

## Вероятностные аспекты метода «компьютерной аналогии» для решения дифференциальных уравнений

В. В. Аристов<sup>1,a</sup>, А. В. Строганов<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Вычислительный центр им. А. А. Дородницына РАН,  
119333, г. Москва, ул. Вавилова, д. 40

<sup>2</sup> Московский государственный институт радиотехники, электроники и автоматики  
(технический университет),  
119454, г. Москва, пр. Вернадского, д. 78

E-mail: <sup>a</sup> aristov@ccas.ru

Получено 27 марта 2008 г.

Развивается и обосновывается метод, позволяющий получить явную форму решения в виде отрезков рядов по степеням шага аргумента. Формализуется алгоритм, элементы которого используют аналогию с представлением и обработкой чисел в компьютере: ограничение в разрядной сетке и переброс разрядов. При перебросе разряда выявляются фрактально-стохастические свойства алгоритма, дающие возможность осреднять неизвестные промежуточные шаги в старших разрядах. Строятся решения нелинейных дифференциальных уравнений и системы уравнений.

Ключевые слова: метод «компьютерной аналогии», решение дифференциальных уравнений, задача Коши

### Probabilistic aspects of “computer analogy” method for solving differential equations

V. V. Aristov<sup>1</sup>, A. V. Stroganov<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Dorodnicyn Computing Center of the RAS, CCRAS, Vavilov str. 40, Moscow, 119333, Russia*

<sup>2</sup> *Moscow State Institute of Radioengineering, Electronics and Automation (Technical University), Vernadskogo av. 78, Moscow, 119454, Russia*

**Abstract.** — Method which allows to obtain explicit form of the solution as a part of power series of the argument step is developed. Formalization of characteristics of the algorithm analogous to operations of a computer is performed. The operation of transfer from one rank to another leads to a probability scheme of the algorithm that averages unknown intermediate steps in higher ranks of the series. The stochastic characteristics of the method are studied and illustrated. Examples of solving nonlinear equations and systems of nonlinear differential equations are presented.

Key words: “computer analogy” method, differential equations solving, Cauchy problem

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2009, vol. 1, no. 1, pp. 21–31 (Russian).

## Введение

В [1] был предложен новый подход для построения решений дифференциальных уравнений с использованием определенной аналогии с работой компьютера. Целью такого полуаналитического (в идеале аналитического) метода является исключение промежуточных шагов в рекуррентных формулах разностных схем для решения дифференциальных уравнений (как при получении формул сумм арифметической или геометрической прогрессии). Для этого при формализации фундаментальных свойств ЭВМ — фиксированного количества разрядов и переброса из разряда в разряд с использованием руководящей разностной схемы строилось решение в виде отрезка ряда по степеням шага аргумента. В настоящей работе изучается, развивается и обосновывается предложенный метод. Определяются этапы построения решения. При обосновании разделяются детерминистическая и вероятностная части алгоритма. Заметим, что любые вносимые ошибки не должны превышать ошибку разностной схемы, поскольку точность метода определяется точностью выбранной схемы. Применяются статистические процедуры, которые вносят дополнительные ошибки. Поэтому полученная схема требует определения сходимости к решению задачи Коши исходного дифференциального уравнения. Иллюстрируются вероятностные свойства алгоритма, связанные с выделением дробной части числа, выявляются фрактально-стохастические свойства. Демонстрируется, как строится решение уравнения, не имеющего квадратуры, а также решение системы кинетических нелинейных уравнений.

## Основные этапы построения решения

*Формулировка проблемы.* Изучается задача Коши для автономного уравнения (такие уравнения изучаются в приводимых примерах, но метод может быть применен и к неавтономным уравнениям):

$$\frac{dy}{dt} = G(y), y(0) = A.$$

Здесь  $G(y)$  — бесконечно-дифференцируемая функция с ограниченными производными. В качестве руководящей разностной схемы используем простейшую явную схему Эйлера первого порядка (аргумент будем называть для краткости временем). Более сложная разностная схема (например, схема Рунге–Кутты) позволила бы получить более точную, но и более сложную реализацию метода. Схема имеет вид:

$$y_{n+1} = y_n + \tau G(y_n), \quad y_0 = A. \quad (1)$$

Полагается, что шаг по времени  $\tau$  выбран столь малым, что обеспечивается устойчивость разностной схемы и, значит, ее сходимость. Применяя последовательно формулу (1), раскладывая на каждом шаге функцию  $G(y)$  в ряд Тейлора и оставляя  $p$  членов, получим на  $n$ -м шаге выражение в виде

$$y_n = \sum_{i=0}^p a_{i,n} \tau^i = a_{0,n} + \sum_{i=1}^p a_{i,n} \tau^i. \quad (2)$$

Строго говоря, отбрасывание бесконечного остатка ряда возможно, если ряд сходящийся. Чтобы гарантировать это, введем следующую процедуру «переброса разрядов», обеспечивающую сходимость отрезка ряда (2).

*Операция переброса разрядов.* Потребуем для обеспечения сходимости, чтобы коэффициенты при всех степенях  $\tau$  в (2) были меньше  $1/\tau$ . Если оказывается, что это не так, то берется целая часть коэффициента и прибавляется к коэффициенту меньшего разряда, а прежний коэффициент заменяется остатком от деления своего значения на  $1/\tau$  (операция mod). Достаточно использовать неотрицательные степени шага, поскольку уменьшением  $\tau$  можно добиться, что-

бы коэффициент при  $\tau^0$  был меньше  $1/\tau$  (хотя этот коэффициент может быть очень большим числом). Пусть каждый коэффициент изменяется на полуинтервале  $[0; 1/\tau)$ , и пусть  $0 < \tau < 1$ . Без потери общности полагаем  $1/\tau$  целым числом. Тогда представление решения (2) имеет вид

$$y_n = (a_{0,n} + \delta_{01,n})\tau^0 + \sum_{i=1}^p ((a_{i,n} + \delta_{i;i+1,n}) \bmod(1/\tau))\tau^i.$$

Здесь функция переброса  $\delta_{i;i+1,n} = [(a_{i+1,n} + \delta_{i+1;i+2,n})\tau]$  определяет величину, переносимую из  $i+1$  в  $i$ -й разряд. Естественно, полагаем  $\delta_{p;p+1,n} = 0$ . В приводимых примерах будут встречаться лишь индексы 0;1, 1;2, 2;3, поэтому для простоты везде будем использовать запись без точки с запятой: 01, 12, 23.

*Выбор необходимого числа слагаемых отрезка ряда.* В частичной сумме ряда (2) мы ограничили количество членов величиной  $p$ , выбираемой из условия сходимости такого решения к численному решению по схеме (1). Подставляем (2) в функцию  $G(y_n)$  и раскладываем ее в ряд Тейлора в окрестности  $a_{0,n}$ :

$$G(y_n) = G(a_{0,n}) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\sum_{i=1}^p a_{i,n} \tau^i)^k}{k!} \frac{d^k G(y)}{dy^k} \Big|_{y=a_{0,n}}.$$

Тогда представление решения из (1) на  $(n+1)$ -м слое по времени имеет вид

$$y_{n+1} = a_{0,n} + \sum_{i=1}^p a_{i,n} \tau^i + \tau G(a_{0,n}) + \tau \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\sum_{i=1}^p a_{i,n} \tau^i)^k}{k!} \frac{d^k G(y)}{dy^k} \Big|_{y=a_{0,n}}.$$

С помощью этих формул мы находим  $p$ . Обозначим через  $\Delta_n$  остаточную сумму, которую отбрасываем на  $n$ -м шаге:

$$\Delta_n = \sum_{i=p+1}^{\infty} a_{i,n} \tau^i.$$

Этот остаток вносит ошибку в решение. Будем строить решение так, чтобы ошибка при переходе от  $n$ -го к  $n+1$ -му слою по времени не превышала ошибку, вносимую руководящей разностной схемой. Для схемы Эйлера первого порядка должно выполняться условие  $\Delta_n = O(\tau^2)$ .

*Определение характера влияния различных членов приближения в частичной сумме ряда.* Так как  $a_{i,n} < 1/\tau$ , то в (2) основной вклад вносит только слагаемое  $a_{1,n}\tau$  (член линеаризации), а также  $a_{0,n}$ . Остальные слагаемые (с множителями  $\tau^2, \tau^3, \dots, \tau^p$ ) стремятся к нулю при  $\tau \rightarrow 0$ . Но эти члены нельзя отбрасывать, поскольку они дают вклад в правильное приближение, определяя функции переброса. Все вместе эти члены на каждом слое вносят вклад  $O(\tau)$ .

*Определение вероятностей перебросов  $\delta_{12,n}$ .* При уменьшении  $\tau$  коэффициенты при нелинейных степенях  $\tau$  начинают проявлять вероятностные свойства, поэтому используется статистический подход. Функция переброса  $\delta_{12,n}$  является единственной величиной, явно определяющей коэффициент линеаризации  $a_{1,n}$ , в ней косвенно проявляется влияние остальных коэффициентов. Находим теоретическую (комбинаторную) вероятность  $P(a_{1,n})$  переброса  $\delta_{12,n}$  при данном значении коэффициента линеаризации  $a_{1,n}$ . Предполагая, что частота перебросов  $\delta_{12}$  при уменьшении  $\tau$  стремится к вероятности переброса на данном слое по  $a_{1,n}$ , заменяем частоту значением

$P(a_{1,n})$ . Мы не рассматриваем изменение коэффициента  $a_{0,n}$ , так как в приведенных примерах оказывается, что переброс  $\delta_{01,n}$  всегда равен нулю.

*Зависимость  $n$  от значения коэффициента линеаризации  $a_{1,n}$ .* Находим зависимость  $n_i$  от  $a_1 \equiv i$  как  $n_i = f(i, \tau)$ . Так строится обратная зависимость для решения исходной задачи. Тем самым может быть восстановлена прямая зависимость на интервалах монотонности искомой функции.

*Предельный переход (обоснование правильности полученного решения).* Решение исходной задачи получается предельным переходом в построенной аппроксимации при измельчении шага  $\tau$ . Ось ординат ( $a_{1,n}$ ) разбивается на равные части, поэтому  $y = i\tau$ , соответственно  $t = n_i\tau$ . Фиксируем точку  $y$ . Рассматриваем предел  $t(y) = \lim_{i \rightarrow \infty} f(i, y/i)$ .

## Базовая задача для изучения свойств алгоритма

Рассмотрим задачу Коши

$$dy/dt = -y^2, \quad y(0) = A, \quad (3)$$

с аналитическим решением  $y(t) = A/(1 + At)$  (в [1] приводился пример для  $A = 1$ , но так как уравнение нелинейное, то решение нельзя получить перенормировкой). Рассмотрим алгоритм построения решения. Применяем схему Эйлера

$$y_{n+1} = y_n - y_n^2 \tau. \quad (4)$$

Решение на  $n$ -м шаге в виде (2), для удобства вынесем множитель  $A$  (тогда обозначения будут несколько отличными от принятых в (2)):

$$y_n = A(a_{0,n} \tau^0 - a_{1,n} \tau^1 + a_{2,n} \tau^2 - a_{3,n} \tau^3). \quad (5)$$

Покажем, что при удерживании слагаемых в представлении решения (4) до  $\tau^3$  включительно на каждом шаге вносится ошибка, равная  $O(\tau^2)$ .

Подставим (5) в (4) и обозначим через  $\Delta_{n+1}$  отбрасываемые слагаемые. Тогда

$$\Delta_{n+1} = A^2(-2a_{0,n}a_{3,n}\tau^4 - 2a_{1,n}a_{2,n}\tau^4 + a_{2,n}^2\tau^5 + 2a_{1,n}a_{3,n}\tau^5 - 2a_{2,n}a_{3,n}\tau^6 + a_{3,n}^2\tau^7).$$

Так как коэффициенты  $a_{i,n}$  меньше  $1/\tau$ , получим

$$\Delta_{n+1} = A^2(O(\tau^2) + O(\tau^3) + O(\tau^4) + O(\tau^5)) = A^2O(\tau^2).$$

Пусть  $O(\tau^2) = C\tau^2$ , где постоянная должна удовлетворять условию  $C \ll 1/\tau$ . Тогда для обеспечения сходимости потребуем выполнения  $A^2C\tau^2 = O(\tau^2) \Rightarrow A^2 \ll 1/\tau$ . Следовательно, должно выполняться условие:  $\tau \ll 1/A^2$ .

Подставляя (5) в (4) и применяя механизм переброса разрядов, получим

$$y_{n+1} = A((a_{0,n} - \delta_{01,n+1})\tau^0 - ((a_{1,n} + Aa_{0,n}^2 - \delta_{12,n+1}) \bmod(1/\tau))\tau^1 + \\ + ((a_{2,n} + 2Aa_{0,n}a_{1,n} - \delta_{23,n+1}) \bmod(1/\tau))\tau^2 - ((a_{3,n} + 2Aa_{0,n}a_{2,n} + Aa_{1,n}^2) \bmod(1/\tau))\tau^3).$$

Квадратными скобками будем обозначать целую часть числа. Тогда

$$\begin{aligned}\delta_{01,n+1} &= [(a_{1,n} + Aa_{0,n}^2 - \delta_{12,n+1})\tau], \quad \delta_{12,n+1} = [(a_{2,n} + 2Aa_{0,n}a_{1,n} - \delta_{23,n+1})\tau], \\ \delta_{23,n+1} &= [(a_{3,n} + 2Aa_{0,n}a_{2,n} + Aa_{1,n}^2)\tau].\end{aligned}$$

Найдем выражения для коэффициентов на  $n + 1$ -м слое по времени:

$$\begin{aligned}a_{0,n+1} &= a_{0,n} - \delta_{01,n+1}, \quad a_{1,n+1} = (a_{1,n} + Aa_{0,n}^2 - \delta_{12,n+1}) \bmod(1/\tau), \\ a_{2,n+1} &= (a_{2,n} + 2Aa_{0,n}a_{1,n} - \delta_{23,n+1}) \bmod(1/\tau), \quad a_{3,n+1} = (a_{3,n} + 2Aa_{0,n}a_{2,n} + Aa_{1,n}^2) \bmod(1/\tau).\end{aligned}$$

Коэффициент линеаризации  $a_{1,n}$ , играющий основную роль при построении решения, определяется функцией переброса  $\delta_{12,n}$  следующим образом:

$$a_{1,n} = \sum_{i=1}^n (A - \delta_{12,i}).$$

Можно показать, что при любом  $n$  в нашей задаче  $\delta_{01,n} = 0 \Rightarrow a_{0,n} = 1$ . При подстановке  $\delta_{23,n+1}$  в  $\delta_{12,n+1}$  и использовании развернутой записи целой части получим

$$\delta_{12,n+1} = [a_{2,n}\tau + 2Aa_{1,n}\tau - a_{3,n}\tau^2 - 2Aa_{2,n}\tau^2 - Aa_{1,n}^2\tau^2 + \theta\tau],$$

где  $\theta$  — соответствующая дробная часть, которую полагаем случайной величиной, распределенной в пределах  $0 \leq \theta < 1$ . Также полагаем  $a_{2,n}$  и  $a_{3,n}$  — случайными величинами (целочисленными). Обозначим через  $\lambda_{12,n+1}$  часть выражения в квадратных скобках, в которую не входят случайные (при наших предположениях) параметры:

$$\lambda_{12,n+1}(a_{1,n}) = 2Aa_{1,n}\tau - Aa_{1,n}^2\tau^2 = Aa_{1,n}\tau(2 - a_{1,n}\tau).$$

Тогда  $\delta_{12,n+1}$  можно представить в виде

$$\delta_{12,n+1} = [a_{2,n}\tau - a_{3,n}\tau^2 - 2Aa_{2,n}\tau^2 + \theta\tau + \{\lambda_{12,n+1}\}] + [\lambda_{12,n+1}] \equiv \xi_{12,n+1} + [\lambda_{12,n+1}].$$

Здесь  $\xi_{12,n+1}$  — «недетерминированная» часть  $\delta_{12,n+1}$ , т. е. часть, содержащая случайные параметры  $(a_{2,n}, a_{3,n})$ . Находим комбинаторную вероятность того, что  $\xi_{12,n+1} = 1$ , т. е. отношение количества комбинаций случайных параметров, при которых  $\xi_{12,n+1} = 1$  к общему количеству комбинаций. Вероятность имеет вид (пренебрегаем членами  $O(\tau^3)$ )

$$P(a_{1,n}) = \frac{\{\lambda_{12,n+1}(a_{1,n})\} - 2A\tau - (1 - \tau)\tau / 2}{1 - 2A\tau}.$$

Полагая эту вероятность равной частоте перебросов  $\delta_{12,n+1}$ , находим зависимость номера шага  $n_i$  от значения  $a_{1,n} \equiv i$  (подробности см. в [1]):

$$n_i = \frac{1}{A} + \sum_{m=1}^{i-1} \frac{1}{A - [Am\tau(2 - m\tau)] - P(m)}.$$

Получена обратная зависимость для члена линеаризации. Тем самым решена исходная задача — прямая зависимость восстанавливается для монотонной функции.

## Вопросы обоснования метода. Стохастические свойства алгоритма

Продemonстрируем, что получается аналитическое решение исходной задачи в предельном переходе при  $\tau \rightarrow 0$ . Для простоты положим  $A = 1$ . Тогда

$$n_i = 1 + \sum_{m=1}^{i-1} \frac{2(1-2\tau)}{2(m\tau-1)^2 - \tau - \tau^2}.$$

Рассмотрим предельный переход к решению при  $\tau \rightarrow 0$  и фиксированном  $y$ :

$$t(y) = 2 \frac{i}{y} \sum_{m=1}^{i-1} \frac{1}{2(i/y-m)^2}.$$

После замены сумм интегралами, имеющими квадратуры, получим

$$t(y) = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{i}{y} \left( \sum_{m=1}^{i/y} \frac{1}{m^2} - \sum_{m=1}^{i/y-1} \frac{1}{m^2} \right) = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{i}{y} \left( \frac{1}{i/y-i} - \frac{1}{i/y} \right) = \frac{y}{1-y}.$$

С учетом того, что  $Y = 1 - y$ , для прямой зависимости  $Y = 1/(1+t)$ , что соответствует аналитическому решению исходной задачи Коши.

Выясним характер стохастических свойств алгоритма. В [1] отмечалось, что коэффициенты  $a_{i,n}$  в представлении решения являются модификацией линейного конгруэнтного генератора, применяемого для генерации псевдослучайных чисел в ЭВМ, вида

$$x_m = (bx_{m-1} + c) \bmod P,$$

где  $b$ ,  $c$  и  $P$  — целые числа, причем  $b, c < P$ . Помимо линейной зависимости коэффициентов  $a_{i,n}$  от своих предыдущих значений они также имеют достаточно сложную зависимость от других коэффициентов на предыдущем шаге, причем зависимость может быть как прямой, так и более сложной — через функции переброса. Коэффициент линеаризации не проявляет каких-либо случайных свойств, но его изменения отражаются различным образом во всех величинах. Исследовать «качество» случайных чисел можно, используя критерий хи-квадрат (см. [2]). В нашем случае

$$V = \frac{1}{t} \sum_{s=1}^{1/\tau} Y_s^2 - \frac{t}{\tau},$$

где  $s$  — номер события,  $Y_s$  — наблюдаемое количество событий за  $n$  испытаний,  $t$  — время. Общее количество испытаний  $n$  равно  $t/\tau$ . Вероятность  $p$  значений на полуинтервале  $[0; 1/\tau)$  равна  $1/\tau$ . Применяя статистику хи-квадрат к коэффициентам  $a_{i,n}$ , обнаруживаем, что свойства случайности в  $a_{2,n}$  проявляются на ограниченном отрезке по времени с постепенным переходом к регулярному распределению (рис. 1). Это не ограничивает применимость вероятностного подхода при анализе, так как ввиду убывающего периода с уменьшением  $\tau$  происходит заметание плоскости  $(a_2, n)$ . Свойства случайности коэффициента  $a_{3,n}$  не нарушаются на всем интервале (при  $a_{1,n} < 1/\tau$ ) и улучшаются с уменьшением  $\tau$ . Так, при шаге  $\tau = 0,0001$  и  $t = 10$  вероятность совпадения «хи-квадрат»-статистик абсолютно случайной последовательности и последовательности, определяемой  $a_{3,n}$ , превышает 63 %.

Функции переброса, определяемые коэффициентами  $a_{i,n}$ , проявляют свойства самоподобия при уменьшении  $\tau$ . На рис. 2 показана зависимость функции переброса  $\delta_{23,n}$  от времени (на разных отрезках). Аномальные скачки вверх обусловлены переходом на новый слой  $a_{1,n}$ , «ступен-

чатое» убывание управляется коэффициентом  $a_{2,n}$ , а небольшие пульсации на каждой «ступеньке» — следствие влияния  $a_{3,n}$ . Если зафиксировать значение коэффициента линеаризации  $a_{1,n}$  и уменьшать шаг  $\tau$ , то видна определенная аналогия с увеличением ограниченной области фрактального объекта. Производя последовательно указанную операцию «увеличения» при фиксированном значении  $a_{1,n}$ , можно видеть черты стохастического фрактала для функции  $\delta_{23,n}$  (рис. 3). Для детализации зависимость показана на рис. 3 также на малых отрезках по времени. Все это демонстрирует возможность использования статистических представлений и замены комбинаторной вероятности частотной.

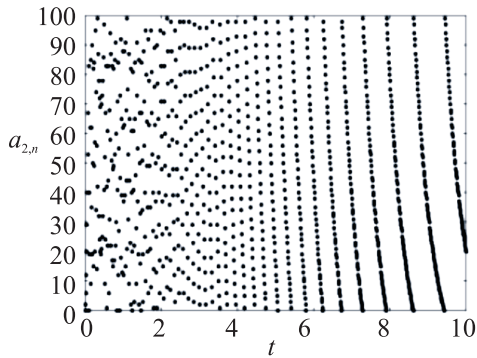


Рис. 1. Зависимость  $a_{2,n}$  от  $t$  ( $A = 1$ )

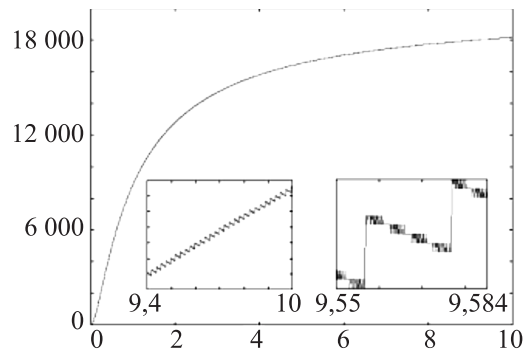


Рис. 2. Зависимость  $\delta_{23,n}$  от  $t$  ( $A = 15$ )

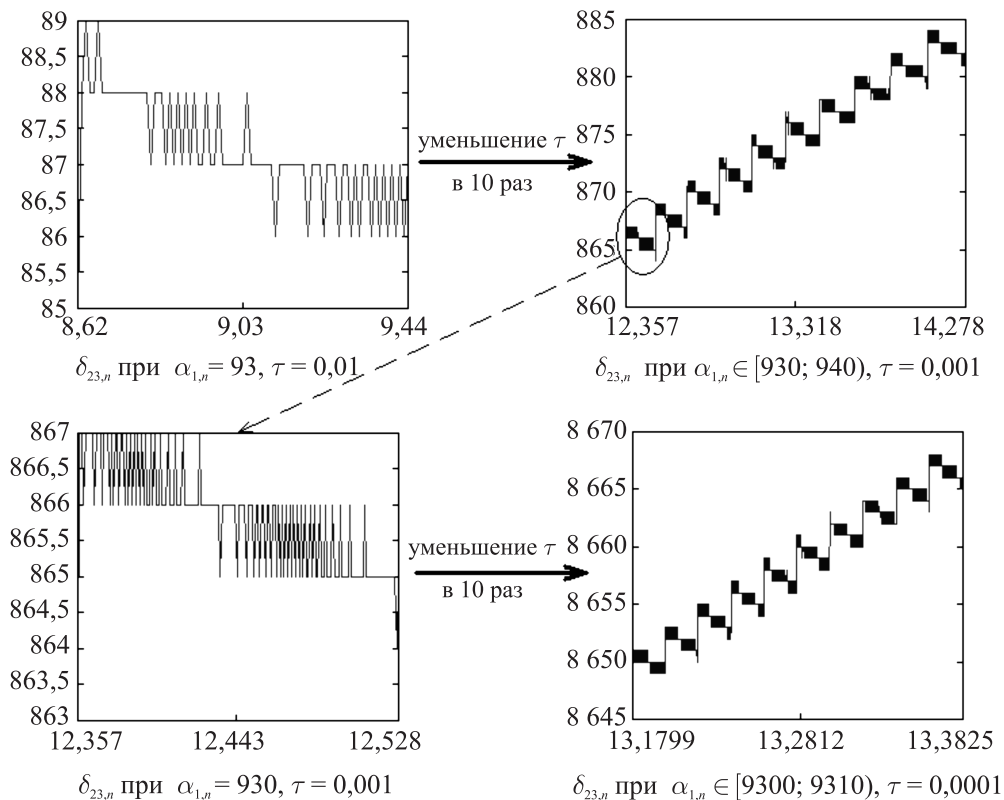


Рис. 3. Применение последовательного «увеличения» (т. е. уменьшения  $\tau$  при фиксированном слое по  $a_{1,n}$ ) к функции переброса  $\delta_{23,n}$

### Задача, не имеющая аналитического решения

Рассмотрим задачу Коши, не разрешимую в элементарных функциях:

$$\frac{dy}{dt} = -\ln y, \quad y(0) = 2. \quad (6)$$

Для схемы Эйлера  $y_{n+1} = y_n - \tau \ln y_n$ ,  $y_0 = 2$ , как легко видеть, аналогично предыдущему примеру  $a_{0,n} \equiv y_0$ , причем решение — отрезок ряда до  $l$ -го члена:

$$y_n = y_0 + \sum_{i=1}^l (-1)^i a_{i,n} \tau^i.$$

Оценим величину  $l$ , в отличие от задачи (3)  $l$  будет зависеть от  $\tau$ . Имеем

$$y_{n+1} = y_0 + \sum_{i=1}^l (-1)^i a_{i,n} \tau^i - \tau \ln(y_0 + \sum_{i=1}^l (-1)^i a_{i,n} \tau^i) = y_0 + \sum_{i=1}^l (-1)^i a_{i,n+1} \tau^i + \Delta_{n+1}. \quad (7)$$

Связь между коэффициентами на разных слоях по времени не очевидна, получаем ее в процессе оценки остатка. Используем разложение логарифма в ряд Тейлора:

$$y_n = y_0 + \sum_{i=1}^l (-1)^i a_{i,n} \tau^i - \tau \ln y_0 - \tau \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{m y_0^m} \left( \sum_{i=1}^l (-1)^i a_{i,n} \tau^i \right)^m.$$

Оценим число членов  $p$  в сумме такое, что остаток  $O(\tau^2)$  (учтем, что  $y_0 = 2$ ):

$$|\Delta_{n+1(1)}| = \left| \tau \sum_{m=p+1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{m y_0^m} \left( \sum_{i=1}^l (-1)^i a_{i,n} \tau^i \right)^m \right| < \tau \sum_{m=p+1}^{\infty} \frac{1}{m y_0^m} = \tau \frac{1}{y_0^{p+1}} \frac{y_0}{y_0 - 1} = \tau \frac{1}{y_0^p}. \quad (8)$$

Решим уравнение  $1/y_0^p = \tau$  и найдем ближайшее целое  $p = [\log_{y_0} 1/\tau] + 1$ . Из (8) следует, что  $l \leq p$ . Но  $l$  может быть больше  $p$ . Возьмем минимально возможное  $l = p$ . Будем удерживать слагаемые только с коэффициентами  $a_{1,n}$  и  $a_{2,n}$  для определения вероятности нулевого переброса. В виду этих ограничений (7) будет выглядеть так:

$$y_{n+1} = y_0 + \sum_{i=1}^l (-1)^i a_{i,n} \tau^i - \tau \ln y_0 - \tau \sum_{m=1}^p \frac{(-1)^{m-1}}{m y_0^m} (-a_{1,n} \tau^1 + a_{2,n} \tau^2)^m + \Delta_{n+1(2)}.$$

Покажем, что  $\Delta_{n+1(2)} = O(\tau^2)$ :

$$\begin{aligned} |\Delta_{n+1(2)}| &\leq \sum_{m=1}^p \frac{1}{m y_0^m} \left| \left( m \sum_{i=1}^2 (-1)^i a_{i,n} \tau^i \right)^m \sum_{i=3}^p (-1)^i a_{i,n} \tau^i + \dots + \left( \sum_{i=3}^p (-1)^i a_{i,n} \tau^i \right)^m \right| \leq \\ &\leq \tau \sum_{m=1}^p \frac{1}{m y_0^m} |p \tau^2 + p^2 \tau^4 + \dots + \tau^{2m}| \leq \tau p^2 \tau^2 (1 + p \tau^2 + \dots + \tau^{2m-2} / p) = \tau^2 p^2 \tau \frac{1}{1 - p \tau^2}. \end{aligned}$$

Так как  $p^2 \tau = (\log_{y_0} 1/\tau)^2 \tau \rightarrow 0$ , то  $\Delta_{n+1(2)} = O(\tau^2)$ . Возводя отрезок ряда в степень  $m$ , будем отбрасывать значения порядка  $\tau^2$ . Имеем

$$y_{n+1} = y_0 + \sum_{i=1}^p (-1)^i a_{i,n} \tau^i - \tau \ln y_0 + \tau \sum_{m=1}^p \frac{a_{1,n}^m \tau^m - m a_{1,n}^{m-1} a_{2,n} \tau^{m+1}}{m y_0^m} + \Delta_{n+1(3)},$$



где  $\Delta_{n+1(3)}$  — следующая часть суммы:

$$\Delta_{n+1(3)} = \sum_{m=1}^p \left( \frac{m(m-1)a_{1,n}^{m-2} a_{2,n}^2 \tau^{m+2}}{2my_0^m} - \frac{m(m-1)(m-2)a_{1,n}^{m-3} a_{2,n}^3 \tau^{m+3}}{6my_0^m} + \dots + (-1)^m \frac{a_{2,n}^m \tau^{2m}}{my_0^m} \right).$$

Первый член в сумме оценивается величиной (полагаем, что  $a_{1,n} \neq 0$ ,  $a_{2,n} \neq 0$ )

$$\frac{(m-1)a_{1,n}^{m-2} a_{2,n}^2 \tau^{m+2}}{2y_0^m} < \frac{pa_{1,n}^{m-2} a_{2,n}^2 \tau^{m+2}}{2y_0^m} < \frac{p}{2y_0^m} \left(\frac{1}{\tau}\right)^m \tau^{m+2} < \frac{p}{4} \tau^2.$$

Оценка следующего члена  $\frac{p(m-2)a_{1,n}^{m-3} a_{2,n}^3 \tau^{m+3}}{4} < \frac{p^2 \tau^3}{4} = \frac{p\tau^2}{4} p\tau$ . Также получаем для других членов с учетом того, что при  $\tau \rightarrow 0$  величина  $p\tau = \tau \log_{y_0} 1/\tau < 1$ . Поэтому

$$|\Delta_{n+1(3)}| < p \frac{p\tau^2}{4} (1 + (p\tau) + (p\tau)^2 + \dots + (p\tau)^m) < p \frac{p\tau^2}{4} \frac{1}{1-p\tau} < p^2 \tau^2.$$

Получим  $\Delta_{n+1(3)} = O(\tau)$ , так как  $p^2 \tau = (\log_{y_0} 1/\tau)^2 \tau \rightarrow 0$  при  $\tau \rightarrow 0$ . Значит

$$\Delta_{n+1} = (\Delta_{n+1(1)} + \Delta_{n+1(2)} + \Delta_{n+1(3)})\tau = O(\tau^2).$$

Группируя члены по степеням  $\tau$ , получим

$$y_{n+1} = y_0 - \left( (a_{1,n} + \ln y_0 - \delta_{12,n+1}) \bmod(1/\tau) \right) \tau + \dots \\ \dots + (-1)^{p+1} \left( (a_{k,n} + (-1)^p f_p) \bmod(1/\tau) \right) \tau^{p+1},$$

где

$$f_i = \frac{a_{1,n}^{i-2} a_{2,n}}{y_0^{i-1}} - \frac{a_{1,n}^i}{iy_0^i}, \quad \delta_{12,n+1} = \left[ \left( a_{2,n} + \frac{a_{1,n}}{y_0} - \delta_{23,n+1} \right) \tau \right],$$

$$\delta_{i;i+1,n+1} = \left[ \left( a_{i+1,n} + f_i - \delta_{i+1;i+2,n+1} \right) \tau \right].$$

Раскрывая рекуррентность функций переброса и определяя вероятность  $\delta_{12,n+1} = 0$ , находим обратную зависимость

$$n_i = 1 + \sum_{m=1}^{i-1} \frac{1}{1 - \sum_{j=1}^{p+1} \frac{m^j \tau^j}{j y_0^j} - \tau} \\ \ln a_{0,n} - 1 + \frac{1}{1 - \sum_{j=1}^p \frac{m^{j-1} \tau^j}{y_0^j}}$$

На рис. 4. показано сравнение решений по предлагаемому методу при  $\tau = 0,01$  с численным решением по схеме Эйлера.

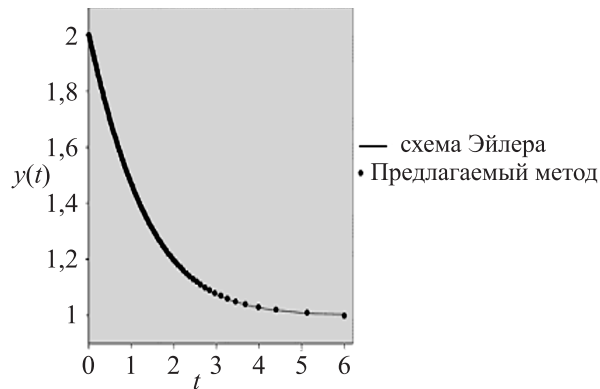


Рис. 4. Решения уравнения (6)

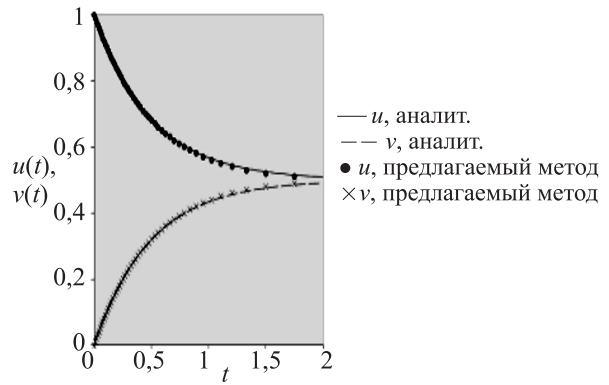


Рис. 5. Решения системы (9)

### Пример системы нелинейных уравнений

Рассмотрим так называемую систему Карлемана (см. [3]), являющуюся простейшим примером кинетической системы дискретных скоростей:

$$\begin{cases} du/dt = v^2 - u^2, \\ dv/dt = u^2 - v^2, \end{cases} \quad u(0) = 1, \quad v(0) = 0. \quad (9)$$

Система имеет аналитическое решение (с которым проводится сравнение)

$$u(t) = (1 + e^{-2t}) / 2, \quad v(t) = (1 - e^{-2t}) / 2.$$

Схема Эйлера имеет вид

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + \tau v_n^2 - \tau u_n^2, \quad u_0 = 1, \\ v_{n+1} = v_n + \tau u_n^2 - \tau v_n^2, \quad v_0 = 0. \end{cases} \quad (10)$$

Учитывая начальные условия, преобразуем (10):

$$u_{n+1} = \tau + u_n(1 - 2\tau), \quad v_n = 1 - u_n.$$

Будем искать  $u_n$  в виде  $u_n = a_{0,n}\tau^0 - a_{1,n}\tau + a_{2,n}\tau^2$ , тогда

$$u_{n+1} = (a_{0,n} - \delta_{01,n+1})\tau^0 - ((a_{1,n} + 2a_{0,n} - \delta_{12,n+1}) \bmod(1/\tau))\tau + ((a_{2,n} + 2a_{1,n}) \bmod(1/\tau))\tau^2.$$

Вероятность  $\delta_{12,n+1} = 0$   $P(a_{1,n}) = 1 - 2a_{1,n}\tau$ . Зависимость  $n_i$  от  $a_1 \equiv i$ :

$$n_i = 1 + \sum_{m=1}^{i-1} \frac{1}{1 - 2m\tau}.$$

Сравнение решений представлено на рис. 5 при  $\tau = 0,01$ .

## Заключение

В работе выявлены этапы при построении полуаналитического решения и рассмотрены некоторые детали обоснования метода. Важным оказывается определение вероятностной схемы, связанной с выделением дробной части числа, возникающей при перебросе разрядов. Коэффициенты ряда можно рассматривать как генераторы псевдослучайных чисел с улучшением стохастических свойств с ростом номера  $i$ , соответствующего степени  $\tau$ . Стохастичность позволяет применять статистическое описание для нахождения коэффициента линеаризации, задающего важнейшую часть решения. Длина отрезка ряда зависит от характера исходной задачи и шага аргумента. В примере для задачи, не разрешимой в квадратурах, рост количества членов  $p$  является достаточно медленным, что позволяет упрощать решение отбрасыванием внепорядковых членов. Метод ориентирован на решение систем нелинейных дифференциальных уравнений, построен простой пример решения такой системы.

## Список литературы

1. *Аристов В. В., Строганов А. В.* Новый метод решения дифференциальных уравнений с формализацией математических операций компьютера // Математика. Компьютер. Образование: Сб. научн. тр. / Под. ред. Г. Ю. Ризниченко. М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2006. Т. 2. с. 295–307.
2. *Кнут Д.* Искусство программирования. Получисленные методы. М.: ООО «И. Д. Вильямс», 2007. Т. 2. 832 с.
3. *Султангазин У. М.* Дискретные нелинейные модели уравнения Больцмана. Алма-Ата: Наука, 1985.



