

УДК: 519.876.5

Структурные модели изделия в автоматизированных системах проектирования

А. Н. Божко

Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана,
Россия, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1

E-mail: bozhkoan@bmtu.ru

Получено 19.02.2024, после доработки — 03.06.2024.
Принято к публикации 03.09.2024.

Автоматизированное проектирование процессов сборки сложных систем — это важное направление современных информационных технологий. Последовательность сборки и декомпозиция изделия на сборочные единицы в значительной степени зависят от механической структуры технической системы (машины, механического прибора и др.). В большей части современных исследований механическая структура изделий моделируется при помощи графа связей и различных его модификаций. Координация деталей при сборке может достигаться реализацией нескольких связей одновременно. Это порождает на множестве деталей изделия многоместное отношение базирования, которое не может быть корректно описано графовыми средствами. Предложена гиперграфовая модель механической структуры изделия. В современном дискретном производстве используются секвенциальные когерентные сборочные операции. Математическим описанием таких операций служит нормальное стягивание ребер гиперграфовой модели. Последовательность стягиваний, которая преобразует гиперграф в точку, представляет собой описание сборочного плана. Гиперграфы, для которых существует такое преобразование, называются s -гиперграфами. s -гиперграфы — это корректные математические модели механических структур любых собираемых изделий. Приводится теорема о необходимых условиях стягиваемости s -гиперграфов. Показано, что необходимые условия не являются достаточными. Дан пример нестягиваемого гиперграфа, для которого выполняются необходимые условия. Это значит, что проект сложной технической системы может содержать скрытые структурные ошибки, которые делают невозможным сборку изделия. Поэтому поиск достаточных условий стягиваемости является важной задачей. Доказаны две теоремы о достаточных условиях стягиваемости. Они дают теоретическое основание для разработки эффективной вычислительной процедуры поиска всех s -подграфов s -гиперграфа. s -подграф — это модель любой части изделия, которую можно собрать независимо. Это прежде всего сборочные единицы различного уровня иерархии. Упорядоченное по включению множество всех s -подграфов s -гиперграфа представляет собой решетку. Эту модель можно использовать для синтеза всевозможных последовательностей сборки и разборки изделия и его составных частей. Решеточная модель изделия позволяет анализировать геометрические препятствия при сборке алгебраическими средствами.

Ключевые слова: computer aided assembly planning (CAAP, автоматизированное проектирование процессов сборки), гиперграфовая модель структуры изделия, стягивание, механическая структура, условия стягиваемости, решеточная модель

UDC: 519.876.5

Structural models of product in CAD-systems

A. N. Bozhko

Bauman Moscow State University,
5/1 2-ya Baumanskaya st., Moscow, 105005, Russia

E-mail: bozhkoan@bmstu.ru

Received 19.02.2024, after completion — 03.06.2024.

Accepted for publication 03.09.2024.

Computer-aided assembly planning of complex products is an important area of modern information technology. The sequence of assembly and decomposition of the product into assembly units largely depend on the mechanical structure of a technical system (machine, mechanical device, etc.). In most modern research, the mechanical structure of products is modeled using a graph of connections and its various modifications. The coordination of parts during assembly can be achieved by implementing several connections at the same time. This generates a k -ary basing relation on a set of product parts, which cannot be correctly described by graph means. A hypergraph model of the mechanical structure of a product is proposed. Modern discrete manufacturing uses sequential coherent assembly operations. The mathematical description of such operations is the normal contraction of edges of the hypergraph model. The sequence of contractions that transform the hypergraph into a point is a description of the assembly plan. Hypergraphs for which such a transformation exists are called s -hypergraphs. S -hypergraphs are correct mathematical models of the mechanical structures of any assembled products. A theorem on necessary conditions for the contractibility of s -hypergraphs is given. It is shown that the necessary conditions are not sufficient. An example of a noncontractible hypergraph for which the necessary conditions are satisfied is given. This means that the design of a complex technical system may contain hidden structural errors that make assembly of the product impossible. Therefore, finding sufficient conditions for contractibility is an important task. Two theorems on sufficient conditions for contractibility are proved. They provide a theoretical basis for developing an efficient computational procedure for finding all s -subgraphs of an s -hypergraph. An s -subgraph is a model of any part of a product that can be assembled independently. These are, first of all, assembly units of various levels of hierarchy. The set of all s -subgraphs of an s -hypergraph, ordered by inclusion, is a lattice. This model can be used to synthesize all possible sequences of assembly and disassembly of a product and its components. The lattice model of the product allows you to analyze geometric obstacles during assembly using algebraic means.

Keywords: computer aided assembly planning (CAAP), hypergraph model of product structure, contraction, mechanical structure, contractibility conditions, lattice model

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2024, vol. 16, no. 5, pp. 1079–1091 (Russian).

1. Введение

Сборка технической системы — это важнейший технологический передел, от которого зависят многие технические параметры изделия и экономические показатели производства. Теоретические и практические проблемы автоматизации проектирования процессов сборки (computer aided assembly planning, СААР) активно обсуждаются в современных публикациях по информационным технологиям [Ghandi, Masehian, 2015; Marri, Gunasekaran, Grieve, 1998; Santochi, Dini, Failli, 2002]. В различных отраслях дискретного производства активно используются автономные СААР-системы и СААР-подсистемы интегрированных CAD/CAM/CAE-систем [Ghandi, Masehian, 2015].

Последовательность сборки и содержание отдельных сборочных операций в значительной степени зависят от механической структуры (assembly structure, product structure) технической системы (ТС). Механическую структуру образуют детали и комплектующие и механические связи между ними. В большинстве современных СААР-систем для описания механической структуры изделия используются так называемый граф связей и многочисленные его модификации: Liaison diagram [Bourjault, 1988; De Fazio, Whitney, 1987], Liaison graph [Xing et al., 2007], Part liaison graph [Park et al., 2013], Attributed liaison graph [Vigano, Gómez, 2012], Product liaison graph [Erdos, Kis, Xirouchakis, 2001], Connection graph [De Mello, Sanderson, 1991a], Assembly mating graph [Sambhoos, Кос, Nagi, 2009], Part mating graph [Ko, Lee, 1987], Connective relation graph [Gu, Yan, 1995], Hierarchical relation graph [Su, 2009], Adjacency graph [Zhang et al., 2013], Assembly connectivity graph [Pan, Smith, Smith, 2006] и др.

Приведем точное определение этой важной структурной модели. Пусть $X = \{x_i\}_{i=1}^n$ — множество деталей некоторого изделия. Графом связей называется граф $G = (X, V)$, у которого множество вершин X представляет элементы (детали и комплектующие) ТС, а множество ребер V — соединения и сопряжения между элементами.

В [Bourjault, 1988] предложен интерактивный метод синтеза сборочного процесса. Основным носителем структурной информации об изделии является граф связей. Эксперт должен ответить на вопросы о корректной последовательности механических связей во времени. На основе данных, полученных от эксперта, формируется план сборки изделия. В [De Fazio, Whitney, 1987] описана улучшенная версия интерактивного метода, которая требует значительно меньшего числа обращений к эксперту.

В [De Mello, Sanderson, 1991b] предложен один из первых систематических методов автоматизированного проектирования сборочных процессов и операций, основанный на рекурсивном разрезании графа связей на два связанных фрагмента. Результат разрезов фиксируется в виде И-ИЛИ-дерева, которое служит для синтеза секвенциальных сборочных планов и операций.

В [O'shea, Kaebnick, Grewal, 2000] описан метод декомпозиции сложного изделия на сборочные единицы. В его основе лежит разрезание графа связей на связанные компоненты. Рассматриваются такие разрезы, в которых внутренняя связность преобладает над внешней. Для выбора рационального проектного решения использованы дополнительные структурные характеристики: маскирование циклов, число рассеченных ребер, степень связности подграфов и др.

В [Lozano-Perez, Wilson, 1993] предложена интересная модификация графа связей, так называемый *db*-граф (directional blocking graph). Он является суграфом графа связей с ориентированными ребрами. *Db*-граф описывает локальные препятствия, которые накладывают контактирующие детали, при бесконечно малом движении детали в выбранном направлении. Разложение *db*-графа на компоненты сильной связности (бикомпоненты) позволяет получить последовательность разборки изделия или установить, что разборка системы по заданному направлению невозможна.

В [Wilson, Latombe, 1994] концепция *db*-графа обобщена на случай всех возможных направлений разборки изделия. Эта модель называется *ndb*-графом (nondirectional blocking graph).

Она представляет собой разбиение трехмерного пространства на телесные углы, в пределах которых локальные препятствия описываются *db*-графом неизменной структуры. Данная модель используется в СААР-системе СТААТ.

В [Romney et al., 1995] предложены так называемые *edb*-графы (extended directional blocking graphs). В данной модели учитываются не только локальные, но и глобальные препятствия, которые могут существовать при демонтаже деталей по прямолинейным траекториям. Информация для синтеза *edb*-графа извлекается из заметаний, которые оставляют 3D-модели деталей при движении по прямолинейным траекториям.

Граф механических связей $G = (X, V)$ — это слабая структурная модель, поскольку описывает только бинарные механические связи между конструктивными элементами. Координация деталей при сборке изделий в общем случае может достигаться за счет нескольких (двух, трех и более) механических связей одновременно. В [Bozhko, 2019] предложена гиперграфовая модель механической структуры изделия, которая свободна от этого недостатка.

2. Гиперграфовая модель механической структуры

Механическую структуру технической системы (машины или механического прибора) зададим в виде гиперграфа $H = (X, R)$, в котором множество вершин $X = \{x_i\}_{i=1}^n$ представляет детали, а множество гипердуг $R = \{r_j\}_{j=1}^m$ описывает минимальные геометрически определенные группировки деталей, полученные базированием по внутренним конструкторским базам. На рис. 1 показана конструкция барабана. На рис. 2 представлены структурные модели барабана: граф механических связей (рис. 2, а) и гиперграф (рис. 2, б).

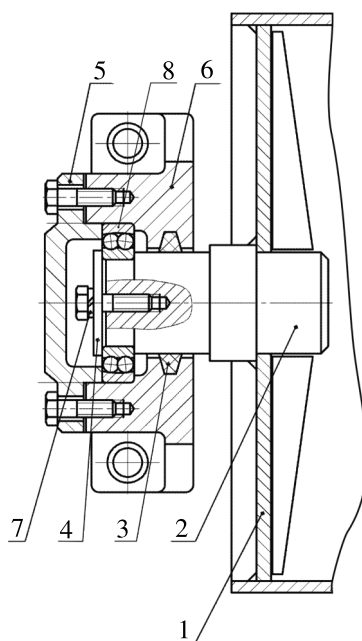


Рис. 1. Конструкция барабана. Номера на рисунке обозначают детали

При сборке технических систем в современном дискретном производстве в подавляющем большинстве случаев используются когерентные секвенциальные сборочные операции [Ghandi, Masehian, 2015].

Определение 1. Сборочная операция называется когерентной, если она реализует механическую связь (соединение или сопряжение) между элементами конструкции.

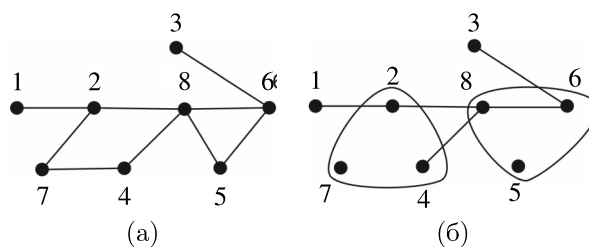


Рис. 2. Структурные модели барабана: граф связей (а) и гиперграф H_d (б). Вершины графа и гиперграфа соответствуют деталям барабана (рис. 1)

Определение 2. Сборочная операция называется секвенциальной, если она выполняется при помощи двух рабочих органов.

Важно отметить, что рабочим органом считается приспособление или монтажный стол, на котором закреплен один из объектов сборки.

Естественным математическим описанием когерентной сборочной операции является стягивание ребер графовой или гиперграфовой моделей структуры. Пусть узел барабана (рис. 1) монтируется в последовательности 2, 1, 8, (6 + 3), 4, 7, 5. Этому плану сборки соответствует последовательность стягиваний, показанная на рис. 3.

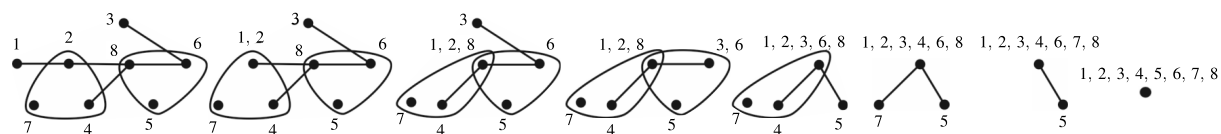


Рис. 3. Последовательность стягиваний гиперграфа в точку. Каждый следующий гиперграф получается из предыдущего стягиванием ребра второй степени. Исходный гиперграф описывает все механические связи, которые надо реализовать при сборке. Одновершинный гиперграф представляет собранное изделие, у которого все связи осуществлены

Легко видеть, что для этого математического описания последовательности сборки выполняется требование когерентности и секвенциальности операций, поскольку на каждом шаге стягивается ребро второй степени. Результатом стягиваний является одновершинный гиперграф без петель (точка), который означает, что все механические связи изделия осуществлены.

Попытка получить корректное математическое описание когерентной и секвенциальной последовательности в графовых терминах ведет к противоречию. Очевидно, что только деревья могут быть стянуты в точку. Стягивание связных графов с циклами порождает одновершинный граф с k петлями, где k равно цикломатическому числу графа. Так, граф, показанный на рис. 2, а, стягивается в точку с двумя петлями.

Кроме того, часто монтаж деталей происходит с одновременной реализацией нескольких (двух, трех и более) механических связей между деталями. Например, установка детали 7 может быть выполнена только на собранную пару деталей 2 и 4 с одновременной реализацией механических сопряжений между ними. Граф связей не может корректно описать подобные проектные ситуации.

Гиперграфовая модель изделия более сложная, чем граф механических связей. В отличие от графа связей ее невозможно получить непосредственно по трехмерной геометрической модели изделия. Для этого требуется выполнить экспертный анализ совокупности соединений и сопряжений изделия.

В современной инженерной практике широко используется так называемый принцип прямого базирования (конструкторского близкодействия). Это значит, что координация при сборке

достигается непосредственными контактами деталей, входящих в минимальный геометрически определенный фрагмент изделия. В графе связей такие фрагменты описываются кликами различной мощности. В примере на рис. 2, *a* это «треугольник» на вершинах 5, 6, 8. Фрагмент конструкции, где нарушается принцип конструкторского близкодействия, состоит из деталей 2, 4, 7. Их взаимная координация достигается опосредованно при помощи детали 8. Опосредованная координация, допустимая при небольшом числе деталей-посредников, с увеличением их числа быстро становится нетехнологичной, а потом и невозможной.

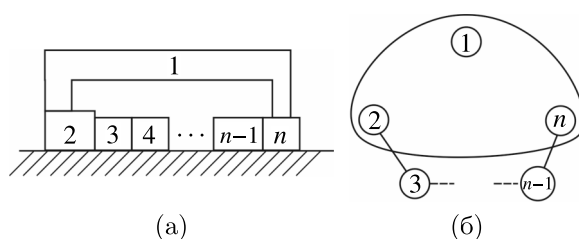


Рис. 4. Пример конструкции с косвенным базированием. Координация деталей 1, 2 и n достигается опосредованно при помощи цепочки деталей с номерами 3, ..., $n - 1$ (а); гиперграф конструкции (б)

Пример простой конструкции, иллюстрирующей это утверждение, показан на рис. 4, *a*. На рис. 4, *б* изображен гиперграф, описывающий сборочную структуру данной конструкции. Если n достаточно велико, то накопление погрешностей изготовления и установки деталей может привести к потере контакта одной из опор детали 1.

Итак, координированные фрагменты конструкции, полученные прямым базированием, описываются кликами графа связей. В случае косвенного базирования структура координированного фрагмента представляется в виде цикла графа связей (чаще всего) либо некоторым связным подграфом. Проблема поиска клик в неориентированном графе имеет простое алгоритмическое решение. Для этого, например, можно применить алгоритм Брона–Кербоша. Идентификации структур, описывающих фрагменты с косвенным базированием, в общем случае алгоритмически не решается. Для этого требуется провести экспертный анализ трехмерной геометрической модели изделия и графа механических связей. В результате такого анализа будет синтезирована гиперграфовая модель структуры изделия [Bozhko, 2019].

Гиперграфовая модель структуры оказалась весьма содержательной. С ее помощью удалось формализовать важнейшие проектные решения сборочного передела: последовательность сборки, последовательность полной или частичной разборки, декомпозиция изделия на сборочные единицы, синтез сборочных размерных цепей и др. [Bozhko, 2019].

Итак, гиперграфовая модель структуры позволяет преодолеть противоречия и неоднозначность графовой модели, отмеченные выше. Стягивание ребер второго гиперграфа служит математическим описанием когерентных и секвенциальных сборочных операций. Последовательность нормальных стягиваний, которая преобразует гиперграф в точку, является математической моделью плана сборки изделия.

3. Стягиваемость гиперграфов. Необходимые и достаточные условия

Приведем точные определения.

Пусть $\{x_1, x_2, \dots, x_{i_r}\}$ — множество вершин, инцидентных некоторому ребру $r \in R$ гиперграфа $H = (X, R)$. Степень ребра r — это мощность множества $\{x_1, x_2, \dots, x_{i_r}\}$.

Определение 3. Операция отождествления вершин множества $r = \{x_1, x_2, \dots, x_{i_r}\}$ и удаления r называется стягиванием ребра.

Определение 4. Стягивание ребра второй степени называется нормальным.

Определение 5. Гиперграф $H = (X, R)$ называется s -гиперграфом, если существует последовательность нормальных стягиваний, которая преобразует его в точку (одновершинный гиперграф без петель).

В [Bozhko, 2019] доказана следующая теорема о необходимых условиях стягиваемости.

Теорема 1. Пусть гиперграф $H = (X, R)$ преобразуется в точку при помощи последовательности нормальных стягиваний. Тогда

- 1) $H = (X, R)$ является связным;
- 2) во множестве R есть хотя бы одно ребро второй степени;
- 3) выполняется равенство $|X| = |R| + 1$ (линейное соотношение).

Приведем содержательные аргументы, подтверждающие справедливость утверждений этой важной теоремы. Успешное завершение процедуры стягиваний свидетельствует о справедливости первого условия. Если в гиперграфе нет ни одного ребра второй степени, то процесс стягиваний не может стартовать. Ребра гиперграфа описывают совокупность геометрических элементов изделия, которые доставляют детали требуемую геометрическую координацию. В инженерных публикациях такие совокупности называются полными конструкторскими базами. Деталь, которая монтируется первой, базируется в некотором внешнем приспособлении. Она не нуждается во внутренних базах. Для всех остальных деталей требуется ровно один комплект баз. Это свидетельствует о справедливости линейного соотношения.

Приведенные необходимые условия не являются достаточными. На рис. 5, а приведен пример гиперграфа, который удовлетворяет всем трем условиям теоремы, но не стягивается в точку. Реализация всех нормальных стягиваний в гиперграфе приводит к нестягиваемой фигуре, показанной на рис. 5, б.

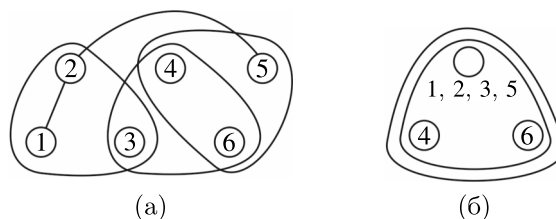


Рис. 5. Гиперграф, для которого выполняются условия теоремы 1 (а); результат нормальных стягиваний гиперграфа (б)

Это не единственный пример такого рода. Число неизоморфных нестягиваемых гиперграфов, для которых выполняется теорема 1, очень быстро растет в зависимости от количества вершин гиперграфа.

Поиск достаточных условий стягиваемости — это не только важная и интересная теоретическая задача. Она имеет и большое прикладное значение. Современные САД- и СААР-системы не располагают специальными средствами для анализа механических структур. Это проектное

решение формируется во многом автоматически в процессе создания трехмерной геометрической модели изделия, при синтезе размерной схемы и др. В результате может получиться структура изделия, которая описывается нестягиваемым гиперграфом. Это тяжелая проектная ошибка, которая влечет за собой невозможность сборки по структурным основаниям.

Подграф $G = (Y, P)$ гиперграфа $H = (X, R)$, $Y \subseteq X$, $P \subseteq R$, называется порожденным подграфом, если в подмножество P входят все ребра, которые инцидентны вершинам из Y в гиперграфе H , и только они. Если задан родительский гиперграф, то для определения порожденного подграфа достаточно указать порождающее подмножество вершин. Такой подграф будем обозначать как $[Y]$.

Теорема 2. Для любого связного порожденного подграфа $G = (Y, P)$ s -гиперграфа $H = (X, R)$ справедливо неравенство $|Y| - |P| \geq 1$.

Доказательство. Стягивание в точку гиперграфа $H = (X, R)$ означает, что стянуты и все его части, в том числе и подграф $G = (Y, P)$. Рассмотрим два возможных варианта стягивания подграфа G .

Пусть подграф $G = (Y, P)$ стягивается только за счет собственных ребер из множества P . Тогда G является s -подграфом, и, по теореме 1, для него справедливо $|Y| - |P| = 1$. То есть нестрогое неравенство выполняется как равенство.

Рассмотрим второй случай, когда невозможно выполнить стягивание подграфа P только за счет его внутренних ребер. Простой пример такого подграфа приведен на рис. 6. Подграф, порожденный множеством вершин $\{1, 2, 3, 4\}$, не может быть стянут только за счет собственных ребер.

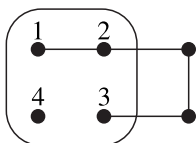


Рис. 6. Подграф, порожденный множеством вершин $\{1, 2, 3, 4\}$, не может быть стянут при помощи вершин из данного множества

Предположим, что для $G = (Y, P)$ выполняется обратное соотношение, то есть $|P| - |Y| = k$, $k \geq 0$. Выполним в G все возможные нормальные стягивания. Обозначим $G_l = (X_l, P_l)$, который получится после этих преобразований. Отметим важное свойство любого нормального стягивания. После этой операции число ребер и число вершин гиперграфа уменьшаются ровно на единицу. Поэтому для $G_l = (X_l, P_l)$ выполняется неравенство $|P_l| - |X_l| = k$.

Дальнейшее стягивание подграфа в точку реализуется за счет внешних ребер подграфа $G_l = (X_l, P_l)$ (рис. 7). В этом случае отождествляются вершины из множества X_l , но не используются ребра из множества P_l .

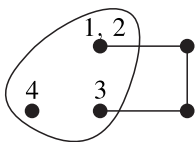


Рис. 7. Стягивание подграфа, порожденного вершинами $\{1, 2, 3, 4\}$, может быть выполнено только за счет внешних ребер

Это значит, что после полного стягивания гиперграф H будет иметь по крайней мере $|P_l| = k + 1$, $k \geq 0$, петель. Это противоречит исходному предположению о том, что $H = (X, R)$ является s -гиперграфом. Теорема доказана. \square

Теорема 3. Пусть стягиваемый гиперграф $H = (X, R)$. Тогда любой связный подграф $G = (Y, P)$, $Y \subseteq X$, $P \subseteq R$, гиперграфа H , порожденный своим множеством вершин $G = [Y]$ и удовлетворяющий условию 3 теоремы 1, также является стягиваемым.

Доказательство проведем индукцией по числу вершин $n = |Y|$ подграфа G . Если $n = 2$, то подграф G представляет собой ребро степени два. Этот подграф стягивается тривиально.

Пусть утверждение теоремы справедливо для всех k -вершинных $2 \leq k \leq n - 1$ подграфов гиперграфа $H = (X, R)$.

Рассмотрим связный порожденный подграф $G = (Y, P)$, состоящий из n вершин. Пусть для этого подграфа выполняется условие 3 теоремы 2. Пусть $\bar{G} = (\bar{Y}, \bar{P})$ — это минимальный стягиваемый подграф гиперграфа H , который включает в себя G , $\bar{G} \supseteq G$. Отметим, что множество s -подграфов гиперграфа $H = (X, R)$ заведомо не пусто, поскольку в него входит гиперграф H . Это значит, что существует и минимальный подграф с такими свойствами.

Рассмотрим последнее стягивание подграфа $\bar{G} = (\bar{Y}, \bar{P})$. Эта операция заключается в отождествлении двух вершин — s_1 и s_2 , соединенных ребром r степени два. Вершины s_1 и s_2 получены стягиванием вершин подграфов G и \bar{G} . Представим ребро r как множество инцидентных вершин $X(r)$. Рассмотрим все варианты принадлежности множества $X(r)$. Возможны три случая:

$$X(r) \subseteq Y,$$

$$X(r) \subseteq \bar{Y} \setminus Y,$$

$$X(r) \not\subseteq Y, X(r) \cap Y \neq \emptyset.$$

Рассмотрим второй вариант, когда ребро r инцидентно вершинам из $X(r) \subseteq \bar{Y} \setminus Y$. Если $Y \subseteq s_1(s_2)$, то нарушается условие минимальности \bar{Y} . Действительно, вершина $s_1(s_2)$, которой принадлежат все вершины Y , есть результат стягивания подграфа, порожденного в $H = (X, R)$ всеми вершинами, составляющими $s_1(s_2)$. Этот подграф содержит $G = (Y, P)$ и имеет меньше вершин, чем $\bar{G} = (\bar{Y}, \bar{P})$. Если $Y \subseteq s_1 \cup s_2$, то нарушается условие связности графа $G = (Y, P)$.

Рассмотрим третий вариант, когда вершины $X(r)$ принадлежат подграфам G и \bar{G} . Если $Y \subseteq s_1$ либо $Y \subseteq s_2$, то подграф \bar{G} не является минимальным. Пусть вершины из множества Y стянуты в вершины s_1 и s_2 . Тогда подграф $G = (Y, P)$ делится на две части, которые связаны ребром, инцидентным вершинам из множества $\bar{Y} \setminus Y$. В этом случае связность и порожденность подграфа $G = (Y, P)$ не могут выполняться одновременно.

Рассмотрим первый вариант. Здесь все вершины из $X(r)$ принадлежат подграфу Y . В этом случае ребро r является шарниром в $G = (Y, P)$. После удаления шарнира подграф G распадется на m подграфов $G_i = (Y_i, P_i)$, $i = \overline{1, m}$, $m \geq 2$. Число вершин $n_i = |Y_i|$ в каждом подграфе G_i строго меньше $n = |X|$, и все эти подграфы являются порожденными, то есть $G_i = [Y_i]$. По теореме 2, выполняется соотношение $|Y_i| - |P_i| \geq 1$, $i = \overline{1, m}$. Сложим почленно все эти неравенства. Получим $\sum_{i=1}^m |Y_i| - \sum_{i=1}^m |P_i| \geq m$. Но $\sum_{i=1}^m |Y_i| = |Y|$, поэтому $|Y| - \sum_{i=1}^m |P_i| \geq m$. Поскольку $\sum_{i=1}^m |P_i| + 1 = |P|$, то имеем $|Y| - |P| \geq m - 1$. Но подграф $G = (Y, P)$ порожденный. По теореме 2, для него справедливо $|Y| - |P| \geq 1$. Отсюда $m = 2$. То есть ребро r соединяет два подграфа — G_1 и G_2 , каждый из которых является связным и порожденным подграфом гиперграфа $H = (X, R)$. По индуктивному предположению, G_1 и G_2 стягиваются. Стянем каждый из них в точку. Последняя операция состоит в стягивании ребра r степени два. Это значит, что стягивается и подграф $G = (Y, P)$. Теорема доказана. \square

4. Решеточная модель изделия

Во многих проектных ситуациях представляют интерес различные фрагменты изделия, которые собираются независимо. Таковыми являются сборочные единицы, узлы, состояния изделия в процессе сборки и др. Механическая структура подобных конструктивных фрагментов описывается s -подграфами s -гиперграфа. Оказалось, что упорядоченное по включению множество всех s -подграфов представляет собой решетку — алгебраическую структуру с двумя операциями. Введем все необходимые определения.

Пусть (P, \leq) — упорядоченное множество.

Определение 6. Оператором замыкания на (P, \leq) называется отображение $\varphi: P \rightarrow P$, для которого $\forall a, b \in P$ выполняются следующие условия:

$$a \leq \varphi(a),$$

$$a \leq b \Rightarrow \varphi(a) \leq \varphi(b) \text{ — монотонность,}$$

$$\varphi(\varphi(a)) = \varphi(a) \text{ — идемпотентность [Roman, 2008].}$$

Определение 7. Элемент $a \in P$ называется замкнутым (φ -замкнутым), если $\varphi(a) = a$.

Пусть X — произвольное множество, а $B(X)$ — его булеан. Пусть на $B(X)$ задан оператор замыкания $\varphi: B(X) \rightarrow B(X)$. В [Roman, 2008] доказана следующая лемма.

Лемма. Подмножество всех φ -замкнутых элементов булеана $B(X)$ является решеткой, в которой операции решеточного пересечения и объединения задаются следующими соотношениями: $A \wedge B = A \cap B$, $A \vee B = \varphi(A \cup B)$.

Пусть заданы s -гиперграф $H = (X, R)$ и некоторый его s -подграф $G = (Y, P)$, $G \subseteq H$.

Определение 8. Множество вершин Y s -подграфа $G = (Y, P)$ будем называть s -множеством. Пустое множество \emptyset является s -множеством (по определению).

Зададим на булеане $B(X)$ множества вершин s -гиперграфа $H = (X, R)$ отображение $\lambda: B(X) \rightarrow B(X)$, которое произвольному набору вершин $A \subseteq X$ ставит в соответствие минимальное s -множество $\lambda(A)$, включающее A , $\lambda(A) \supseteq A$.

Легко проверить, что для $\lambda: B(X) \rightarrow B(X)$ выполняются все условия из определения 4. То есть это отображение является оператором замыкания.

Теорема 4. Множество всех λ -замкнутых подмножеств (s -подмножеств) множества вершин X s -гиперграфа $H = (X, R)$ является решеткой. В ней решеточные операции заданы соотношениями $\forall A, B \subseteq X$ $A \wedge B = A \cap B$, $A \cup B = \lambda(A \cup B)$.

Доказательство немедленно следует из леммы.

Будем обозначать решетки этого вида как $(F(H), \leq)$. В $(F(H), \leq)$ решеточное пересечение двух s -множеств совпадает с теоретико-множественным пересечением и всегда является s -множеством. Решеточное объединение s -множеств представляет собой минимальное по составу s -множество, которое включает в себя все операнды.

На рис. 8 изображена решетка $(F(H_d), \leq)$ всех s -подграфов гиперграфа H_d , показанного на рис. 2, б.

Решетка вида $(F(H), \leq)$ — очень содержательная математическая модель. Она включает в себя все части изделия, которые можно собрать независимо. Любая максимальная цепь решетки ($(0, 1)$ -цепь), соединяющая наименьший элемент (ноль решетки) с наибольшим элементом (единица решетки), описывает последовательность сборки изделия, каждая операция которой является когерентной и секвенциальной. Инвертированные цепи ($(1, 0)$ -цепи) служат моделями полной разборки изделия. $(0, A)$ -цепи, где $A \in F(H)$, представляют собой допустимые последовательности сборки фрагментов изделия (узлов, сборочных единиц и пр.). $(1, A)$ -цепи — это

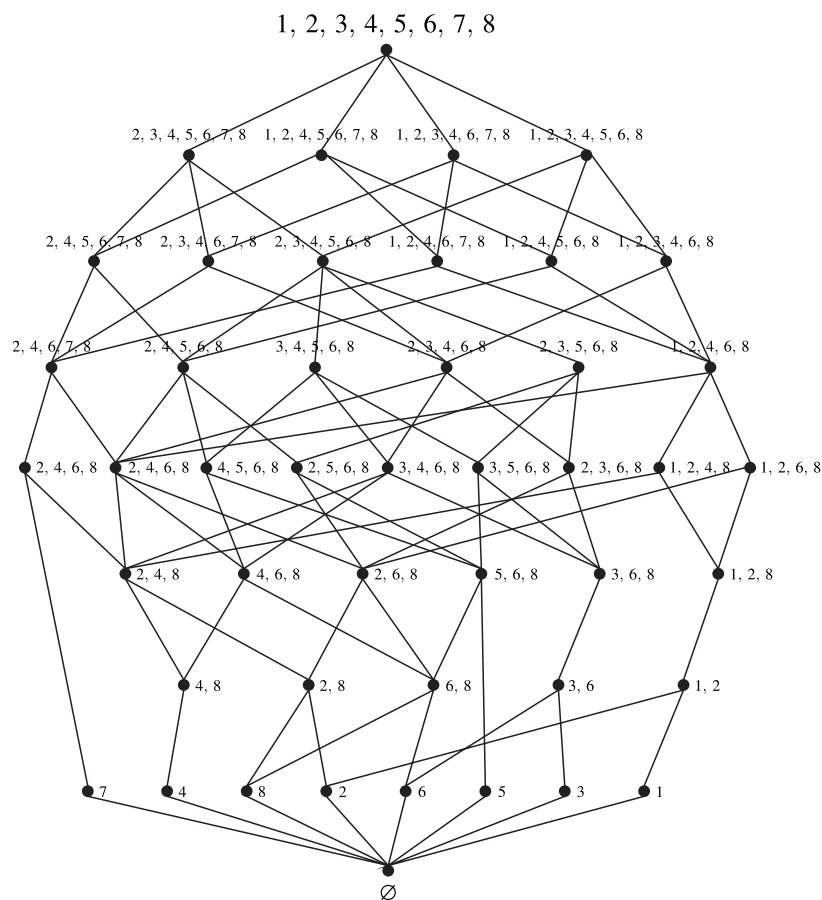


Рис. 8. Решетка $(F(H_d), \leq)$. Вершины решетки означают фрагменты конструкции, которые описываются s -подграфами s -гиперграфа H_d (рис. 2, б). Ребра представляют отношения теоретико-множественного включения. Наименьший элемент решетки — пустое множество. Наибольший элемент — изделие

модели планов частичной разборки изделия и пр. Решетка $(F(H), \leq)$ содержит все возможные декомпозиции изделия на сборочные единицы [Bozhko, 2021].

В [Bozhko, 2023] показано, что решетку $(F(H), \leq)$ можно использовать для минимизации числа проверок при моделировании геометрических препятствий при сборке.

Теорема 3 дает достаточные условия стягиваемости подграфов s -гиперграфа, которые не требуют большого времени и вычислительных ресурсов. Стягиваемость носителя (гиперграфа) можно установить прямой проверкой. Легко показать, что результат проверки не зависит от последовательности обработки ребер гиперграфа. Пусть гиперграф стягивается, тогда, по теореме 3, для проверки стягиваемости подграфов достаточно проверить их порожденность, связность и выполнение линейного ограничения.

Итак, доказанные теоремы дают строгую основу для разработки эффективной вычислительной процедуры синтеза всех s -подграфов s -гиперграфа. На основе этой информации можно построить решеточную модель изделия, которая служит универсальной порождающей средой для генерации различных проектных решений сборочного производства.

5. Заключение

Автоматизированное проектирование процессов сборки и разборки сложных систем — это важное и актуальное направление современной информационной технологии. Последовательность сборки изделия в значительной степени зависит от механической структуры машины или

прибора. В современных исследованиях по СААР для описания механической структуры чаще всего используют граф связей и различные модификации данной модели. Граф связей — это бинарная математическая модель. Она не может корректно представить совокупности механических связей, одновременная реализация которых доставляет монтируемой детали или сборочной единице пространственную координацию в составе изделия. В работе предложена гиперграфовая модель механической структуры изделия, свободная от данного недостатка. Данная модель позволяет корректно описать сборочные планы, состоящие из когерентных и секвенциальных операций. Гиперграф, который можно преобразовать в точку при помощи некоторой последовательности нормальных стягиваний ребер, называется s -гиперграфом. Приведена важная теорема о необходимых условиях стягиваемости. Доказаны две теоремы, которые дают достаточные условия стягиваемости для одного важного частного случая. Доказанные теоремы служат теоретической основой для разработки эффективной вычислительной процедуры синтеза всех s -подграфов s -гиперграфа. Любой фрагмент изделия, который может быть собран независимо, представляется в виде s -подграфа. Прежде всего это сборочные единицы различного уровня иерархии узлы. Упорядоченная по включению совокупность всех s -подграфов представляет собой решетку. Решетка — очень содержательная структурная модель изделия. Ее можно использовать для генерации многочисленных проектных решений сборочного передела: последовательностей сборки/разборки изделия и любых его сборочных единиц, декомпозиции изделия на сборочные единицы и пр. Кроме того, решеточная модель позволяет анализировать геометрические препятствия алгебраическими методами.

Список литературы (References)

- Bourjault A.* Methodology of assembly automation: a new approach // Robotics and Factories of the Future'87. — 1988. — P. 37–45.
- Bozhko A.* Analysis of geometric obstacles in the assembly of complex products: a lattice-theoretic approach // 2023 International Conference on Industrial Engineering, Applications and Manufacturing (ICIEAM). — 2023. — P. 987–992.
- Bozhko A.* Modeling geometric obstacles in the assembly of complex products // Proceedings of the 6th International Conference on Industrial Engineering (ICIE 2020). — Lecture Notes in Mechanical Engineering. — Springer, Cham.: ICIE, 2021.
- Bozhko A. N.* Hypergraph model for assembly sequence problem // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. IOP Publishing. — 2019. — Vol. 560, No. 1. — P. 012010.
- De Fazio T., Whitney D.* Simplified generation of all mechanical assembly sequences // IEEE Journal on Robotics and Automation. — 1987. — Vol. 3, No. 6. — P. 640–658.
- De Mello L. S. H., Sanderson A. C.* A basic algorithm for the generation of mechanical assembly sequences // Computer-Aided Mechanical Assembly Planning. — 1991a. — P. 163–190.
- De Mello L. S. H., Sanderson A. C.* Representations of mechanical assembly sequences // IEEE transactions on Robotics and Automation. — 1991b. — Vol. 7, No. 2. — P. 211–227.
- Erdos G., Kis T., Xirouchakis P.* Modelling and evaluating product end-of-life options // International Journal of Production Research. — 2001. — Vol. 39, No. 6. — P. 1203–1220.
- Ghandi S., Masehian E.* Review and taxonomies of assembly and disassembly path planning problems and approaches // Computer-Aided Design. — 2015. — Vol. 67. — P. 58–86.
- Gu P., Yan X.* CAD-directed automatic assembly sequence planning // International Journal of Production Research. — 1995. — Vol. 33, No. 11. — P. 3069–3100.
- Ko H., Lee K.* Automatic assembling procedure generation from mating conditions // Computer-Aided Design. — 1987. — Vol. 19, No. 1. — P. 3–10.
- Lozano-Perez T., Wilson R. H.* Assembly sequencing for arbitrary motions // Proceedings IEEE International Conference on Robotics and Automation. — 1993. — P. 527–532.

- Marri H. B., Gunasekaran A., Grieve R. J.* Computer-aided process planning: a state of art // The International Journal of Advanced Manufacturing Technology. — 1998. — Vol. 14. — P. 261–268.
- O'shea B., Kaebernick H., Grewal S. S.* Using a cluster graph representation of products for application in the disassembly planning process // Concurrent Engineering. — 2000. — Vol. 8, No. 3. — P. 158–170.
- Pan C., Smith S. S., Smith G. C.* Automatic assembly sequence planning from STEP CAD files // International Journal of Computer Integrated Manufacturing. — 2006. — Vol. 19, No. 8. — P. 775–783.
- Park H. S., Park J. W., Park M. W., Kim J. K.* Development of automatic assembly sequence generating system based on the new type of parts liaison graph // IFIP International Conference on Product Lifecycle Management. — 2013. — P. 540–549.
- Roman S.* Lattices and ordered sets. — Springer Science & Business Media, 2008.
- Romney B., Godard C., Goldwasser M., Ramkumar G.* An efficient system for geometric assembly sequence generation and evaluation // International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference. — 1995. — Vol. 17018. — P. 699–712.
- Sambhoos K., Koc B., Nagi R.* Extracting assembly mating graphs for assembly variant design // Journal of computing and information science in engineering. — 2009. — Vol. 9, No. 3.
- Santochi M., Dini G., Failli F.* Computer aided disassembly planning: state of the art and perspectives // CIRP Annals. — 2002. — Vol. 51, No. 2. — P. 507–529.
- Su Q.* A hierarchical approach on assembly sequence planning and optimal sequences analyzing // Robotics and Computer-Integrated Manufacturing. — 2009. — Vol. 25, No. 1. — P. 224–234.
- Vigano R., Gómez G. O.* Assembly planning with automated retrieval of assembly sequences from CAD model information // Assembly Automation. — 2012.
- Wilson R. H., Latombe J. C.* Geometric reasoning about mechanical assembly // Artificial Intelligence. — 1994. — Vol. 71, No. 2. — P. 371–396.
- Xing Y., Chen G., Lai X., Jin S., Zhou J.* Assembly sequence planning of automobile body components based on liaison graph // Assembly automation. — 2007. — Vol. 27, No. 2. — P. 157–164.
- Zhang J., Xu Z., Li Y., Jiang S., Wei N.* Generic face adjacency graph for automatic common design structure discovery in assembly models // Computer-Aided Design. — 2013. — Vol. 45, No. 8–9. — P. 1138–1151.