foss S., Korshunov D., Zachary S.* An introduction to heavy-tailed and subexponential distributions. — New York, Dordrecht, Heidelberg, London: Springer, 2011.
- Geisel T.* Lévy walks in chaotic systems: Useful formulas and recent applications // Lévy flights and related topics in physics. — Lecture Notes in Physics. — 2006. — P. 151–173.
- Gelman A.* Prior distributions for variance parameters in hierarchical models (Comment on article by Browne and Draper) // Bayesian Analysis. — 2006. — Vol. 1, No. 3. — P. 515–534.
- Harvey A., Palumbo D.* Score-driven models for realized volatility // Journal of Econometrics. — 2023. — 105448.
- Hertzler G.* “Classical” probability distributions for stochastic dynamic models // 47th annual conference of the Australian agricultural and resource economics society. — Fremantle, Western Australia, 2003.
- Hinkley D. V.* On power transformations to symmetry // Biometrika. — 1975. — Vol. 62. — P. 101–111.
- Katikas L., Dimitriadis P., Koutsoyiannis D., Kontos T., Kyriakidis P.* A stochastic simulation scheme for the long-term persistence, heavy-tailed and double periodic behavior of observational and reanalysis wind time-series // Applied Energy. — 2021. — Vol. 295. — P. 116873.
- Kenney J.F., Keeping E.S.* Mathematics of statistics. Pt. 1. — 3rd ed. — New York, Toronto: Van Nostrand Company, 1962.
- Kim T., White H.* On more robust estimation of skewness and kurtosis // Finance Research Letters. — 2004. — Vol. 1, No. 1. — P. 56–73.
- Lazo A., Rathie P.* On the entropy of continuous probability distributions // IEEE Transactions on Information Theory. — 1978. — Vol. 24, No. 1. — P. 120–122.
- Li W.-Z., Zhai J.-R., Zhou W.-X., Wang G.-J.* Predicting tail events in a RIA-EVT-Copula framework // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. — 2022. — Vol. 600. — P. 127524.

- Ma T., Holden J. G., Serota R. A.* Distribution of human response times // *Complexity*. — 2016. — Vol. 21, No. 6. — P. 61–69.
- Mazucheli J., Alves B., Menezes A. F. B., Leiva V.* An overview on parametric quantile regression models and their computational implementation with applications to biomedical problems including COVID-19 data // *Computer Methods and Programs in Biomedicine*. — 2022. — Vol. 221. — P. 106816.
- McDonald J. B., Ransom M.* The generalized beta distribution as a model for the distribution of income: estimation of related measures of inequality // *Modeling Income Distributions and Lorenz Curves* / Ed. by D. Chotikapanich. — Australia: Springer, 2008. — P. 147–166.
- Mielke P. W., Jonson E. S.* Some generalized beta distributions of the second kind having desirable application features in hydrology and meteorology // *Water Resources Research*. — 1974. — Vol. 10, No. 2. — P. 223–226.
- Moghaddam M. D., Mills J., Serota R. A.* Generalized beta prime distribution: stochastic model of economic exchange and properties of inequality indices // *Economics*. — 2019. — arXiv:1906.04822 [econ.EM]
- Moors J. J. A.* A quantile alternative for kurtosis // *The Statistician*. — 1988. — Vol. 37. — P. 25–32.
- Pearson K.* On the general theory of skew correlation and non-linear regression. — Dulau & Co., 1905.
- Pisarenko V., Rodkin M.* Heavy-tailed distributions in disaster analysis. — *Advances in Natural and Technological Hazards Research*. — Vol. 30. — Dordrecht, Heidelberg, London, New York: Springer, 2010.
- Polosin V. G.* Informational measures of the shape of the Amoroso distributions // *Materials Science Forum*. — 2021. — Vol. 1031. — P. 58–66.
- Polosin V. G.* Moment ratio and entropy coefficient display for beta distribution of second kind // *European Proceedings of Social and Behavioural Sciences*. — 2022. — Vol. 127. — P. 15405. — DOI: 10.15405/epsbs.2022.08.24
- Rasheed F., Yau K.-L. A., Low Y.-C.* Deep reinforcement learning for traffic signal control under disturbances: A case study on Sunway city, Malaysia // *Future Generation Computer Systems*. — 2020. — Vol. 109, No. 3. — P. 431–445.
- Rhind A.* Tables to facilitate the calculation of the probable errors of the chief constants of skew frequency distributions // *Biometrics*. — 1909. — Vol. 7, No. 1/2. — P. 127–147.
- Shlesinger M. F., Klafter J., Zumofen G.* Above, below and beyond Brownian motion // *American Journal of Physics*. — 1999. — Vol. 67, No. 12. — P. 1253–1259.
- Tahmasebi S., Bahboodan J.* Shannon entropy for the Feller–Pareto family and order statistics of FP subfamilies // *Applied Mathematical Sciences*. — 2010. — Vol. 4. — P. 495–504.
- Tyralis H., Papacharalampous G. A.* Hydrological post-processing for predicting extreme quantiles // *Journal of Hydrology*. — 2023. — Vol. 617, Part C. — P. 129082.
- Vargo E., Pasupathy R., Leemis L. M.* Moment-ratio diagrams for univariate distributions // *Journal of Quality Technology*. — 2010. — Vol. 42, No. 3. — P. 1–11.
- Weng Y.-Y., Lu Z.-H., Li P.-P., Zhao Y.-G.* Dynamic reliability analysis of structures under nonstationary stochastic excitations using tail-modified extreme value distribution // *Mechanical Systems and Signal Processing*. — 2023. — Vol. 198. — P. 110424.
- Yang X., Frees E. W., Zhang Z.* A generalized beta copula with applications in modeling multivariate long-tailed data // *Insurance: Mathematics and Economics*. — 2011. — Vol. 49, No. 2. — P. 265–284.
- Zumofen G., Klafter J., Blumen A.* Levy' walks and propagators in intermittent chaotic systems // *Phys. Rev. E*. — 1993. — Vol. 47, No. 3. — P. 2183–2186.