

УДК: 532.5

## Численное моделирование обратного влияния полимерной примеси на колмогоровское течение

В. В. Денисенко<sup>1,a</sup>, С. В. Фортова<sup>1</sup>, В. В. Лебедев<sup>2</sup>, И. В. Колоколов<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Институт автоматизации проектирования РАН,  
Россия, 123056, г. Москва, ул. 2-я Брестская, д. 19, стр. 18

<sup>2</sup>Институт теоретической физики имени Л. Д. Ландау РАН,  
Россия, 142432, Московская область, г. Черноголовка, пр-т Академика Семёнова, д. 1а

E-mail: <sup>a</sup> ned13@rambler.ru

Получено 19.07.2024, после доработки — 16.08.2024.

Принято к публикации 03.09.2024.

Предложен численный метод, аппроксимирующий уравнения динамики слабосжимаемого вязкого течения при наличии полимерной составляющей потока. Исследуется поведение течения под воздействием статической внешней периодической силы в периодической квадратной ячейке. Методика основывается на гибридном подходе. Гидродинамика течения описывается системой уравнений Навье–Стокса и численно аппроксимируется линейризованным методом Годунова. Полимерное поле описывается системой уравнений для вектора растяжений полимерных молекул  $\mathbf{R}$ , которая численно аппроксимируется методом Курганова–Тедмора. Выбор модельных соотношений при разработке численной методики и подбор параметров моделирования позволили на качественном уровне смоделировать и исследовать режим эластической турбулентности при низких числах Рейнольдса  $Re \sim 10^{-1}$ . Уравнения динамики течения полимерного раствора отличаются от уравнений динамики ньютоновской жидкости наличием в правой части членов, описывающих силы, действующие со стороны полимерной компоненты. Коэффициент пропорциональности  $A$  при данных членах характеризует степень обратного влияния количества полимеров на поток. В статье подробно исследуется влияние этого коэффициента на структуру и характеристики потока. Показано, что с его ростом течение становится более хаотическим. Построены энергетические спектры полученных течений и спектры полей растяжения полимеров для различных величин коэффициента  $A$ . В спектрах прослеживается инерциальный поддиапазон энергетического каскада для скорости течения с показателем  $k \sim -4$ , для каскада растяжений полимерных молекул с показателем  $-1,6$ .

Ключевые слова: численное моделирование, эластическая турбулентность, гидродинамическая неустойчивость

Работа В. В. Денисенко и С. В. Фортовой выполнена в рамках Госзадания ИАП РАН, № 124022400174-3, работа В. В. Лебедева — при поддержке Российского научного фонда, грант № 23-72-30006, работа И. В. Колоколова — в рамках Госзадания ИТФ РАН, № 075-15-2019-1893.

© 2024 Владимир Викторович Денисенко, Светлана Владимировна Фортова, Владимир Валентинович Лебедев, Игорь Валентинович Колоколов

Статья доступна по лицензии Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Unported License.  
Чтобы получить текст лицензии, посетите веб-сайт <http://creativecommons.org/licenses/by-nd/3.0/>  
или отправьте письмо в Creative Commons, PO Box 1866, Mountain View, CA 94042, USA.

UDC: 532.5

## Numerical simulation of the backward influence of a polymer additive on the Kolmogorov flow

V. V. Denisenko<sup>1,a</sup>, S. V. Fortova<sup>1</sup>, V. V. Lebedev<sup>2</sup>, I. V. Kolokolov<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Institute for Computer Aided Design of the RAS,  
19/18 2nd Brestskaya st., Moscow, 123056, Russia

<sup>2</sup>L. D. Landau Institute for Theoretical Physics of the RAS,  
1A Akademika Semenova av., Chernogolovka, Moscow region, 142432, Russia

E-mail: <sup>a</sup> ned13@rambler.ru

*Received 19.07.2024, after completion – 16.08.2024.  
Accepted for publication 03.09.2024.*

A numerical method is proposed that approximates the equations of the dynamics of a weakly compressible viscous flow in the presence of a polymer component of the flow. The behavior of the flow under the influence of a static external periodic force in a periodic square cell is investigated. The methodology is based on a hybrid approach. The hydrodynamics of the flow is described by a system of Navier–Stokes equations and is numerically approximated by the linearized Godunov method. The polymer field is described by a system of equations for the vector of stretching of polymer molecules  $\mathbf{R}$ , which is numerically approximated by the Kurganov–Tadmor method. The choice of model relationships in the development of a numerical methodology and the selection of modeling parameters made it possible to qualitatively model and study the regime of elastic turbulence at low Reynolds  $Re \sim 10^{-1}$ . The polymer solution flow dynamics equations differ from the Newtonian fluid dynamics equations by the presence on the right side of the terms describing the forces acting on the polymer component part. The proportionality coefficient  $A$  for these terms characterizes the backward influence degree of the polymers number on the flow. The article examines in detail how the flow and its characteristics change depending on the given coefficient. It is shown that with its growth, the flow becomes more chaotic. The flow energy spectra and the spectra of the polymers stretching field are constructed for different values of  $A$ . In the spectra, an inertial sub-range of the energy cascade is traced for the flow velocity with an indicator  $k \sim -4$ , for the cascade of polymer molecules stretches with an indicator  $-1.6$ .

Keywords: numerical modeling, elastic turbulence, hydrodynamic instability

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2024, vol. 16, no. 5, pp. 1093–1105 (Russian).

The work of V. V. Denisenko and S. V. Fortova was performed within the framework of the ICAD RAS state assignment, No. 124022400174-3, V. V. Lebedev work with the support of the Russian Science Foundation, grant No. 23-72-30006, I. V. Kolokolov work within the framework of the ITP RAS State Assignment, No. 075-15-2019-1893.

## 1. Введение

Наличие полимерных молекул в среде значительно меняет динамику ее течения. Лабораторные эксперименты показывают, что в ламинарных гидродинамических потоках при малых числах Рейнольдса ( $Re \ll 1$ ) может возникать новая форма хаотического движения, получившая название «эластическая турбулентность». Для ньютоновского потока жидкости переход к турбулентности характеризуется числом Рейнольдса ( $Re$ ). Чем выше  $Re$ , тем более неустойчивым становится поток, что приводит к возникновению и развитию турбулентного режима течения. Однако в жидкости, в которой присутствуют полимерные молекулы, возникает так называемый вязкоупругий эффект, обусловленный воздействием полимерных молекул на гидродинамический поток. Это влияние на поток со стороны полимерной примеси описывается безразмерным параметром — числом Вайсенберга  $Wi = \frac{U}{\gamma_0 L}$ , который равен произведению характерного градиента скорости потока жидкости  $\frac{U}{L}$  на время релаксации  $\frac{1}{\gamma_0}$  полимерной молекулы к своему равновесному состоянию. Как показывают физические эксперименты, возникновение и развитие неустойчивости течения при малых числах  $Re \ll 1$  происходят именно благодаря наличию этих упругих сил и характеризуется числами  $Wi \gg 1$  [Steinberg, 2021; Shahmardi et al., 2019; Belan, Chernykh, Lebedev, 2018; Hong-Na et al., 2013].

Несмотря на то что феномен эластической турбулентности был открыт всего два десятилетия назад, его применение уже стало возможным в различных областях, таких как эффективное перемешивание вязких жидкостей, в частности в криволинейных микроканалах при  $Re \ll 1$  [Groisman, Steinberg, 2001; Burghelea et al., 2004; Gan, Lam, Nguyen, 2006] и, соответственно, для усиления теплопередачи в микроканалах [Traore, Castelain, Burghelea, 2015; Whalley et al., 2015; Abed et al., 2016; Li et al., 2017]. Кроме того, наблюдались эффективная эмульгация масляных капель и разрушающий капиллярный эффект [Slutsky, Steinberg, 2005; Poole et al., 2012], но прежде всего была установлена значительная интенсификация добычи сырой нефти по сравнению с традиционным химическим заводнением [Clarke et al., 2015; Howe, Clarke, Giernalczyk, 2015; Mitchell et al., 2016]. Как и в случае гидродинамической турбулентности, свойства эластической турбулентности существенно зависят от граничных условий. В данной работе мы не будем касаться задачи с твердыми стенками, ограничившись периодическим двумерным случаем.

Численное моделирование феномена эластической турбулентности — задача далеко не тривиальная. Для описания полимерной компоненты в основном используются упрощенные модели полимеров, такие как модель Oldroyd-B [Oldroyd, 1950] и модель FENE-P [Peterlin, 1961]. Основной проблемой при моделировании эластической турбулентности с использованием любой из этих моделей является возникновение численной неустойчивости [Alves, Oliveira, Pinho, 2021]. Чрезмерное растяжение полимерных молекул, возникающее при больших значениях числа Вайсенберга  $Wi$ , характерное для эластической турбулентности, приводит к большим градиентам напряжений в полимерном поле, которые являются причиной возникновения неустойчивости численного счета. Эти вычислительные проблемы могут быть частично устранены благодаря использованию схем дискретизации с высоким разрешением [Kurganov, Tadmor, 2000; Vaithianathan et al., 2006], выбору ограничений к моделям полимеров [Vaithianathan, Collins, 2003] и добавлению коэффициента искусственной диффузии в определяющие уравнения на полимерную компоненту [Thomases, Shelley, Thiffeault, 2011; Gupta, Vincenzi, 2019].

Поскольку режим эластической турбулентности обусловлен упругими неустойчивостями, величина коэффициента искусственной диффузии может существенно повлиять на численное решение, что в свою очередь может привести к неправильной физической интерпретации режима течения [Gupta, Vincenzi, 2019]. В некоторых случаях проблемы с численной устойчивостью могут быть устранены за счет глобального или локального использования коэффициента искусственной диффузии [Dubief et al., 2005].

Таким образом, на данном этапе исследования возникает задача разработки численной модели, которая могла бы на качественном уровне демонстрировать эффекты эластической турбулентности. Здесь необходимо подчеркнуть, что мы не ставим задачу получения результатов, которые могли бы быть положены в основу описания реальных экспериментов по эластической турбулентности. Такая постановка определила выбор модельных соотношений при разработке численной методики, а также подбор параметров моделирования. Это позволяет обойти описанные выше трудности, возникающие при численном моделировании. В работе использована численная методика второго порядка точности [Годунов и др., 2020; Kurganov, Tadmor, 2000], сконструированная для прямого численного моделирования динамики слабосжимаемых вязких потоков при наличии структурных компонент в них. С помощью данной методики численно изучено течение модельной среды при  $Re \sim 10^{-1}$  при наличии внешней периодической силы. Получена неустойчивость такого течения и исследовано влияние полимеров на поток и его энергетические характеристики.

## 2. Постановка задачи. Модельные уравнения

Уравнения динамики течения полимерного раствора отличаются от уравнений динамики ньютоновской жидкости наличием в правой части членов, описывающих силы, действующие со стороны полимерной компоненты. Коэффициент пропорциональности  $A$  при данных членах характеризует степень обратного влияния полимеров на поток.

Рассмотрим полимерную составляющую потока как структурную компоненту к гидродинамическому течению в виде деформируемых полимерных молекул. Деформация характеризуется вектором  $\mathbf{R}$  ( $R^x$ ,  $R^y$  — компоненты вектора  $\mathbf{R}$  на осях  $OX$  и  $OY$ ), который определяет направление, в котором изменяется граница молекулярной фазы. Запишем систему модельных уравнений, описывающих динамику слабосжимаемого вязкого течения, включающего структурную компоненту. Она состоит из системы уравнений Навье–Стокса для гидродинамической фазы течения и уравнений, описывающих динамику растяжений полимерной составляющей потока  $\mathbf{R}$  [Steinberg, 2021; Денисенко, Фортова, 2023]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) &= 0, \\ \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u \mathbf{V}) &= -\frac{\partial p}{\partial x} - \rho G \sin(ky) \cos(kx) + \mu \Delta u + A \frac{\partial}{\partial x} (\gamma(R) \{R^x\}^2) + A \frac{\partial}{\partial y} (\gamma(R) R^x R^y), \\ \frac{\partial \rho v}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v \mathbf{V}) &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho G \sin(kx) \cos(ky) + \mu \Delta v + A \frac{\partial}{\partial y} (\gamma(R) \{R^y\}^2) + A \frac{\partial}{\partial x} (\gamma(R) R^x R^y), \\ \frac{\partial \left( \frac{\rho \mathbf{V}^2}{2} + e \right)}{\partial t} + \nabla \cdot \left( \mathbf{V} \left( \frac{\rho \mathbf{V}^2}{2} + p + e \right) \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu u \rho \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + A u \gamma(R) (R^x)^2 + \right. \\ &+ \left. v \mu \rho \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + A v \gamma(R) R^x R^y \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu u \rho \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + A u \gamma(R) R^x R^y + \right. \\ &+ \left. \mu v \rho \left( \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) + A v \gamma(R) (R^y)^2 \right) - u \rho G \sin(ky) \cos(kx) + v \rho G \sin(kx) \cos(ky), \\ \frac{\partial R^x}{\partial t} + u \frac{\partial R^x}{\partial x} + v \frac{\partial R^x}{\partial y} - R^x \frac{\partial u}{\partial x} - R^y \frac{\partial u}{\partial y} + \gamma(R) R^x &= C_d \Delta R^x, \\ \frac{\partial R^y}{\partial t} + u \frac{\partial R^y}{\partial x} + v \frac{\partial R^y}{\partial y} - R^x \frac{\partial v}{\partial x} - R^y \frac{\partial v}{\partial y} + \gamma(R) R^y &= C_d \Delta R^y, \\ e = \frac{3p}{2\rho}, \quad \gamma(R) = \gamma_0 \left( 1 + \frac{R^2}{R_m^2} \right), \quad \mathbf{V} = (u, v)^T. & \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $A$  — коэффициент, пропорциональный концентрации полимерных молекул в растворе и характеризующий степень обратного влияния полимерных молекул на поток,  $C_d$  — коэффициент искусственной диффузии полимеров, введенный для стабилизации численного решения,  $\gamma(R)$  — модель релаксации полимерной молекулы,  $G$  — интенсивность внешней силы. В качестве модели упругости полимеров использовано нелинейное приближение

$$\gamma(R) = \gamma_0 \left( 1 + \frac{R^2}{R_m^2} \right).$$

Здесь  $R_m$  — максимальная величина растяжения полимерной молекулы. При условии  $R \ll R_m$  мы имеем дело с линейным режимом, соответствующим модели Oldroyd-B [Oldroyd, 1950].

Система уравнений замыкается использованием уравнения состояния идеального газа  $e = \frac{3p}{2\rho}$ , где  $e$  — объемная плотность внутренней энергии [Ландау, Лифшиц, 1986].

Параметры течения в начальный момент времени и граничные условия выбирались из соображения устойчивости численного эксперимента. Величины компонент скорости  $u$ ,  $v$  в начальный момент времени полагались нулевыми, что соответствует невозмущенному течению. Значения плотности и давления принимались равными

$$\rho(x, y, t = 0) = 10 \text{ кг/м}^3, \quad p(x, y, t = 0) = 10^3 \text{ Па.}$$

Начальные значения компонент вектора растяжения полимерных молекул составляли

$$R^x(x, y, t = 0) = 0,2 \cos(a_x x) \text{ м}, \quad R^y(x, y, t = 0) = 0,2 \cos(a_y y) \text{ м}, \\ a_x = 1 \text{ м}^{-1}, \quad a_y = 1 \text{ м}^{-1}.$$

Коэффициент искусственной диффузии  $C_d$  подбирался эмпирически, исходя из требований устойчивого численного счета и соотношения  $\sqrt{\frac{C_d}{\gamma_0}} \sim h$ , где  $h$  — характерный размер ячейки вычислительной сетки. Интенсивность внешней периодической силы принималась равной  $G = 10^{-2}$  Н/кг, частота силы составляла  $k = 2 \text{ м}^{-1}$ . Коэффициент релаксации полимерной молекулы полагался  $\gamma_0 = 10^{-6} \text{ с}^{-1}$ , коэффициент искусственной диффузии —  $C_d = 10^{-9} \text{ м}^2/\text{с}$ . Величина динамической вязкости равнялась  $\mu = 0,5 \text{ Па} \cdot \text{с}$ . Величина параметра  $A$  варьировалась в пределах  $A = 50 \div 5 \cdot 10^6 \text{ кг}/(\text{м}^3 \cdot \text{с})$ . Расчетная область представляла из себя квадрат со сторонами  $L \times L = 2\pi \times 2\pi \text{ м} \times \text{м}$ , на границе которого поставлены периодические граничные условия, и покрыта равномерной вычислительной сеткой размерностью  $250 \times 250$  ячеек.

### 3. Численный метод

Для численной аппроксимации системы (1) применялась комбинация двух численных методов — линейризованного метода Годунова [Годунов и др., 2020] и метода Курганова–Тедмора [Kurganov, Tadmor, 2000]. Линейризованным методом Годунова аппроксимировалась гидродинамическая часть вычислительной модели — система уравнений Навье–Стокса, а уравнения, описывающие полимерную компоненту течения, аппроксимировались методом Курганова–Тедмора. Следует отметить, что выбор для расчета гидродинамической части течения линейризованной схемы Годунова обусловлен существованием областей с большими градиентами параметров течения, находящегося в режиме эластической турбулентности. Опишем кратко численную методику.

Запишем систему уравнений Навье – Стокса в дивергентном виде:

$$\begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \frac{\rho v^2}{2} + e \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ u \left( \frac{\rho u^2}{2} + p + e \right) \end{pmatrix}_x + \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ v \left( \frac{\rho u^2}{2} + p + e \right) \end{pmatrix}_y = \mu \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} \\ u\rho \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + v\rho \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \end{pmatrix}_x +$$

$$+ \mu \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ u\rho \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + v\rho \left( \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) \end{pmatrix}_y + A\gamma(R) \begin{pmatrix} 0 \\ (R^x)^2 \\ R^x R^y \\ u(R^x)^2 + vR^x R^y \end{pmatrix}_x + A\gamma(R) \begin{pmatrix} 0 \\ R^x R^y \\ (R^y)^2 \\ uR^x R^y + v(R^y)^2 \end{pmatrix}_y.$$

Вязкие и «полимерные» потоки через грани ячеек вычислительной сетки вычисляются обычным усреднением.

Конвективные потоки

$$\begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ u \left( \frac{\rho u^2}{2} + p + e \right) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ v \left( \frac{\rho u^2}{2} + p + e \right) \end{pmatrix}$$

вычисляются линеаризованной Годуновской методикой следующим образом:

$$P_{i+1/2,j}^{n+1/2} = \frac{\frac{P_{i,j}^n}{\rho_{i,j}^n c_{i,j}^n} + \frac{P_{i+1,j}^n}{\rho_{i+1,j}^n c_{i+1,j}^n} + u_{i,j}^n - u_{i+1,j}^n}{\frac{1}{\rho_{i,j}^n c_{i,j}^n} + \frac{1}{\rho_{i+1,j}^n c_{i+1,j}^n}}, \quad U_{i+1/2,j}^{n+1/2} = \frac{\rho_{i,j}^n c_{i,j}^n u_{i,j}^n + \rho_{i+1,j}^n c_{i+1,j}^n u_{i+1,j}^n + P_{i,j}^n - P_{i+1,j}^n}{\frac{1}{\rho_{i,j}^n c_{i,j}^n} + \frac{1}{\rho_{i+1,j}^n c_{i+1,j}^n}},$$

$$V_{i+1/2,j}^{n+1/2} = \begin{cases} v_{i,j}^n, & U_{i+1/2,j}^{n+1/2} \geq 0, \\ v_{i+1,j}^n, & U_{i+1/2,j}^{n+1/2} < 0, \end{cases} \quad R_{i+1/2,j}^{n+1/2} = \begin{cases} \rho_{i,j}^n \left( 1 - \frac{U_{i+1/2,j}^{n+1/2} - u_{i,j}^n}{c_{i,j}^n} \right), & U_{i+1/2,j}^{n+1/2} \geq 0, \\ \rho_{i+1,j}^n \left( 1 - \frac{u_{i+1,j}^n - U_{i+1/2,j}^{n+1/2}}{c_{i+1,j}^n} \right), & U_{i+1/2,j}^{n+1/2} < 0. \end{cases}$$

Здесь  $P$ ,  $U$ ,  $V$ ,  $R$  — потоки давления, компонент скорости и плотности соответственно. Полуцелые индексы обозначают потоки на гранях ячеек, целые — значения величин в центре ячейки.

Далее опишем аппроксимацию уравнений на вектор растяжения полимеров  $\mathbf{R}$ . Запишем уравнения системы (1) для компонент вектора растяжения полимерных молекул в дивергентном виде:

$$\begin{pmatrix} R^x \\ R^y \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} uR^x \\ uR^y \end{pmatrix}_x - \begin{pmatrix} C_d \frac{\partial R^x}{\partial x} \\ C_d \frac{\partial R^y}{\partial x} \end{pmatrix}_x + \begin{pmatrix} vR^x \\ vR^y \end{pmatrix}_y - \begin{pmatrix} C_d \frac{\partial R^x}{\partial y} \\ C_d \frac{\partial R^y}{\partial y} \end{pmatrix}_y = \begin{pmatrix} 2R^x \frac{\partial u}{\partial x} + R^y \frac{\partial u}{\partial y} + R^x \frac{\partial v}{\partial x} - \gamma(R)R^x \\ R^x \frac{\partial v}{\partial x} + 2R^y \frac{\partial v}{\partial y} + R^y \frac{\partial u}{\partial x} - \gamma(R)R^y \end{pmatrix}.$$

Суть методики Курганова – Тедмора состоит в вычислении конвективных потоков

$$\begin{pmatrix} uR^x \\ uR^y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} vR^x \\ vR^y \end{pmatrix}$$



на гранях расчетных ячеек, для аппроксимации остальных членов (диффузионных и источника) применяется обычное осреднение на гранях ячеек расчетной сетки. Обозначим конвективный поток вдоль осей  $x, y$ :

$$F = \begin{pmatrix} uR^x \\ uR^y \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} vR^x \\ vR^y \end{pmatrix};$$

вектор-столбец неизвестных —

$$R = \begin{pmatrix} R^x \\ R^y \end{pmatrix}.$$

Конвективные потоки вычисляются следующим образом:

$$\begin{aligned} F_{i+1/2,j}^n &= \frac{F((R_{i+1/2,j}^+)^n) + F((R_{i-1/2,j}^-)^n)}{2} - \frac{(a_{i+1/2,j}^x)^n}{2} ((R_{i+1/2,j}^+)^n - (R_{i-1/2,j}^-)^n), \\ G_{i,j+1/2}^n &= \frac{G((R_{i,j+1/2}^+)^n) + G((R_{i,j-1/2}^-)^n)}{2} - \frac{(a_{i,j+1/2}^y)^n}{2} ((R_{i,j+1/2}^+)^n - (R_{i,j-1/2}^-)^n), \\ (R_{i+1/2,j}^\pm)^n &= R_{i+1,j}^n \mp \frac{\Delta x}{2} (R_x)_{i+1/2 \pm 1/2,j}^n, \quad (R_{i,j+1/2}^\pm)^n = R_{i,j+1}^n \mp \frac{\Delta y}{2} (R_y)_{i,j+1/2 \pm 1/2}^n, \\ (a_{i+1/2,j}^x)^\pm &= \max_{\pm} \left( \frac{\partial F}{\partial R} ((R_{i+1/2,j}^\pm)^n) \right) = |u_{i+1/2,j}|, \quad (a_{i+1/2,j}^y)^\pm = \max_{\pm} \left( \frac{\partial G}{\partial R} ((R_{i,j+1/2}^\pm)^n) \right) = |v_{i+1/2,j}|, \\ u_{i+1/2,j} &= \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{i+1,j}), \quad v_{i+1/2,j} = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{i+1,j}), \\ (R_x)_{i,j}^n &= \min \text{mod} \left( \theta \frac{(R_x)_{i,j}^n - (R_x)_{i-1,j}^n}{\Delta x}, \frac{(R_x)_{i+1,j}^n - (R_x)_{i-1,j}^n}{2\Delta x}, \theta \frac{(R_x)_{i+1,j}^n - (R_x)_{i,j}^n}{\Delta x} \right), \\ (R_y)_{i,j}^n &= \min \text{mod} \left( \theta \frac{(R_y)_{i,j}^n - (R_y)_{i,j-1}^n}{\Delta y}, \frac{(R_y)_{i,j+1}^n - (R_y)_{i,j-1}^n}{2\Delta y}, \theta \frac{(R_y)_{i,j+1}^n - (R_y)_{i,j}^n}{\Delta y} \right), \\ \theta &= 1,5 \text{ — весовой коэффициент ограничителя.} \end{aligned}$$

Здесь полуцелые индексы обозначают потоки на гранях ячеек, целые — значения величин в центре ячейки,  $u, v$  —  $x$ - и  $y$ -компоненты скорости течения,  $a$  — локальная скорость распространения возмущений. Для ограничения наклонов реконструированного решения в ячейке использовался  $\min\text{mod}$ -ограничитель.

#### 4. Результаты численного моделирования

На рис. 1 показаны поля завихренности течения в один и тот же момент времени  $t \sim 630$  с для различных величин параметра  $A$ . Во всех приведенных случаях величина числа Рейнольдса составляет  $Re \sim 10^{-1}$ , число Вайсенберга равно  $Wi \sim 1000$ . Рисунок 1 демонстрирует, что с ростом параметра  $A$  течение становится более хаотическим. Рисунки 2, 3 демонстрируют поля скорости течения с наложенными на них линиями тока и картины модуля растяжения полимерных молекул  $R = \sqrt{(R^x)^2 + (R^y)^2}$  соответственно. Можно заметить уменьшение величины модуля растяжения  $R$  при увеличении параметра  $A$ , что объясняется увеличением обратного влияния полимерных молекул на течение. Данная зависимость позволяет предположить, что хаотизация течения происходит за счет увеличения обратного влияния полимерной составляющей на поток.

Возникновение неустойчивостей течения раствора происходит из областей наибольшего растяжения полимеров — области гиперболичности течения. Течение, возникающее в результате воздействия внешней силы, является вихревым, в областях между вихрями течение гиперболично, и степень растяжения полимерных молекул здесь наиболее высока. Обратное влияние сильно

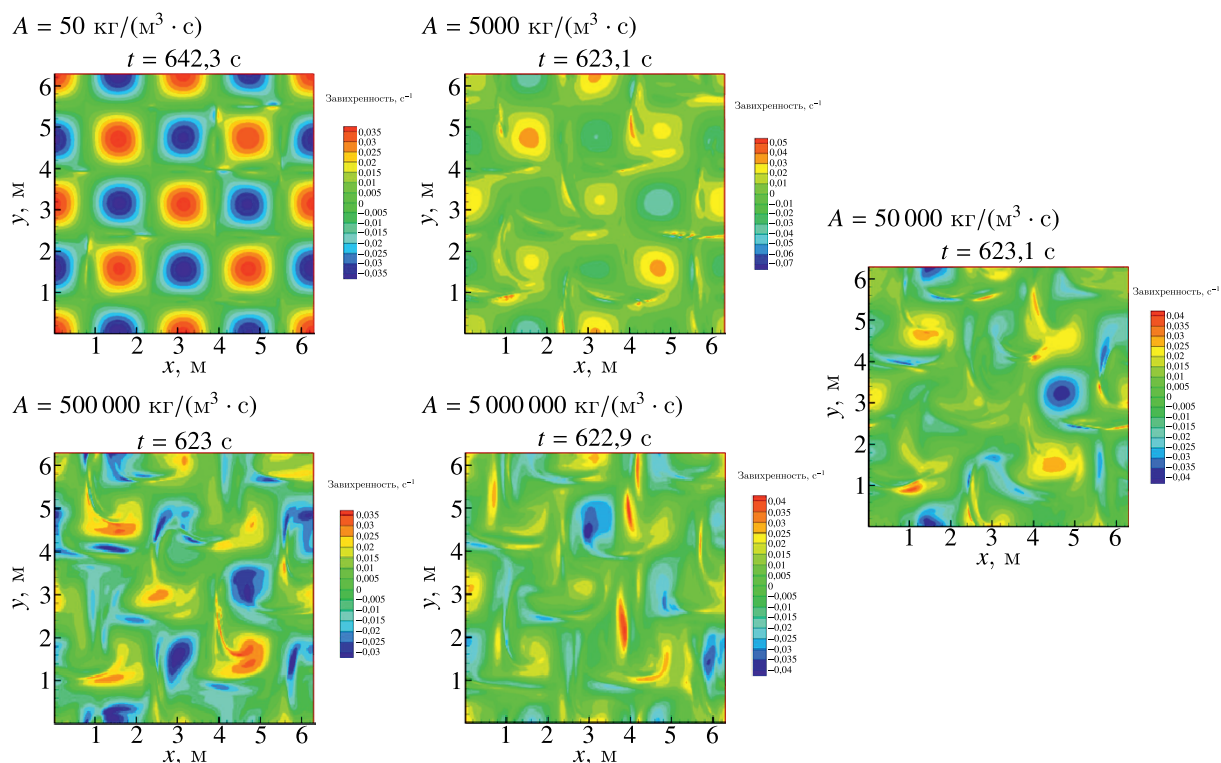


Рис. 1. Поля завихренности течения полимерного раствора в периодической ячейке, находящегося под воздействием внешней периодической силы для различных значений параметра  $A$ , характеризующего степень обратного влияния на течение, в момент времени  $t \sim 630 \text{ с}$

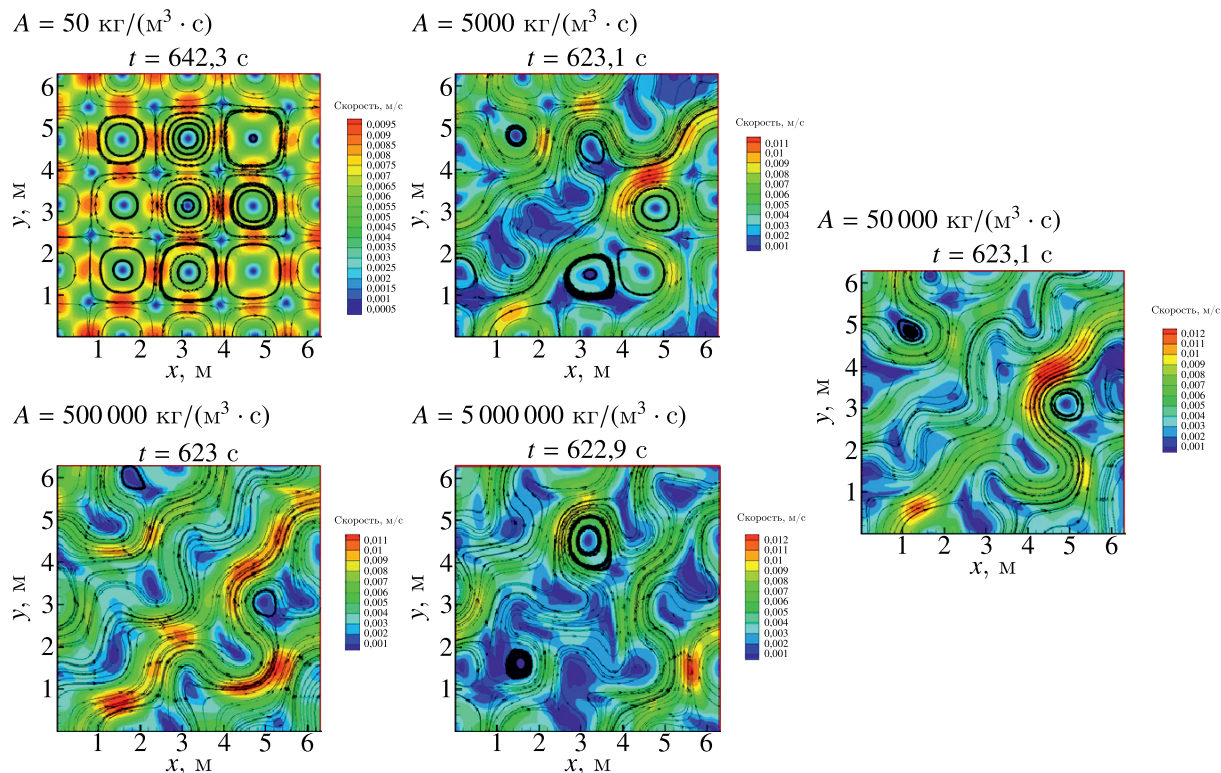


Рис. 2. Поля скорости течения полимерного раствора с линиями тока в периодической ячейке, находящегося под воздействием внешней периодической силы для различных значений параметра  $A$ , характеризующего степень обратного влияния на течение, в момент времени  $t \sim 630 \text{ с}$



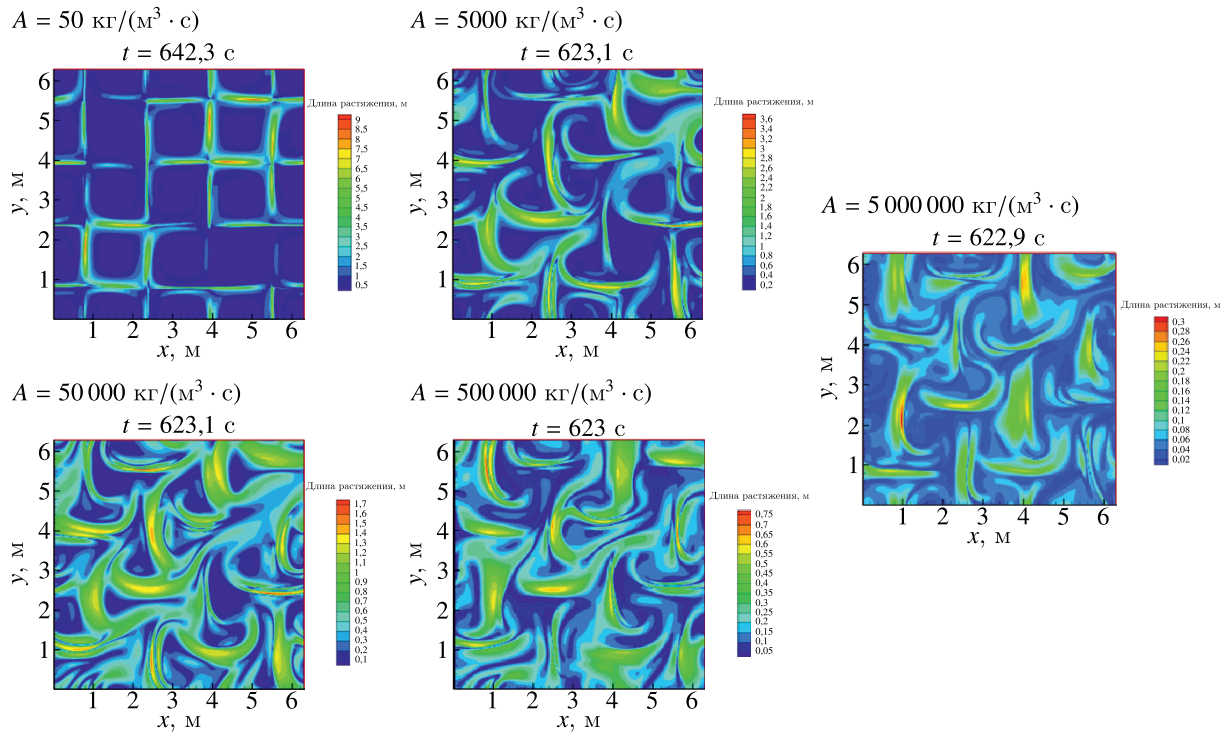


Рис. 3. Поля модуля растяжения полимерных молекул  $R = \sqrt{(R_x)^2 + (R_y)^2}$  в периодической ячейке, находящегося под воздействием внешней периодической силы для различных значений параметра  $A$  в момент времени  $t \sim 630$  с

растянутых полимеров на поток приводит к возникновению неустойчивостей и дальнейшему их развитию.

На рис. 4 приведены спектры скорости  $E_v(k)$  (слева) и растяжений полимерных молекул  $E_r(k)$  (справа) полученного течения на момент времени  $t \sim 630$  с для различных значений параметра  $A$ . Спектры вычислялись как разложение по косинусам-синусам:

$$E_v(k_x, k_y) = \sum_{i=0}^1 \sum_{j=1}^4 u_{i(j)}^2(k_x, k_y) + 2 \sum_{i=0}^1 [u_{i(1)}(k_x, k_y)u_{i(2)}(k_x, k_y) + u_{i(3)}(k_x, k_y)u_{i(4)}(k_x, k_y)],$$

$$u_{i(1)}(k_x, k_y) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u_i(x, y) \cos(k_x x) \cos(k_y y) dx dy,$$

$$u_{i(2)}(k_x, k_y) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u_i(x, y) \cos(k_x x) \sin(k_y y) dx dy,$$

$$u_{i(3)}(k_x, k_y) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u_i(x, y) \sin(k_x x) \cos(k_y y) dx dy,$$

$$u_{i(4)}(k_x, k_y) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u_i(x, y) \sin(k_x x) \sin(k_y y) dx dy.$$

Здесь индекс  $i$  введен для нумерации осевых компонент скорости ( $u, v$ ). Полученное распределение в пространстве волновых чисел  $(k_x, k_y)$  осреднялось по направлениям волнового

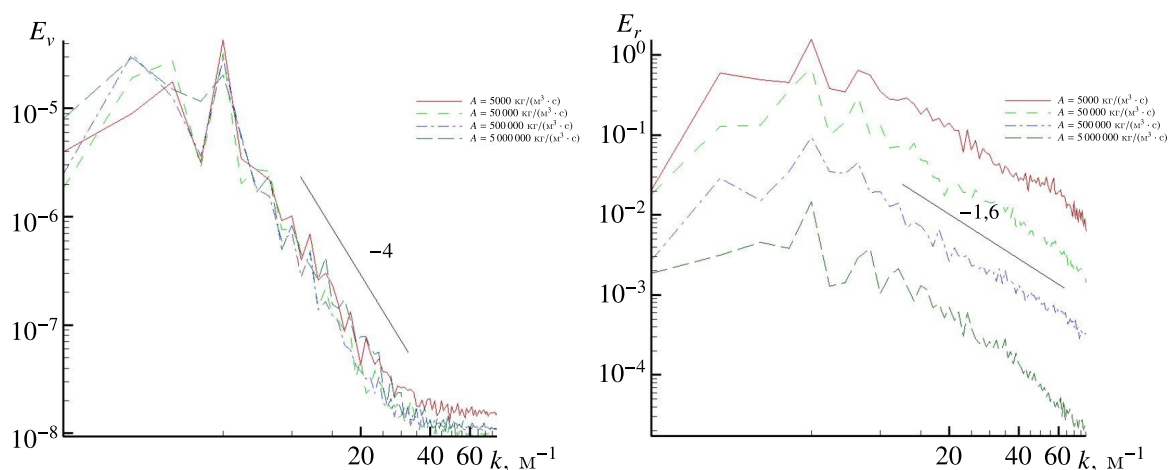


Рис. 4. Спектры скорости  $E_v$  (слева) и растяжения  $E_r$  (справа) полимерных молекул хаотических течений полимерного раствора в периодической ячейке, находящегося под воздействием внешней периодической силы в зависимости от величины параметра  $A$ , построенные в дважды логарифмическом масштабе

вектора  $\mathbf{k}$  в кольце шириной  $\delta = 0,5$ :

$$E(k) = \sum_{k_x, k_y: |k - \sqrt{k_x^2 + k_y^2}| < \delta} E(k_x, k_y).$$

Спектр растяжений  $E_r(k)$  вычислялся аналогично заменой  $u \rightarrow R^x$ ,  $v \rightarrow R^y$ .

Как видно из рис. 4, спектральные характеристики скорости течения практически не зависят от параметра  $A$ , который определяет степень обратного влияния полимерной составляющей раствора на само течение. Отчетливо просматривается инерционный диапазон энергетического каскада с показателем  $-4$ . Для растяжений полимерных молекул наблюдается зависимость с показателем  $-1,6$ . При этом, как и следовало ожидать, с увеличением параметра  $A$  уменьшается энергия полимерной составляющей течения из-за передачи энергии полимеров обратно в течение.

Из полученных результатов можно сделать вывод, что течение на рис. 1–3 находится в режиме эластической турбулентности — хаотическом течении, вызванном наличием полимерной примеси.

## 5. Заключение

В работе приведена численная модель, качественно демонстрирующая возникновение и развитие режима эластической турбулентности — хаотического течения среды, содержащей полимерную компоненту. На примере слабосжимаемых вязких течений полимерного раствора в периодической квадратной ячейке, возбуждаемых внешней силой, исследованы течения с малым числом Рейнольдса  $Re \sim 10^{-1}$  и высоким числом Вайсенберга  $Wi \sim 1000$ . При определенных модельных параметрах путем численного эксперимента показано, что наличие полимерной примеси значительно меняет характер гидродинамического течения благодаря влиянию упругих сил, действующих со стороны полимерных молекул. Действие этих сил приводит к потере устойчивости гидродинамического течения и последующему переходу в режим эластической турбулентности. Неустойчивость течения возникает в областях гиперболичности, где растяжение полимерных молекул, а следовательно и их обратное влияние на поток, имеет максимальную величину. Следует отметить, что параметром, характеризующим устойчивость такого рода

течений, является комбинация чисел Рейнольдса ( $Re$ ) и Вайсенберга ( $Wi$ ) — коэффициент эластичности  $El = \frac{Wi}{Re}$  [Steinberg, 2021]. В представленных численных экспериментах это число составляло 10 000.

Для численного исследования поставленной задачи реализована гибридная численная методика второго порядка точности, аппроксимирующая уравнения динамики полимерного раствора (1). Гидродинамическая часть системы (1) — уравнения Навье–Стокса, аппроксимировалась линейризованным методом Годунова [Годунов и др., 2020], полимерная часть — методикой Курганова–Тедмора [Kurganov, Tadmor, 2000].

Исследовано влияние параметра задачи  $A$ , характеризующего степень обратного влияния упругих сил, производимых деформированными полимерными молекулами, на гидродинамическое течение. С увеличением параметра  $A$  течение становится более неустойчивым и хаотическим. В спектральных характеристиках течения получен инерционный диапазон энергетического каскада с показателем  $\sim -4$ . В спектрах растяжений полимерных молекул данный показатель равен  $\sim -1,6$ . Показано, что основное влияние параметр  $A$  оказывает на спектр растяжений полимерных молекул. Увеличение этого параметра приводит к уменьшению энергии, содержащейся в полимерной составляющей течения, и передаче энергии полимеров в гидродинамический поток.

## Список обозначений

$A$  — коэффициент, пропорциональный концентрации полимерных молекул в растворе и характеризующий степень обратного влияния полимерных молекул на поток,

$C_d$  — коэффициент искусственной диффузии полимеров,

$\gamma(R)$  — модель релаксации полимерной молекулы,

$G$  — интенсивность внешней силы,

$R_m$  — максимальная величина растяжения полимерной молекулы,

$e$  — объемная плотность внутренней энергии,

$k$  — частота внешней периодической силы,

$u$  —  $x$ -компонента скорости течения раствора,

$v$  —  $y$ -компонента скорости течения раствора,

$R^x$  —  $x$ -компонента вектора растяжения полимерной молекулы,

$R^y$  —  $y$ -компонента вектора растяжения полимерной молекулы,

$p$  — давление,

$\rho$  — плотность раствора,

$\mu$  — динамическая вязкость,

$Re$  — число Рейнольдса,

$Wi$  — число Вайсенберга,

$\gamma_0$  — коэффициент релаксации полимерной молекулы,

$E_v$  — спектр скорости течения раствора,

$E_r$  — спектр растяжений раствора,

$\mathbf{R}$  — вектор растяжения полимерной молекулы.

## Список литературы (References)

- Годунов С. К., Денисенко В. В., Ключинский Д. В., Фортлова С. В., Шепелев В. В. Исследование энтропийных свойств линеаризованной редакции метода Годунова // ЖВМиМФ. — 2020. — Т. 60, № 4. — С. 639–651.
- Godunov S. K., Denisenko V. V., Klyuchinskii D. V., Fortova S. V., Shepelev V. V. Issledovanie entropiinykh svoystv linearizovannoi redaktsii metoda Godunova [Study of entropy properties of a linearized version of Godunov's method] // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2020. — Vol. 60, No. 4. — P. 639–651 (in Russian).
- Денисенко В. В., Фортлова С. В. Численное моделирование эластической турбулентности в ограниченной двумерной ячейке // Сибирский журнал индустриальной математики. — 2023. — Т. 26, № 1. — С. 55–64.
- Denisenko V. V., Fortova S. V. Chislennoe modelirovanie elasticheskoi turbulentsi v ogranichennoi dvumernoi yacheike [Numerical simulation of elastic turbulence in a confined two-dimensional cell] // Siberian journal of Industrial Mathematics. — 2023. — Vol. 26, No. 1. — P. 55–64 (in Russian).
- Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика: т. VI. Гидродинамика. — 3-е изд., перераб. — М.: Наука, Гл. ред. физ-мат. лит., 1986.
- Landau L. D., Lifshitz E. M. Teoreticheskaya fizika: Vol. VI. Gidrodinamika [Theoretical physics: Vol. VI. Hydrodynamics]. — 3-e izd., pererab. — Moscow: Nauka, Gl. red. fiz-mat. lit., 1986 (in Russian).
- Abed W. M., Whalley R. D., Dennis D. J. C., Poole R. J. Experimental investigation of the impact of elastic turbulence on heat transfer in a serpentine channel // J. Non-Newton. Fluid Mech. — 2016. — Vol. 231. — P. 68–78.
- Alves M. A., Oliveira P. J., Pinho F. T. Numerical methods for viscoelastic fluid flows // Annu. Rev. Fluid Mech. — 2021. — Vol. 53. — P. 509–541.
- Belan S., Chernykh A., Lebedev V. Boundary layer of elastic turbulence // J. Fluid Mech. — 2018. — Vol. 855. — P. 910–921.
- Burghelca T., Segre E., Bar-Joseph I., Groisman A., Steinberg V. Chaotic flow and efficient mixing in a microchannel with a polymer solution // Phys. Rev. E. — 2004. — Vol. 69. — P. 066305.
- Clarke A., Howe A. M., Mitchell J., Staniland J., Hawkes L., Leepera K. Mechanism of anomalously increased oil displacement with aqueous viscoelastic polymer solutions // Soft Matter. — 2015. — Vol. 11. — P. 3536–3541.
- Dubief Y., Terrapon V. E., White C. M., Shaqfeh E. S. G., Moin P., Lele S. K. New answers on the interaction between polymers and vortices in turbulent flows // Flow Turbul. Combust. — 2005. — Vol. 74. — P. 311–329.
- Gan H. Y., Lam Y. C., Nguyen N.-T. Polymer-based device for efficient mixing of viscoelastic fluids // Appl. Phys. Lett. — 2006. — Vol. 88. — P. 224103.
- Groisman A., Steinberg V. Stretching of polymers in a random three-dimensional flow // Phys. Rev. Lett. — 2001. — Vol. 86. — P. 934–937.
- Gupta A., Vincenzi D. Effect of polymer-stress diffusion in the numerical simulation of elastic turbulence // J. Fluid Mech. — 2019. — Vol. 870. — P. 405–418.
- Hong-Na Z., Feng-Chen L., Yang C., Tomoaki K., Bo Y. Direct numerical simulation of elastic turbulence and its mixing-enhancement effect in a straight channel flow // Chin. Phys. B. — 2013. — Vol. 22, No. 2. — P. 024703.
- Howe A. M., Clarke A., Giernalczyk D. Flow of concentrated viscoelastic polymer solutions in porous media: effect of  $M(W)$  and concentration on elastic turbulence onset in various geometries // Soft Matter. — 2015. — Vol. 11. — P. 6419–6431.
- Kurganov A., Tadmor E. New high-resolution central schemes for nonlinear conservation laws and convection–diffusion equations // Journal of Computational Physics. — 2000. — Vol. 160. — P. 241–282.
- Li D.-Y., Li X.-B., Zhang H.-N., Li F.-C., Qian S., Joo S. W. Efficient heat transfer enhancement by elastic turbulence with polymer solution in a curved microchannel // Microfluid. Nanofluid. — 2017. — Vol. 21. — P. 10.

- Mitchell J., Lyons K., Howe A. M., Clarke A.* Viscoelastic polymer flows and elastic turbulence in three-dimensional porous structures // *Soft Matter*. — 2016. — Vol. 12. — P. 460–468.
- Oldroyd J. G.* On the formulation of rheological equations of state // *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Sci.* — 1950. — Vol. 200. — P. 523–541.
- Peterlin A.* Streaming birefringence of soft linear macromolecules with finite chain length // *Polymer*. — 1961. — Vol. 2. — P. 257–264.
- Poole R. J., Budhiraja B., Cain A. R., Scott P. A.* Emulsification using elastic turbulence // *J. Non-Newton. Fluid Mech.* — 2012. — Vol. 177, No. 78. — P. 15–18.
- Shahmardi A., Zade S., Ardekani M. N., Poole R. J., Lundell F., Rosti M. E., Brandt L.* Turbulent duct flow with polymers // *J. Fluid Mech.* — 2019. — Vol. 859. — P. 1057–1083.
- Slutsky M., Steinberg V.* Effective mixing and emulsification of very viscous substances by elastic turbulence // *Report on the Horowitz Foundation Grant 3355*. — Rehovot, Israel: Weizmann Inst. Sc. — 2005.
- Steinberg V.* Elastic turbulence: an experimental view on inertialess random // *Flow. Annu. Rev. Fluid Mech.* — 2021. — Vol. 53. — P. 27–58.
- Thomas B., Shelley M., Thiffeault J.-L.* A Stokesian viscoelastic flow: transition to oscillations and mixing // *Phys. D: Nonlinear Phenomena*. — 2011. — Vol. 240. — P. 1602–1614.
- Traore B., Castelain C., Burghel T.* Efficient heat transfer in a regime of elastic turbulence // *J. Non-Newton. Fluid Mech.* — 2015. — Vol. 223. — P. 6.
- Vaithianathan T., Collins L. R.* Numerical approach to simulating turbulent flow of a viscoelastic polymer solution // *J. Comput. Phys.* — 2003. — Vol. 187. — P. 1–21.
- Vaithianathan T., Robert A., Brasseur J. G., Collins L. R.* An improved algorithm for simulating three-dimensional, viscoelastic turbulence // *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* — 2006. — Vol. 140. — P. 3–22.
- Whalley R., Abed W. M., Dennis D. J. C., Poole R. J.* Enhancing heat transfer at the micro-scale using elastic turbulence // *Theor. Appl. Mech. Lett.* — 2015. — Vol. 5. — P. 103–106.