

УДК: 532.5-1/-9

Численное исследование высокоскоростных слоев смешения на основе двухжидкостной модели турбулентности

Ф. Х. Назаров

Институт механики и сейсмостойкости сооружений имени М. Т. Уразбаева,
Узбекистан, 100125, г. Ташкент, Дурмон йули, д. 33
Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека,
Узбекистан, 100174, г. Ташкент, Университет кучаси, д. 4

E-mail: farruxnazar@mail.ru

*Получено 05.07.2024, после доработки — 12.08.2024.
Принято к публикации 03.09.2024.*

Данная работа посвящена численному исследованию высокоскоростных слоев смешения сжимаемых потоков. Рассматриваемая задача имеет широкий спектр применения в практических задачах и, несмотря на кажущуюся простоту, является достаточно сложной в плане моделирования, потому что в слое смешения в результате неустойчивости тангенциального разрыва скоростей поток от ламинарного течения переходит к турбулентному режиму. Поэтому полученные численные результаты рассмотренной задачи сильно зависят от адекватности используемых моделей турбулентности. В представленной работе данная задача исследуется на основе двухжидкостного подхода к проблеме турбулентности. Данный подход возник сравнительно недавно и достаточно быстро развивается. Главное преимущество двухжидкостного подхода — в том, что он ведет к замкнутой системе уравнений, тогда как известно, что давний подход Рейнольдса ведет к незамкнутой системе. В работе представлены суть двухжидкостного подхода для моделирования турбулентной сжимаемой среды и методика численной реализации предлагаемой модели. Для получения стационарного решения поставленной задачи применен метод установления и использована теория пограничного слоя Прандтля, которая ведет к упрощенной системе уравнений. В рассматриваемой задаче происходит смешение высокоскоростных потоков. Следовательно, необходимо моделировать также перенос тепла и давление нельзя считать постоянным, как это делается для несжимаемых потоков. При численной реализации конвективные члены в гидродинамических уравнениях аппроксимировались против потока вторым порядком точности в явном виде, а диффузионные члены в правых частях уравнений аппроксимировались центральной разностью в неявном виде. Для реализации полученных уравнений использовался метод прогонки. Для коррекции скорости через давления использован метод SIMPLE. В работе проведено исследование двухжидкостной модели турбулентности при различных начальных возмущениях потока. Полученные численные результаты показали, что хорошее соответствие с известными опытными данными наблюдается при интенсивности турбулентности на входе $0,1 < I < 1\%$. Для демонстрации эффективности предлагаемой модели турбулентности представлены также данные известных экспериментов, а также результаты моделей $k - kL + J$ и LES. Показано, что двухжидкостная модель по точности не уступает известным современным моделям, а по затрате вычислительных ресурсов является более экономичной.

Ключевые слова: высокоскоростное смешивание слоев, число Маха, уравнения Навье–Стокса, двухжидкостная модель, метод SIMPLE

UDC: 532.5-1/-9

Numerical study of high-speed mixing layers based on a two-fluid turbulence model

F. Kh. Nazarov

Institute of Mechanics and Seismic Stability of Structures named after M. T. Urazbaev,
33 Durmon yuli, Tashkent, 100125, Uzbekistan
National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek,
4 University st., Tashkent, 100174, Uzbekistan

E-mail: farruxnazar@mail.ru

*Received 05.07.2024, after completion – 12.08.2024.
Accepted for publication 03.09.2024.*

This work is devoted to the numerical study of high-speed mixing layers of compressible flows. The problem under consideration has a wide range of applications in practical tasks and, despite its apparent simplicity, is quite complex in terms of modeling. Because in the mixing layer, as a result of the instability of the tangential discontinuity of velocities, the flow passes from laminar flow to turbulent mode. Therefore, the obtained numerical results of the considered problem strongly depend on the adequacy of the used turbulence models. In the presented work, this problem is studied based on the two-fluid approach to the problem of turbulence. This approach has arisen relatively recently and is developing quite rapidly. The main advantage of the two-fluid approach is that it leads to a closed system of equations, when, as is known, the long-standing Reynolds approach leads to an open system of equations. The paper presents the essence of the two-fluid approach for modeling a turbulent compressible medium and the methodology for numerical implementation of the proposed model. To obtain a stationary solution, the relaxation method and Prandtl boundary layer theory were applied, resulting in a simplified system of equations. In the considered problem, high-speed flows are mixed. Therefore, it is also necessary to model heat transfer, and the pressure cannot be considered constant, as is done for incompressible flows. In the numerical implementation, the convective terms in the hydrodynamic equations were approximated by the upwind scheme with the second order of accuracy in explicit form, and the diffusion terms in the right-hand sides of the equations were approximated by the central difference in implicit form. The sweep method was used to implement the obtained equations. The SIMPLE method was used to correct the velocity through the pressure. The paper investigates a two-liquid turbulence model with different initial flow turbulence intensities. The obtained numerical results showed that good agreement with the known experimental data is observed at the inlet turbulence intensity of $0.1 < I < 1\%$. Data from known experiments, as well as the results of the $k-kL+J$ and LES models, are presented to demonstrate the effectiveness of the proposed turbulence model. It is demonstrated that the two-liquid model is as accurate as known modern models and more efficient in terms of computing resources.

Keywords: high-speed mixing of layers, Mach number, Navier–Stokes equations, two-fluid model, SIMPLE method

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2024, vol. 16, no. 5, pp. 1125–1142 (Russian).

1. Введение

Слой высокоскоростного смешения — это область, где два потока жидкости с разными скоростями соприкасаются и смешиваются. Это явление часто наблюдается в различных технических и природных системах, таких как выхлопы реактивных двигателей, атмосферные потоки и процессы горения. Понимание слоев высокоскоростного смешивания имеет решающее значение для улучшения конструкции и производительности многих технологических приложений, включая двигательные установки, аэродинамические компоненты и производство энергии. Основные характеристики высокоскоростных слоев смешения — это градиент скорости, турбулентность, вихревое движение и тепло- и массообмен. Градиент скорости: существенная разница в скоростях двух потоков приводит к высокому уровню сдвига на границе раздела. Тангенциальный разрыв в скоростях вызывает неустойчивость, что приводит к турбулентному смешению потоков. Турбулентность может варьироваться от малых масштабов (микротурбулентность) до крупных структур (макротурбулентность). Сдвиг на границе генерирует вихревое движение, способствуя формированию вихревых структур, таких как вихри и завихрения. Данное явление способствует эффективному переносу тепла и массы между потоками, что важно в приложениях, связанных с горением и охлаждением. При взаимодействии сверхзвукового потока с дозвуковым потоком ударные волны могут попадать на пограничный слой, влияя на его устойчивость и переход к турбулентности. Интенсификация тепло- и массопереноса имеет решающее значение в таких приложениях, как сжигание, где необходимо эффективное смешивание топлива и окислителя.

Проблемы высокоскоростного смешивания активно рассматривались в течение последних двух с половиной десятилетий, начиная с глубоких экспериментальных исследований Папамошоу и Рошко [Papamoschou, Roshko, 1988], которые связали уменьшающие эффекты перемешивания с так называемым конвективным числом Маха (отношение разницы скоростей потока к сумме акустических скоростей двух потоков). До этого исследования четко указывали, что эффект не связан с соотношением плотностей. Результаты Папамошоу и Рошко были подтверждены и дополнены Гебелем и Даттоном [Goebel, Dutton, 1991], а также Самими и др. [Elliott, Samimy, 1990], которые раскрыли более подробную информацию о слоях смешивания. Папамошоу и Рошко ввели понятие конвективного числа Маха для описания эффекта уменьшения перемешивания в высокоскоростных слоях смешивания. Это число определяется как отношение разницы скоростей двух потоков к сумме их акустических скоростей. Их исследования показали, что при увеличении конвективного числа Маха эффективность смешивания снижается. В своей работе Папамошоу и Рошко показали, что уменьшение эффективности смешивания не связано с соотношением плотностей двух потоков. Это опровергло ранее существовавшие предположения о значительной роли плотности в процессах смешивания.

С аналитической и вычислительной стороны линейная устойчивость дала несколько намеков на стабильность слоя смешивания [Sandham, 1990; Gropengiesser, 1970]; однако известно, что предположение о линейной устойчивости малых возмущений практически сразу же нарушается из-за интенсивных турбулентных режимов. Последующие процессы включают свертывание вихревой пелены, образование более крупных структур, слияние вихрей, рост размеров структур и другие явления, недалекие от линейного характера. Расчеты RANS с использованием обычной модели вихревой вязкости имеют трудности с предсказанием скорости роста слоя пространственного смешения, как подробно обсуждалось Бардиной и др. [Bardina et al., 1997]. За этот период особого прогресса в этой области не произошло. Подходы прямого численного моделирования (DNS) и моделирования больших вихрей (LES) были применены прежде всего для понимания поведения высокоскоростного слоя перемешивания. Известно, что подход DNS является дорогостоящим, и, несмотря на большие успехи в вычислительных возможностях в последние годы, можно ожидать, что он будет полезен для понимания некоторых аспектов с очень

ограниченными размерами доменов. Подход LES предлагает промежуточную стратегию для точного захвата крупномасштабных движений либо в областях большего размера, либо для помощи в понимании поведения в большем количестве ситуаций. Оба эти подхода были использованы на слое временного смешивания, результаты которого преобразуются в слой пространственного смешивания. Времан [Vreman, Geurts, Kuerten, 1995] представил как прямое, так и крупновихревое моделирование временного слоя смешения, а также продемонстрировал незначительность дилатационной диссипации за пределами $M > 0,3$. Путем комплексного анализа статистики течения было показано, что за снижение скорости роста ответственен член деформации давления. Эта позиция была подтверждена Саркаром и др. [Pantano, Sarkar, 2002], которые выполнили DNS-моделирование слоя временного смешения. Первый также дал теоретическое объяснение уменьшению члена «давление – деформация» с увеличением M . Показано, что сжимаемость влияет на условия производства гораздо сильнее, чем диссипация.

Слою временного смешивания свойственны недостатки, заключающиеся в том, что некоторые эффекты слоя пространственного смешивания не могут быть уловлены слоем временного смешивания. Сопоставление результатов временного слоя смешения с периодическими граничными условиями в направлениях потока с реалистичным пространственным слоем смешивания не является простым и может рассматриваться в лучшем случае как приближение. Более того, слой временного смешивания не может предоставить никакой информации относительно временной статистики в точке поля потока слоя пространственного смешивания. Для этого необходимо выполнить большой набор симуляций, и, учитывая, что слой смешивания является статистически стационарным, среднее по ансамблю можно перевести во временное среднее.

Моделирование пространственного перемешивания слоев немногочисленно. Шарма и др. [Sharma, Bhaskaran, Lele, 2011] провели прямое моделирование слоев пространственного смешения с ламинарными изотермическими потоками и турбулентными потоками при трех различных условиях соотношения скоростей. В статье рассматриваются возникновение турбулентности и достижение самоподобия при изменении условий притока. В работе [Lui, Lele, 2001] проведено моделирование слоев свободного сдвига, в [Nelson, Menon, 1998] представлены три численные схемы слоя пространственного смешения.

Таким образом, настоящая работа направлена на изучение моделирования реалистичного пространственного слоя смешивания на основе двухжидкостной модели турбулентности. Рассматривается смешение сверхзвукового потока с дозвуковым потоком. Предлагаемый двухжидкостный подход в моделировании турбулентности является относительно новым. Поэтому ниже для более ясного понимания представлена суть данного подхода.

2. Описание двухжидкостного подхода к моделированию турбулентности сжимаемой жидкости

Рассмотрим гетерогенную смесь двух жидкостей. На рис. 1 представлено сечение потока смеси, перпендикулярное к направлению i . Здесь темным цветом представлена жидкость I, а светлым – жидкость II. Пусть плотность, скорость и температура жидкости I равны ρ_1, U_1, θ_1 , а жидкости II – ρ_2, U_2, θ_2 соответственно.

Пусть ΔS_i – неподвижная элементарная площадка, а ΔS_{1i} – площадь, занимаемая жидкостью I, и ΔS_{2i} – жидкостью II. Очевидно, что

$$\Delta S_i = \Delta S_{1i} + \Delta S_{2i}. \quad (1)$$

Обозначим плотность, скорость и температуру смеси в элементарной площадке как ρ, V_i, T соответственно. Тогда можно записать

$$\begin{cases} \rho V_i \Delta S_i = \rho_1 U_{1i} \Delta S_{1i} + \rho_2 U_{2i} \Delta S_{2i}, \\ \rho T \Delta S_i = \rho_1 \theta_1 \Delta S_{1i} + \rho_2 \theta_2 \Delta S_{2i}. \end{cases} \quad (2)$$

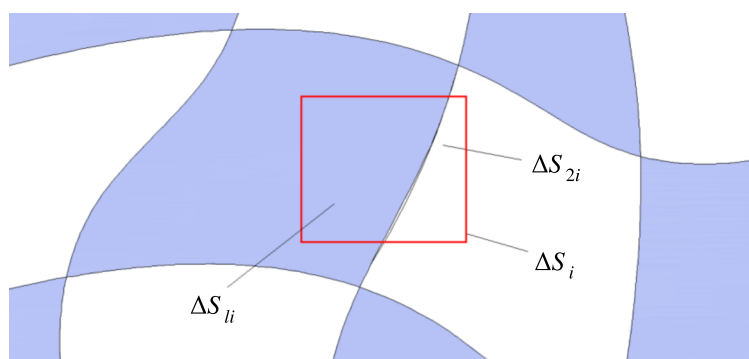


Рис. 1. Схема гетерогенной смеси двух жидкостей. Здесь темным цветом обозначается жидкость I, а светлым цветом — жидкость II. ΔS_i — неподвижная элементарная площадка в направлении i , ΔS_{1i} — площадь, занимаемая жидкостью I, и ΔS_{2i} — жидкостью II

Отсюда определим

$$\begin{cases} \rho V_i = \rho_1 U_{1i} \frac{\Delta S_{1i}}{\Delta S_i} + \left(1 - \frac{\Delta S_{1i}}{\Delta S_i}\right) \rho_2 U_{2i}, \\ \rho T = \rho_1 \theta_1 \frac{\Delta S_{1i}}{\Delta S_i} + \left(1 - \frac{\Delta S_{1i}}{\Delta S_i}\right) \rho_2 \theta_2. \end{cases} \quad (3)$$

Введем среднюю плотность смеси:

$$\bar{\rho} = 0,5(\rho_1 + \rho_2), \quad (4)$$

а также новые скорости и температуры:

$$V_{1i} = \frac{\rho_1}{\bar{\rho}} U_{1i}, \quad V_{2i} = \frac{\rho_2}{\bar{\rho}} U_{2i}, \quad T_1 = \frac{\rho_1}{\bar{\rho}} \theta_1, \quad T_2 = \frac{\rho_2}{\bar{\rho}} \theta_2. \quad (5)$$

Тогда выражения (3) можно записать в виде

$$\begin{cases} \rho V_i = \bar{\rho} V_{1i} \frac{\Delta S_{1i}}{\Delta S_i} + \left(1 - \frac{\Delta S_{1i}}{\Delta S_i}\right) \bar{\rho} V_{2i}, \\ \rho T = \bar{\rho} T_1 \frac{\Delta S_{1i}}{\Delta S_i} + \left(1 - \frac{\Delta S_{1i}}{\Delta S_i}\right) \bar{\rho} T_2. \end{cases} \quad (6)$$

Очевидно, что

$$1 > \frac{\Delta S_{1i}}{\Delta S_i} > 0. \quad (7)$$

Нетрудно показать, что параметр $\alpha_i = \frac{\Delta S_{1i}}{\Delta S_i}$ имеет флуктуирующий характер, потому что жидкости состоят из отдельных объемов и элементарная площадка ΔS_i может быть полностью внутри жидкостей I и II в промежутке времени $\tau_l = \frac{l}{|V|}$, где l — характерный размер объемов жидкостей. Если данный размер существенно меньше, чем характерный размер течения, т. е. $l \ll L$, то и время τ_l тоже будет существенно меньше, чем характерное время течения. Следовательно, за время τ_l параметр α_i изменяется от 0 до 1. Запишем соотношения (6) в виде

$$\begin{cases} \rho V_i = \bar{\rho} V_{1i} \alpha_i + (1 - \alpha_i) \bar{\rho} V_{2i}, \\ \rho T = \bar{\rho} T_1 \alpha_i + (1 - \alpha_i) \bar{\rho} T_2. \end{cases} \quad (8)$$

Рассмотрим теперь сжимаемый турбулентный поток. Введем осредненные значения скорости и температуру по методу Фавра:

$$\bar{V}_i = \frac{\overline{\rho V_i}}{\bar{\rho}}, \quad \bar{T} = \frac{\overline{\rho T}}{\bar{\rho}}. \quad (9)$$

Из этих условий видно, что мгновенные значения можно представить как

$$\rho V_i = \bar{\rho}(\bar{V}_i + \vartheta'_i), \quad \rho T = \bar{\rho}(\bar{T} + t'). \quad (10)$$

Здесь ϑ'_i, t' — флуктуирующие скорость и температура турбулентного потока, а осредненная по времени плотность определяется интегралом

$$\bar{\rho} = \frac{1}{t_0} \int_{\tau-t_0/2}^{\tau+t_0/2} \rho d\tau, \quad (11)$$

где t_0 — период осреднения, τ — текущее время. Введем нефлуктуирующие скорость и температуру ϑ'_i, t' , для которых выполняются условия $|\vartheta'_i| = |\vartheta'_i|_{\max}$ и $t = |t'|_{\max}$ в интервале времени $\tau - \frac{t_0}{2} < \tau' < \tau + \frac{t_0}{2}$. Тогда флуктуирующую скорость и температуру можно представить в виде

$$\vartheta'_i = \frac{\vartheta'_i}{\vartheta'_i} \vartheta'_i = \varphi_\vartheta \vartheta'_i, \quad t' = \frac{t'}{t} t = \varphi_t t. \quad (12)$$

Здесь $\varphi_\vartheta = \frac{\vartheta'_i}{\vartheta'_i}, \varphi_t = \frac{t'}{t}$ — безразмерные флуктуирующие функции, которые изменяются в пределах $-1 < \varphi_\vartheta, \varphi_t < 1$. Введем следующие параметры: $\gamma_\vartheta = \frac{\varphi_\vartheta + 1}{2}, \gamma_t = \frac{\varphi_t + 1}{2}$, которые изменяются в пределах $0 < \gamma_\vartheta, \gamma_t < 1$. Тогда соотношения (12) можно записать в виде

$$\vartheta'_i = (2\gamma_\vartheta - 1)\vartheta'_i, \quad t' = (2\gamma_t - 1)t. \quad (13)$$

Осредненные значения флуктуирующих параметров должны быть равны нулю, т. е.

$$\bar{\vartheta}'_i = (2\bar{\gamma}_\vartheta - 1)\vartheta'_i = 0, \quad \bar{t}' = (2\bar{\gamma}_t - 1)t. \quad (14)$$

Отсюда следует, что должны быть $\bar{\gamma}_\vartheta = \bar{\gamma}_t = 0,5$. Соотношения (10) представим в виде

$$\begin{aligned} \rho V_i &= \bar{\rho}\gamma_\vartheta(\bar{V}_i + \vartheta'_i) + \bar{\rho}(1 - \gamma_\vartheta)(\bar{V}_i - \vartheta'_i), \\ \rho T &= \bar{\rho}\gamma_t(\bar{T} + t) + \bar{\rho}(1 - \gamma_t)(\bar{T} - t). \end{aligned} \quad (15)$$

Известно, что в турбулентном потоке жидкость разбивается на отдельные объемы (моли), которые совершают относительные движения. Следовательно, турбулентный поток является гетерогенной смесью жидкостей. Поэтому, сопоставляя соотношения (8) и (15), можно заключить, что турбулентный поток можно представить в виде гетерогенной смеси двух жидкостей со скоростями

$$V_{1i} = \bar{V}_i + \vartheta'_i, \quad V_{2i} = \bar{V}_i - \vartheta'_i,$$

температурами

$$T_1 = \bar{T} + t, \quad T_2 = \bar{T} - t \quad (16)$$

и поверхностной долей первой жидкости

$$\alpha_i = \frac{\Delta S_{1i}}{\Delta S_i} = \gamma_\vartheta = \gamma_t. \quad (17)$$

Следовательно,

$$\bar{\alpha}_i = 0,5. \quad (18)$$

Таким образом, система уравнений термодинамики сжимаемого турбулентного потока состоит из уравнений для двух жидкостей:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon \bar{\rho}}{\partial \tau} + \frac{\partial \alpha_j \bar{\rho} V_{1i}}{\partial x_j} &= J, \\ \frac{\partial (1-\varepsilon) \bar{\rho}}{\partial \tau} + \frac{\partial (1-\alpha_j) \bar{\rho} V_{2i}}{\partial x_j} &= -J, \\ \frac{\partial \varepsilon \bar{\rho} V_{1i}}{\partial \tau} + \frac{\partial \alpha_j \bar{\rho} V_{1j} V_{1i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \alpha_j p}{\partial x_i} &= \frac{\partial \alpha_j \mu P_{1ji}}{\partial x_j} + f_i, \\ \frac{\partial (1-\varepsilon) \bar{\rho} V_{2i}}{\partial \tau} + \frac{\partial (1-\alpha_j) \bar{\rho} V_{2j} V_{2i}}{\partial x_j} + \frac{\partial (1-\alpha_j) p}{\partial x_i} &= \frac{\partial (1-\alpha_j) \mu P_{2ji}}{\partial x_j} - f_i, \\ \frac{\partial \varepsilon \bar{\rho} H_1}{\partial \tau} + \frac{\partial \alpha_j \bar{\rho} V_{1j} H_1}{\partial x_j} &= \frac{\partial \varepsilon p}{\partial \tau} + V_{1j} \frac{\partial \alpha_j p}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\alpha_j \lambda \frac{\partial T_1}{\partial x_j} \right) + \frac{\mu \alpha_j}{2} P_{1ji}^2 + q, \\ \frac{\partial (1-\varepsilon) \bar{\rho} H_2}{\partial \tau} + \frac{\partial (1-\alpha_j) \bar{\rho} V_{2j} H_2}{\partial x_j} &= \frac{\partial (1-\varepsilon) p}{\partial \tau} + V_{2j} \frac{\partial (1-\alpha_j) p}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left((1-\alpha_j) \lambda \frac{\partial T_2}{\partial x_j} \right) + \frac{\mu (1-\alpha_j)}{2} P_{2ji}^2 - q. \end{aligned} \right. \quad (19)$$

В системе уравнений (19) τ – время, p – давление, ε – объемная доля первой жидкости в элементарном объеме, J , q , f_i – соответственно интенсивность массообмена, теплообмена и сила взаимодействия в единицу объема между жидкостями, λ – теплопроводность среды, T_1, T_2 – температуры, $H_1 = \int_{T_0}^{T_1} C_p dT$, $H_2 = \int_{T_0}^{T_2} C_p dT$ – энтальпии, P_{1ji}, P_{2ji} – тензоры напряжений жидкостей:

$$\left\{ \begin{aligned} P_{1ji} &= \left(\frac{\partial V_{1i}}{\partial x_j} + \frac{\partial V_{1j}}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial V_{1k}}{\partial x_k}, \\ P_{2ji} &= \left(\frac{\partial V_{2i}}{\partial x_j} + \frac{\partial V_{2j}}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial V_{2k}}{\partial x_k}. \end{aligned} \right. \quad (20)$$

Из системы уравнений (19) видно, что в ней флуктуирующими параметрами являются ε и α_j . В работе [Malikov, 2020] показано, что

$$\bar{\varepsilon} = \bar{\alpha}_i = 0,5. \quad (21)$$

Поэтому после осреднения системы (19) по времени получим систему

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \tau} + \frac{\partial \bar{\rho} V_{1i}}{\partial x_j} &= 2J, \\ \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \tau} + \frac{\partial \bar{\rho} V_{2i}}{\partial x_j} &= -2J, \\ \frac{\partial \bar{\rho} V_{1i}}{\partial \tau} + \frac{\partial \bar{\rho} V_{1j} V_{1i}}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} &= \frac{\partial \mu P_{1ji}}{\partial x_j} + 2f_i, \\ \frac{\partial \bar{\rho} V_{2i}}{\partial \tau} + \frac{\partial \bar{\rho} V_{2j} V_{2i}}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} &= \frac{\partial \mu P_{2ji}}{\partial x_j} - 2f_i, \\ \frac{\partial \bar{\rho} H_1}{\partial \tau} + \frac{\partial \bar{\rho} V_{1j} H_1}{\partial x_j} &= \frac{\partial p}{\partial \tau} + V_{1j} \frac{\partial p}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\lambda \frac{\partial T_1}{\partial x_j} \right) + \frac{\mu}{2} P_{1ji}^2 + 2q, \\ \frac{\partial \bar{\rho} H_2}{\partial \tau} + \frac{\partial \bar{\rho} V_{2j} H_2}{\partial x_j} &= \frac{\partial p}{\partial \tau} + V_{2j} \frac{\partial p}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\lambda \frac{\partial T_2}{\partial x_j} \right) + \frac{\mu}{2} P_{2ji}^2 - 2q. \end{aligned} \right. \quad (22)$$

Методика определения неизвестных \bar{q} , \bar{f}_i подробно изложена в работах [Malikov, 2020; Malikov, 2021]. Поэтому на выводе этих параметров не будем останавливаться. Теперь, учитывая соотношения (16), систему (22) приведем к окончательному виду [Alam et al., 2023]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \tau} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{V}_j}{\partial x_j} = 0, \\ \frac{\partial \bar{\rho} \bar{V}_i}{\partial \tau} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{V}_j \bar{V}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} = \frac{\partial \mu P_{ji}}{\partial x_j} - \frac{\partial \bar{\rho} \vartheta_j \vartheta_i}{\partial x_j}, \\ \frac{\partial \bar{\rho} \vartheta_i}{\partial \tau} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{V}_j \vartheta_i}{\partial x_j} = -\bar{\rho} \vartheta_j \frac{\partial \bar{\rho} \bar{V}_j}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \bar{\rho} \nu_{ij} \left[\left(\frac{\partial \vartheta_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \vartheta_j}{\partial x_i} \right) \right] + \bar{\rho} C_s [\text{rot } \vec{V} \times \vec{\vartheta}] - \bar{\rho} K_f \vartheta_i, \\ \frac{\partial \bar{\rho} \bar{T}}{\partial \tau} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{V}_j \bar{T}}{\partial x_j} = \frac{\partial \bar{p}}{C_p \partial \tau} + V_j \frac{\partial \bar{p}}{C_p \partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\bar{\rho} C_p \kappa \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} \right) + \frac{\mu}{2C_p} (S_{ij} S_{ij} + s_{ij} s_{ij}) - \\ - \frac{2\mu}{3C_p} \left[\left(\frac{\partial \bar{V}_i}{\partial x_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial \vartheta_i}{\partial x_i} \right)^2 \right] - \frac{\partial C_p \bar{\rho} \vartheta_j t}{C_p \partial x_j}, \\ \frac{\partial \bar{\rho} t}{\partial \tau} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{V}_j t}{\partial x_j} = \vartheta_j \frac{\partial \bar{p}}{C_p \partial x_j} - \bar{\rho} \vartheta_j \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\bar{\rho} C_p \kappa_j \frac{\partial t}{\partial x_j} \right) + \frac{\mu}{C_p} S_{ij} s_{ij} - \frac{4\mu}{3C_p} \frac{\partial \bar{V}_i}{\partial x_i} \frac{\partial \vartheta_i}{\partial x_i} - \bar{\rho} K_t t. \end{array} \right. \quad (23)$$

Здесь κ — коэффициент молекулярной теплопроводности, ν_{ij} — молярная вязкость, κ_j — молярная теплопроводность, $\bar{\rho} C_s [\text{rot } \vec{V} \times \vec{\vartheta}]$ — сила Сеффмена, K_f — коэффициент трения и K_t — коэффициент теплопередачи, которые определяются следующим образом:

$$P_{ji} = \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial V_k}{\partial x_k}, \quad K_f = C_1 \lambda_{\max} + C_2 \frac{|l \cdot \vartheta|}{l^2}, \quad K_t = C_{t1} \lambda_{\max} + C_{t2} \text{Pr} \left(\frac{T_t}{T_w} \right)^{0.5} \frac{|l \cdot \vartheta|}{l^2}, \quad (24)$$

$$\nu_{ij} = 3\nu + 2 \left| \frac{\vartheta_i \vartheta_j}{\text{def}(\mathbf{V})} \right| \text{ для } i \neq j, \quad \nu_{ii} = 3\nu + \sum_{k=1}^3 \frac{2I_k}{I} \left| \frac{\vartheta_k \vartheta_k}{\text{def}(\mathbf{V})} \right|,$$

$$I_k = \frac{\partial \rho \vartheta_k}{\partial x_k}, \quad I = |I_1| + |I_2| + |I_3|, \quad \text{def}(\mathbf{V}) = \sqrt{0,5 S_{ij} S_{ij}}, \quad k_j = 3k + 2 \frac{|t \vartheta_j|}{|\nabla T|},$$

$$S_{ij} = \frac{\partial \bar{V}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{V}_j}{\partial x_i}, \quad s_{ij} = \frac{\partial \vartheta_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \vartheta_j}{\partial x_i}.$$

Первые члены в K_f , K_t означают вклад вихревого потока, а вторые — влияние стенки на коэффициенты. В выражениях (24) эмпирические константы $C_1 = 0,7825$, $C_2 = 0,306$, $C_{t1} = 0,92$, $C_{t2} = 0,3$, $C_s = 0,2$, l — ближайшее расстояние до стенки, τ_w — напряжение трения стенки, T_w — температура стенки, T_t — температура торможения потока и Pr — молекулярное число Прандтля. Температура торможения потока определяется из соотношения

$$T_t = T \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right). \quad (25)$$

Здесь M — число Маха.

λ_{\max} является наибольшим корнем характеристического уравнения

$$\det(A - \lambda E) = 0,$$

где A является матрицей:

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{\partial \bar{V}_1}{\partial x_1} & -\frac{\partial \bar{V}_1}{\partial x_2} + C_s \zeta_3 & -\frac{\partial \bar{V}_1}{\partial x_3} + C_s \zeta_2 \\ -\frac{\partial \bar{V}_2}{\partial x_1} + C_s \zeta_3 & -\frac{\partial \bar{V}_2}{\partial x_2} & -\frac{\partial \bar{V}_2}{\partial x_3} + C_s \zeta_1 \\ -\frac{\partial \bar{V}_3}{\partial x_1} + C_s \zeta_2 & -\frac{\partial \bar{V}_3}{\partial x_2} + C_s \zeta_1 & -\frac{\partial \bar{V}_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}. \quad (26)$$

Здесь $\zeta = \text{rot } \vec{V}$.

Таким образом, система уравнений (23) является двухжидкостной моделью турбулентного сжимаемого потока. На основе этой модели рассматривается высокоскоростной слой смешивания.

3. Математическое моделирование задачи

Известно, что струйная турбулентность возникает в результате относительного движения двух потоков. Еще в XIX веке математически было доказано, что тангенциальные разрывы неустойчивы. В результате возникает турбулентность и создается пограничный слой. Таким образом, проблема слоя смешивания является неотъемлемой частью струйных течений, и проверка предложенной модели турбулентности для этой задачи имеет большое значение. В этом разделе рассматривается смешение сверхзвуковых и дозвуковых плоских струй. Рисунок 2 иллюстрирует постановку задачи. На входе в слой смешивания условия течения следующие: $M_1 = 2,35$, $T_{t1} = 360$ К, $U_1 = 616$ м/с для высокоскоростного потока и $M_2 = 0,3$, $T_{t2} = 290$ К, $U_2 = 100$ м/с для тихоходного потока. В этом случае конвективное число Маха M равно 0,86. При $M > 0,5$ поток считается сжимаемым, и ожидается, что коррекция сжимаемости за счет использования коррекции модели двух жидкостей улучшит прогноз. Экспериментальные условия этой задачи представлены в [Goebel, Dutton, 1991].

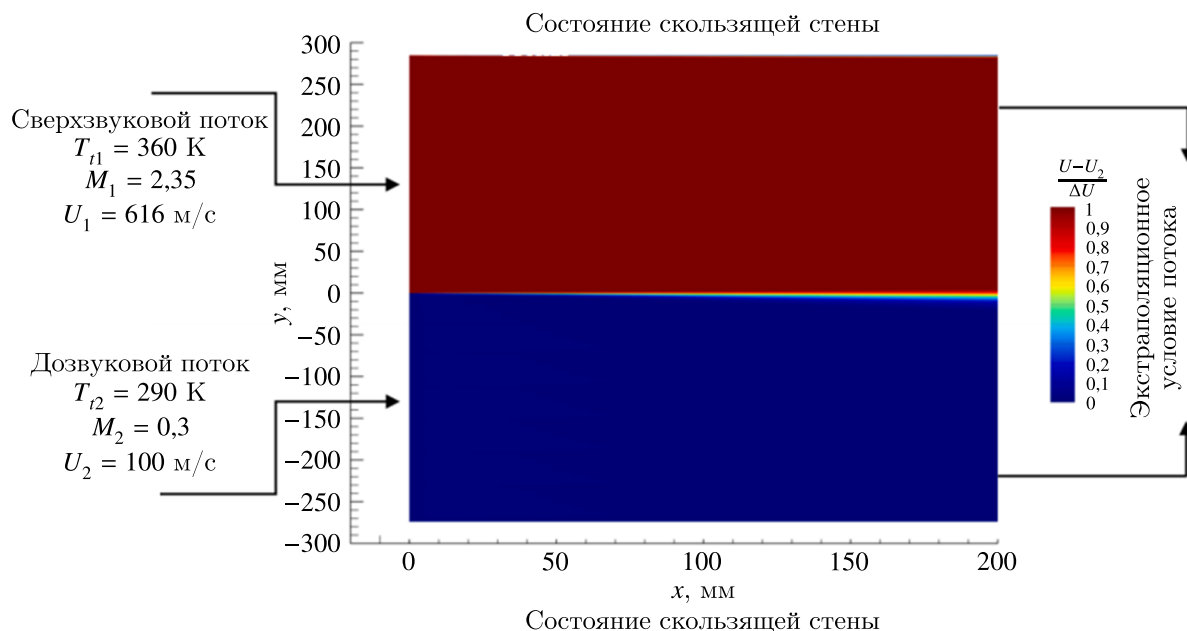


Рис. 2. Постановка задачи о смешении двух потоков

Для построения математической модели данной задачи упростим систему уравнений (23) согласно теории пограничного слоя Прандтля. Также можно пренебречь членами в источниках с производными в продольном направлении. Нас интересует стационарное решение задачи.

Поэтому для облегчения вычислительной процедуры выносим плотность из дифференциала по времени. Тогда в декартовых координатах упрощенная система уравнений будет иметь вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \frac{\partial \rho U}{\partial x} + \frac{\partial \rho V}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial U}{\partial \tau} + \frac{\partial \rho U U}{\rho \partial x} + \frac{\partial \rho U V}{\rho \partial y} + \frac{\partial p}{\rho \partial x} = \frac{\partial}{\rho \partial y} \left(\rho v \frac{\partial U}{\partial y} \right) - \frac{\partial \rho u \vartheta}{\rho \partial y}, \\ \frac{\partial V}{\partial \tau} + \frac{\partial \rho U V}{\rho \partial x} + \frac{\partial \rho V V}{\rho \partial y} + \frac{\partial p}{\rho \partial y} = \frac{\partial}{\rho \partial y} \left(\rho v \frac{\partial V}{\partial y} \right) - \frac{\partial \rho \vartheta \vartheta}{\rho \partial y}, \\ \frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{\partial \rho U u}{\rho \partial x} + \frac{\partial \rho V u}{\rho \partial y} = -(1 - C_s) \frac{\partial U}{\partial y} \vartheta + \frac{\partial}{\rho \partial y} \left(\rho v_{xy} \frac{\partial u}{\partial y} \right) - K_f u, \\ \frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} + \frac{\partial \rho U \vartheta}{\rho \partial x} + \frac{\partial \rho V \vartheta}{\rho \partial y} = -C_s \frac{\partial U}{\partial y} u + \frac{\partial}{\rho \partial y} \left(2 \rho v_{yy} \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \right) - K_f \vartheta, \\ \frac{\partial T}{\partial \tau} + \frac{\partial \rho U T}{\rho \partial x} + \frac{\partial \rho V T}{\rho \partial y} = \frac{(\gamma - 1)}{\gamma R} \left(U \frac{\partial p}{\partial x} + V \frac{\partial p}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\rho \partial y} \left(\rho k \frac{\partial T}{\partial y} - \rho t \vartheta \right) + \\ + \frac{\rho v (\gamma - 1)}{\gamma R} \left[\left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial y} \right)^2 \right], \\ \frac{\partial t}{\partial \tau} + \frac{\partial \rho U t}{\rho \partial x} + \frac{\partial \rho V t}{\rho \partial y} = \frac{(\gamma - 1) M^2}{\gamma \rho R} \left(u \frac{\partial p}{\partial x} + \vartheta \frac{\partial p}{\partial y} \right) - \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + \vartheta \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\rho \partial y} \left(\rho k_y \frac{\partial t}{\partial y} \right) + \\ + \frac{2 \rho v (\gamma - 1)}{\gamma R} \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial \vartheta}{\partial y} - K_t t. \end{array} \right. \quad (27)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \rho &= \bar{\rho}, \quad U = \bar{V}_x, \quad V = \bar{V}_y, \quad u = \vartheta_x, \quad \vartheta = \vartheta_y, \\ v_{xy} &= 3v + \frac{2u\vartheta}{\text{def } U}, \quad v_{yy} = 3v + 2 \left(\frac{\left| \frac{\partial \rho \vartheta}{\partial y} \right| \vartheta^2 + \left| \frac{\partial \rho u}{\partial y} \right| u^2}{\left| \frac{\partial \rho u}{\partial y} \right| + \left| \frac{\partial \rho \vartheta}{\partial y} \right|} \right), \\ k_y &= \frac{3v}{\text{Pr}} + \frac{2|t\vartheta|}{\sqrt{\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)^2}}, \end{aligned}$$

γ — показатель адиабаты, R — газовая постоянная.

Сверхзвуковой поток в результате торможения может сильно нагреться, что приводит к резкому изменению вязкости газа. Для учета этого эффекта в работе использована формула Сазерленда (Sutherland):

$$\nu = \left(\frac{T_\infty}{T_w} \right)^{3/2} \frac{T_w + 110,4}{T_\infty + 110,4}. \quad (28)$$

Для получения стационарного решения системы (27) использован метод установления, а для согласования давления и скоростей использована сетка с разнесенной структурой расположения узлов сетки, т.е. компоненты скорости и давления определены в разных узлах сетки (рис. 3). То есть скорости и давление находились в точках, расположенных в шахматном порядке. Коррекция скоростей на каждом временном шаге проводилась методом SIMPLE

Аппроксимация конвективных членов в системе (27) проводилась разностью против потока точностью второго порядка в явном виде. Например, аппроксимацию для конвективного члена в продольном направлении для уравнения переноса можно представить следующим образом:

$$\frac{\partial \rho U \Phi}{\partial x} = \frac{\rho_e U_e \Phi_e - \rho_w U_w \Phi_w}{\Delta x}.$$

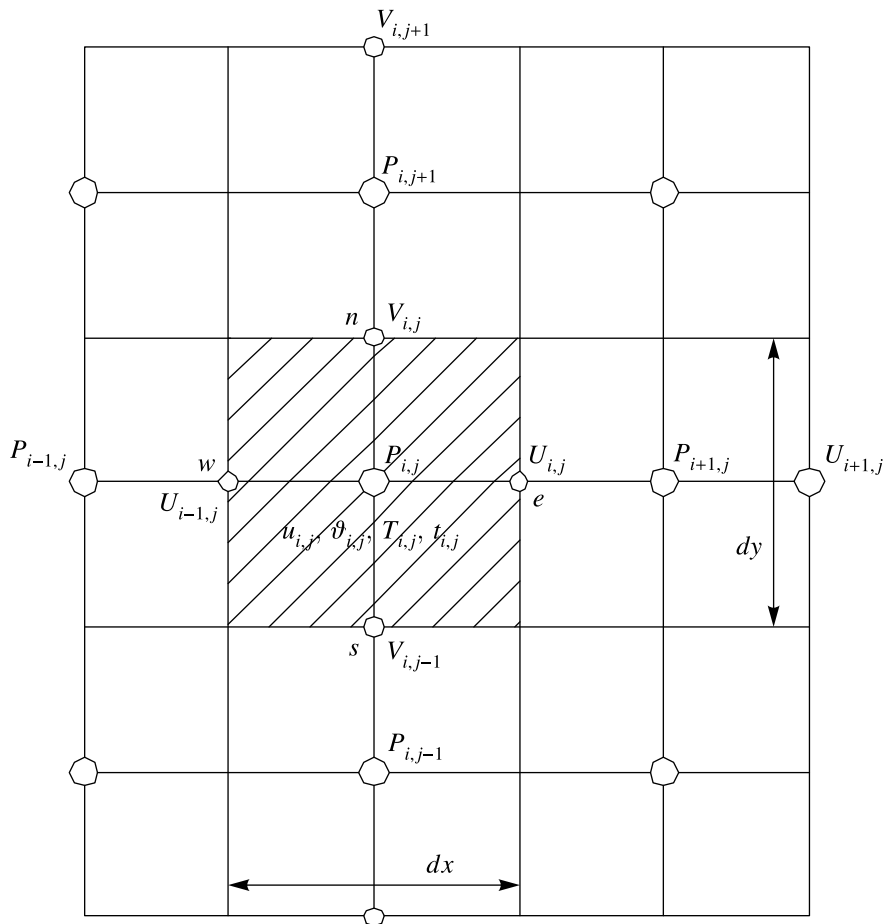
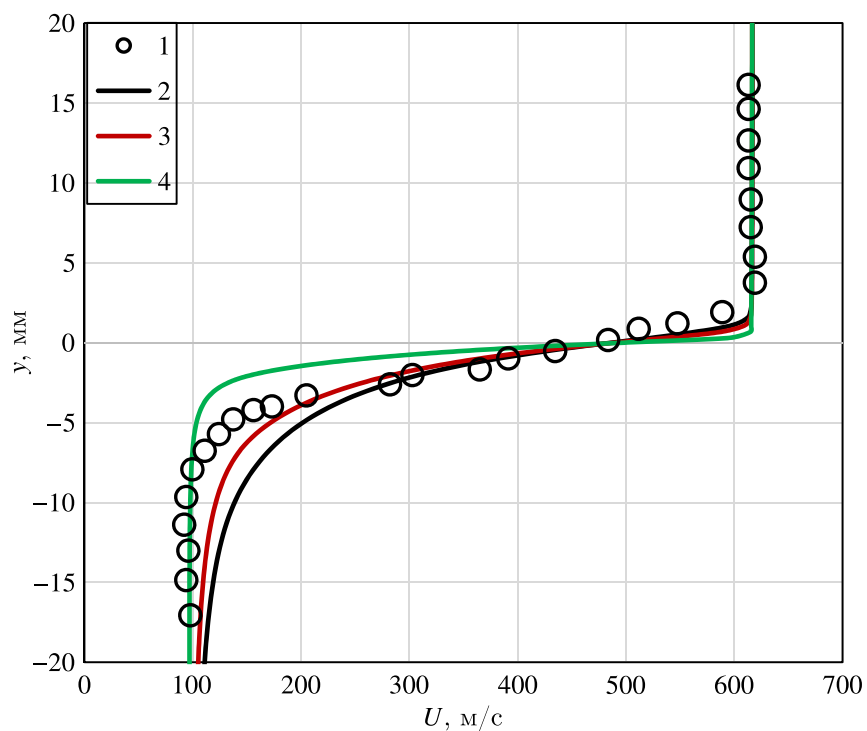


Рис. 3. Фрагмент расположения узлов и ячеек на разнесенной сетке. $U_{i,j}, V_{i,j}$ — соответственно продольная и поперечная компоненты осредненной скорости, $u_{i,j}, \vartheta_{i,j}$ — соответственно продольная и поперечная компоненты относительной скорости, $p_{i,j}$ — давление потока, $T_{i,j}$ — температура потока, dx, dy — шаги в продольном и поперечном направлениях соответственно

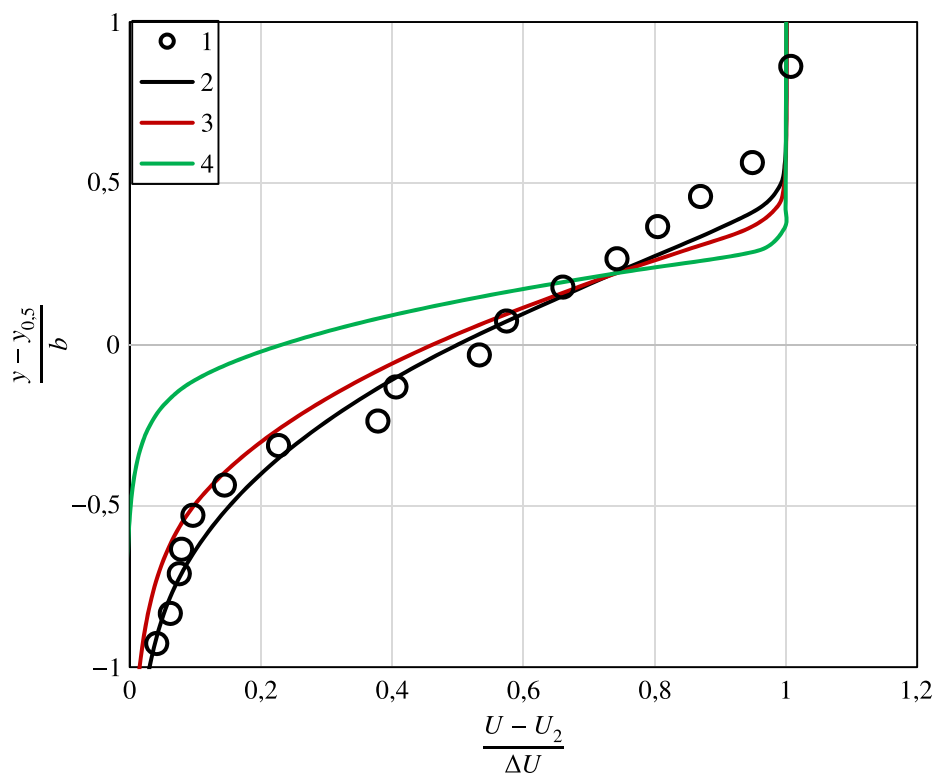
Здесь

$$\begin{aligned}
 U_e &= 0,5(U_{i,j} + U_{i+1,j}), & U_w &= 0,5(U_{i,j} + U_{i-1,j}), \\
 \rho_e &= 0,5(\rho_{i,j} + \rho_{i+1,j}), & \rho_w &= 0,5(\rho_{i,j} + \rho_{i-1,j}), \\
 \Phi_w &= \frac{3\Phi_{i-1,j} - \Phi_{i-2,j}}{2}, & \text{если } U_w > 0, \\
 \Phi_w &= \frac{3\Phi_{i,j} - \Phi_{i+1,j}}{2}, & \text{если } U_w < 0, \\
 \Phi_e &= \frac{3\Phi_{i,j} - \Phi_{i-1,j}}{2}, & \text{если } U_e > 0, \\
 \Phi_e &= \frac{3\Phi_{i+1,j} - \Phi_{i+2,j}}{2}, & \text{если } U_e < 0.
 \end{aligned}$$

Диффузионные члены в уравнениях аппроксимировались центральной разностью в неявном виде. Для численной реализации таких уравнений использовался метод прогонки.

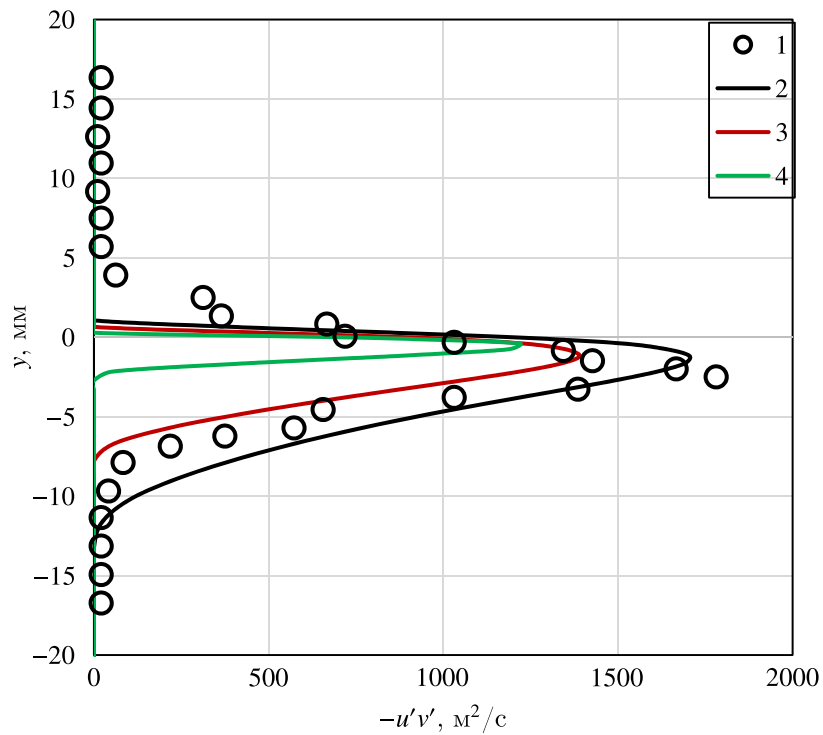


(а) Профиль продольной скорости

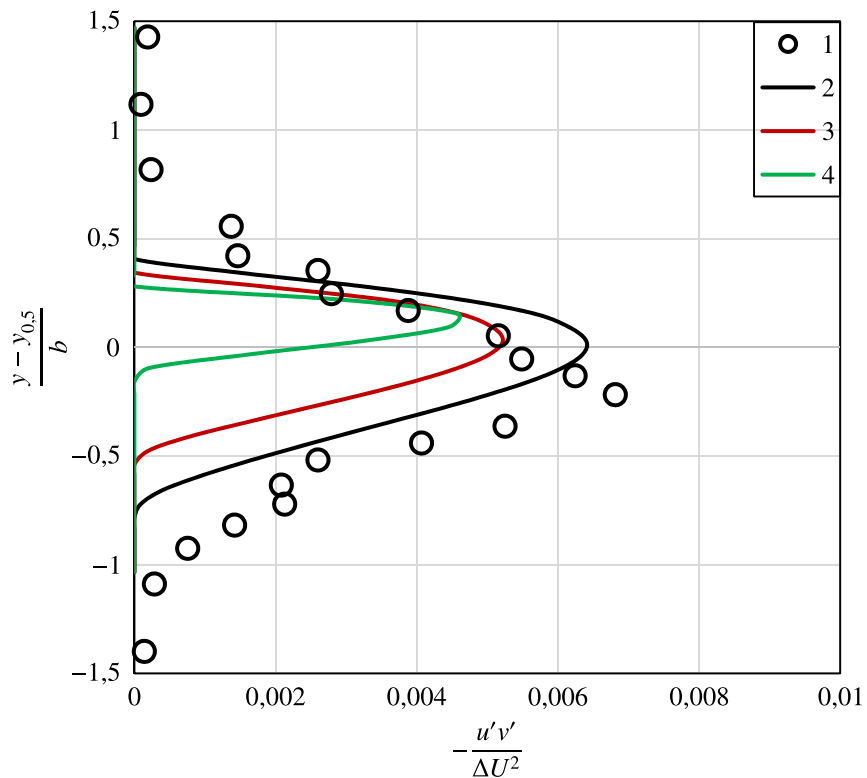


(б) Профиль безразмерной продольной скорости

Рис. 4. Сравнение результатов модели турбулентности при различных начальных относительных скоростях на расстоянии $x = 100$ мм от пластины при различных начальных относительных скоростях: 1 — эксперимент, 2 — $u = 0,01 \Delta U$, 3 — $u = 0,001 \Delta U$, 4 — $u = 0,0001 \Delta U$



(а) Профиль турбулентного касательного напряжения



(б) Профиль безразмерного турбулентного касательного напряжения

Рис. 5. Сравнение результатов модели турбулентности для профилей размерного и безразмерного касательного напряжения при $x = 100$ мм от пластины при различных начальных относительных скоростях: 1 – эксперимент, 2 – $u = 0,01 \Delta U$, 3 – $u = 0,001 \Delta U$, 4 – $u = 0,0001 \Delta U$

4. Результаты расчетов и их обсуждение

В двухжидкостной модели мерой интенсивности турбулентности являются относительные скорости u , ϑ в уравнениях (27). На рис. 4, 5 и 6 представлены численные результаты предлагаемой модели турбулентности. На рис. 4, *a* показаны результаты для профиля продольной скорости при различных начальных интенсивностях турбулентности во взаимодействующих потоках на расстоянии $x = 100$ мм после разделительной пластины. На рис. 4, *b* также показано сравнение результатов для профиля безразмерной скорости той же дистанции. Безразмерная скорость получена делением на начальную разность скоростей потоков. На рис. 5, *a* и 5, *b* показаны соответственно размерные и безразмерные турбулентные напряжения.

На рис. 5 показаны профили для размерного и безразмерного турбулентного касательного напряжения на расстоянии $x = 100$ мм от пластины при различных начальных относительных скоростях. Безразмерное турбулентное напряжение получено делением на квадрат разности скоростей как $-\frac{u'\vartheta'}{\Delta U^2}$.

Полученные результаты показывают, что хорошее соответствие численных результатов модели и экспериментальных данных наблюдается, если возмущение в безразмерной скорости равно $u = 0,01 \Delta U$. Это означает, что начальная турбулентная интенсивность приблизительно должна быть равна $I = 1\%$.

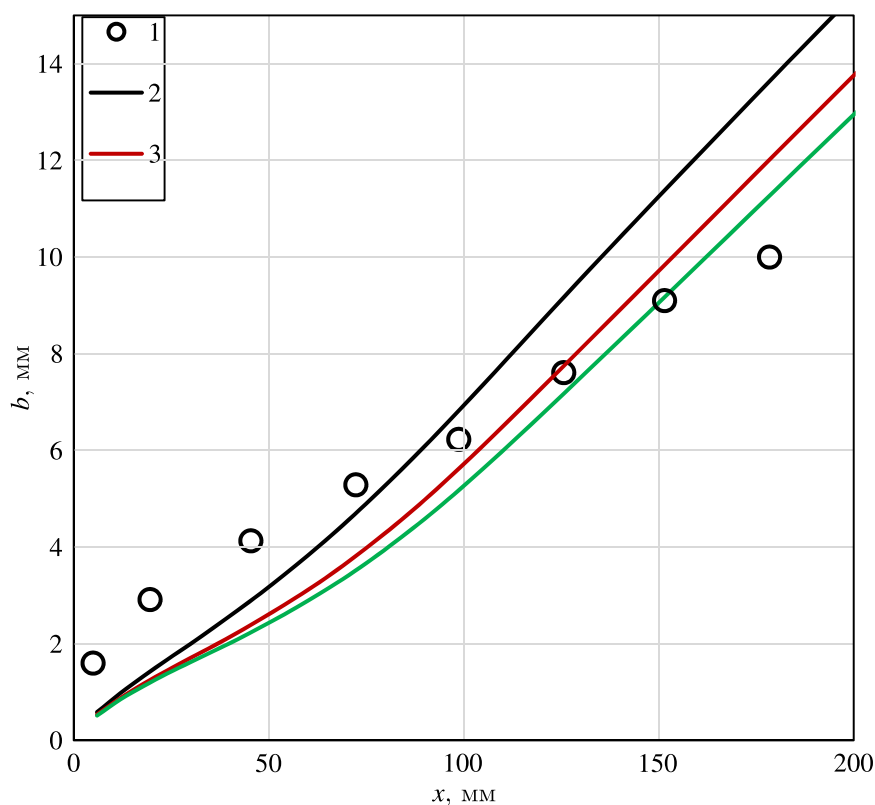


Рис. 6. Скорость изменения толщины слоя смешения при различных начальных относительных скоростях: 1 — эксперимент, 2 — $u = 0,01 \Delta U$, 3 — $u = 0,001 \Delta U$, 4 — $u = 0,0001 \Delta U$

Другим важным параметром турбулентности является увеличение толщины слоя смешения. Поэтому на рис. 6 показана скорость изменения толщины слоя смешения в направлении потока при различных начальных относительных скоростях.

На рис. 7 представлены результаты других современных моделей турбулентности для аналогичных параметров. Одна из них — модель $k - kL + J$ [Abdol-Hamid, 2019]. Данная модель

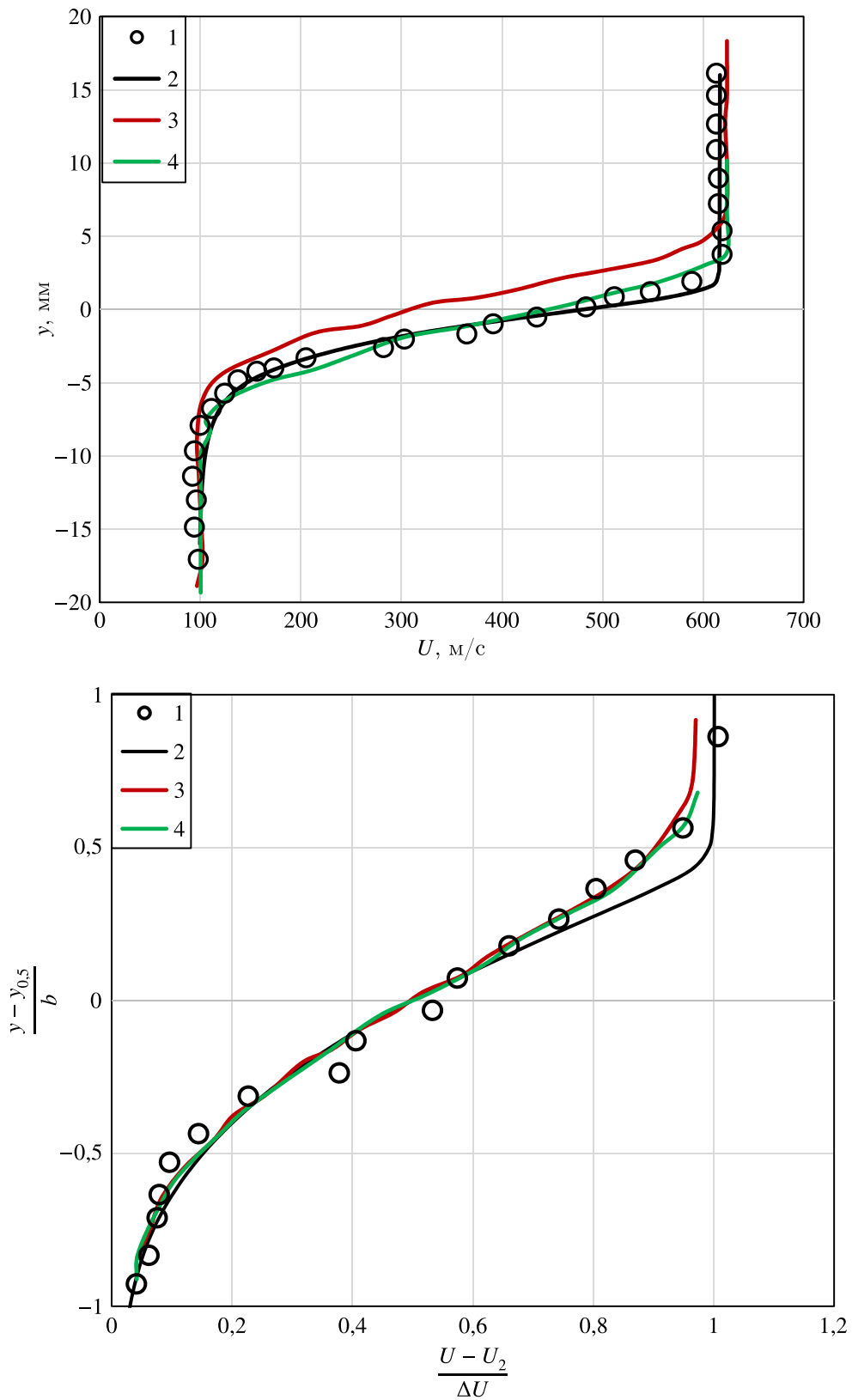


Рис. 7. Результаты различных моделей турбулентности: 1 — эксперимент, 2 — двухжидкостная модель, 3 — метод LES, 4 — модель $k - kL + J$

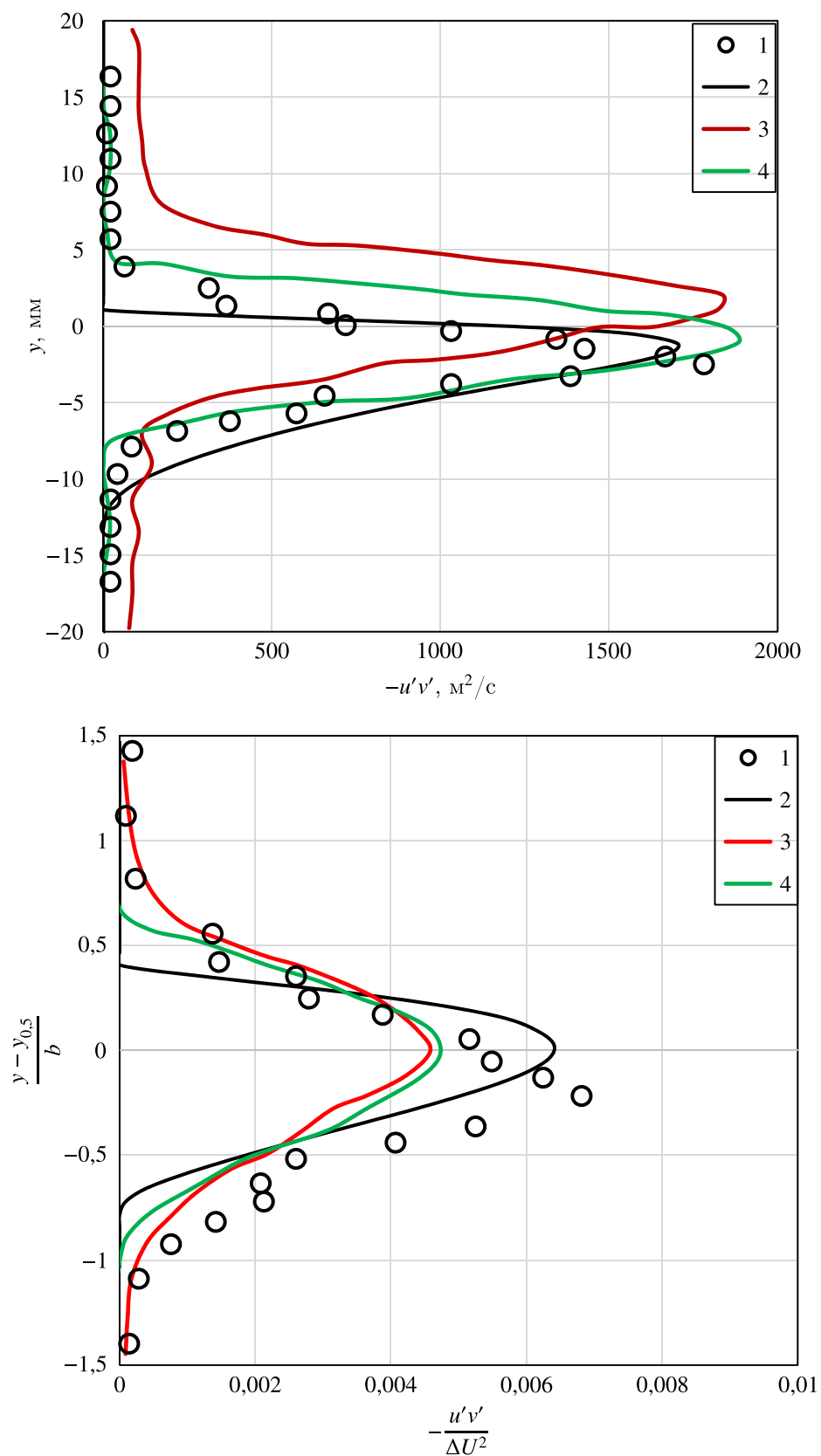


Рис. 7 (продолжение)

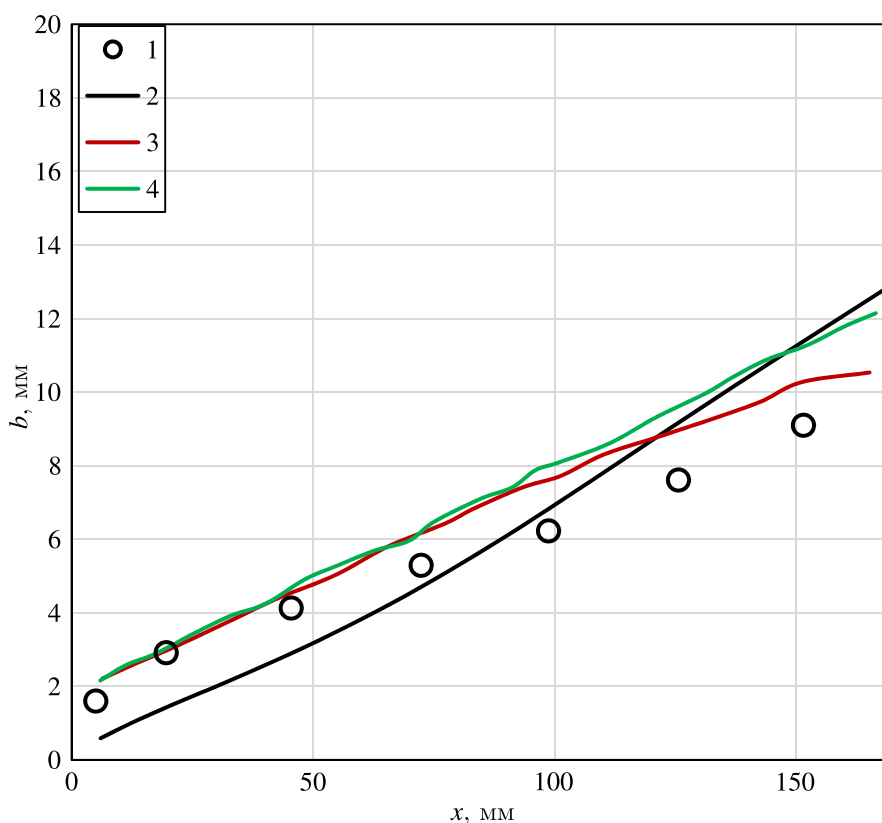


Рис. 7 (окончание)

является трехпараметрической, и в отличие от других RANS-моделей она хорошо описывает переход от ламинарного потока к турбулентному режиму течения. Поэтому модель $k - kL + J$ считается наиболее адекватной среди RANS-моделей турбулентности. На этом рисунке также показаны результаты метода LES [Mankbadi, DeBonis, Georgiadis, 2017]. Из рис. 7 видно, что результаты предлагаемой двухжидкостной модели не уступают по точности результатам других моделей. По вычислительным ресурсам, затраченным на численную реализацию поставленной задачи, можно утверждать, что двухжидкостная модель экономичнее, чем остальные модели, потому что в модели $k - kL + J$ решаемых дифференциальных уравнений больше, чем в предлагаемой модели, а для реализации метода LES, как было сказано выше, требуются мощные компьютеры.

5. Заключение

В работе проведено математическое моделирование перемешивания сжимаемых потоков на основе двухжидкостного подхода к проблеме турбулентности. Показано, что двухжидкостный подход приводит к замкнутой системе уравнений турбулентности. Результаты показывают, что предложенная двухжидкостная модель способна с достаточно высокой точностью описывать слой смешения сжимаемых потоков. Численная реализация модели показала, что она достаточно проста и имеет хорошую точность даже на грубой расчетной сетке.

Список литературы (References)

Abdol-Hamid K. S. Development of kL -based linear, nonlinear, and full Reynolds stress turbulence models // AIAA Scitech 2019 Forum. — 2019. — P. 1878.

- Alam M. M. et al.* Mathematical model of turbulent compressible flow based on two-fluid approach // Journal of the Taiwan Institute of Chemical Engineers. — 2023. — Vol. 144. — P. 104742.
- Bardina J. et al.* Turbulence modeling validation // 28th Fluid dynamics conference. — 1997. — P. 2121.
- Elliott G., Samimy M.* Compressibility effects in free shear layers // Physics of Fluids A: Fluid Dynamics. — 1990. — Vol. 2, No. 7. — P. 1231–1240.
- Goebel S. G., Dutton J. C.* Experimental study of compressible turbulent mixing layers // AIAA journal. — 1991. — Vol. 29, No. 4. — P. 538–546.
- Gropengiesser H.* Study on the stability of boundary layers and compressible fluids // NASA TT F-12. — 1970. — Vol. 786. — P. 36.
- Lui C., Lele S.* Direct numerical simulation of spatially developing, compressible, turbulent mixing layers // 39th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit. — 2001. — P. 291.
- Malikov Z. M.* Mathematical model of turbulence based on the dynamics of two fluids // Applied Mathematical Modelling. — 2020. — Vol. 82. — P. 409–436.
- Malikov Z. M.* Mathematical model of turbulent heat transfer based on the dynamics of two fluids // Applied Mathematical Modelling. — 2021. — Vol. 91. — P. 186–213.
- Malikov Z. M.* Modeling a turbulent multicomponent fluid with variable density using a two-fluid approach // Applied Mathematical Modelling. — 2022. — Vol. 104. — P. 34–49.
- Malikov Z. M., Nazarov F. K.* Numerical study of a two-phase flow in a centrifugal dust collector based on a two-fluid turbulence model // Mathematical Models and Computer Simulations. — 2021. — Vol. 13. — P. 790–797.
- Malikov Z. M., Nazarov F. K.* Study of an immersed axisymmetric turbulent jet in comparative analysis of turbulence models // Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences. — 2022. — No. 2. — P. 101.
- Mankbadi M. R., DeBonis J. R., Georgiadis N. J.* Large-eddy simulation of a compressible mixing layer and the significance of inflow turbulence // 55th AIAA aerospace sciences meeting. — 2017. — P. 0316.
- Nelson C., Menon S.* Unsteady simulations of compressible spatial mixing layers // 36th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit. — 1998. — P. 786.
- Pantano C., Sarkar S. A.* A study of compressibility effects in the high-speed turbulent shear layer using direct simulation // Journal of fluid mechanics. — 2002. — Vol. 451. — P. 329–371.
- Papamoschou D., Roshko A.* The compressible turbulent shear layer: an experimental study // Journal of fluid Mechanics. — 1988. — Vol. 197. — P. 453–477.
- Patankar S.* Numerical heat transfer and fluid flow. — CRC press, 2018.
- Sandham N. D.* A numerical investigation of the compressible mixing layer. — Stanford University, 1990.
- Sharma A., Bhaskaran R., Lele S.* Large-eddy simulation of supersonic, turbulent mixing layers downstream of a splitter plate // 49th AIAA Aerospace Sciences Meeting Including the New Horizons Forum and Aerospace Exposition. — 2011. — P. 208.
- Vreman A.* Direct and large-eddy simulation of the compressible turbulent mixing layer. — 1995.
- Vreman B., Geurts B., Kuerten H.* Subgrid-modelling in LES of compressible flow // Applied scientific research. — 1995. — Vol. 54. — P. 191–203.