ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ
МАТЕМАТИКА 2017. Т. 27. Вып. 1

УДК 517.977

© *Н. Н. Петров*

# ОДНА ЗАДАЧА ГРУППОВОГО ПРЕСЛЕДОВАНИЯ С ДРОБНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ И ФАЗОВЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ[1]

В конечномерном евклидовом пространстве рассматривается задача преследования группой преследователей одного убегающего, описываемая системой вида

$$D^{(\alpha)} z_i = a z_i + u_i - v,$$

где $D^{(\alpha)} f$ — производная по Капуто порядка $\alpha \in (0,1)$ функции $f$. Дополнительно предполагается, что убегающий в процессе игры не покидает пределы выпуклого многогранного множества с непустой внутренностью. Убегающий использует кусочно-программные стратегии, преследователи — кусочно-программные контрстратегии. Множество допустимых управлений — выпуклый компакт, целевые множества — начало координат, $a$ — вещественное число. В терминах начальных позиций и параметров игры получены достаточные условия разрешимости задачи преследования.

*Ключевые слова*: дифференциальная игра, групповое преследование, фазовые ограничения, преследователь, убегающий.

DOI: 10.20537/vm170105

## Введение

Важное направление развития современной теории дифференциальных игр связано с разработкой методов решения игровых задач преследования-уклонения с участием нескольких объектов [1–6], причем, кроме углубления классических методов решения, активно ведется поиск новых задач, к которым применимы уже разработанные методы. В частности, в работах [7–9] рассматривались задачи преследования двух лиц, описываемые уравнениями с дробными производными, где были получены достаточные условия поимки.

В настоящей работе рассматривается одна задача преследования группой преследователей одного убегающего при условии, что движение всех участников описывается уравнениями с дробными по Капуто производными, а убегающий в процессе игры не покидает пределы выпуклого многогранного множества. Получены достаточные условия поимки. Работа продолжает исследования [10–12].

## § 1. Постановка задачи

**Определение 1** (см. [13]). Пусть $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}^k$ — абсолютно непрерывная функция и $\alpha \in (0,1)$. *Производной по Капуто порядка* $\alpha$ функции $f$ называется функция $D^{(\alpha)} f$ вида

$$\left(D^{(\alpha)} f\right)(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{f'(s)}{(t-s)^\alpha}\, ds, \quad \text{где} \quad \Gamma(\beta) = \int_0^\infty e^{-s} s^{\beta-1}\, ds.$$

В пространстве $\mathbb{R}^k$ ($k \geqslant 2$) рассматривается дифференциальная игра $n+1$ лиц: $n$ преследователей $P_1, \ldots, P_n$ и убегающего $E$. Закон движения каждого из преследователей $P_i$ имеет вид

$$D^{(\alpha)} x_i = a x_i + u_i, \quad x_i(0) = x_i^0, \quad u_i \in V. \tag{1.1}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 16–01–00346-а) и Министерства образования и науки РФ в рамках базовой части госзадания в сфере науки.

Закон движения убегающего $E$ имеет вид

$$D^{(\alpha)}y = ay + v, \quad y(0) = y^0, \quad v \in V. \tag{1.2}$$

Здесь $\alpha \in (0,1)$, $x_i, y, u_i, v \in \mathbb{R}^k$, $V$ — выпуклый компакт в $\mathbb{R}^k$, $a$ — вещественное число. Кроме того, $x_i^0 \neq y^0$ для всех $i$. Дополнительно предполагается, что убегающий $E$ в процессе игры не покидает пределы выпуклого многогранного множества $\Omega$ с непустой внутренностью вида

$$\Omega = \Big\{ y \in \mathbb{R}^k \ \big|\ (p_j, y) \leqslant \mu_j,\ j = 1, \ldots, r \Big\},$$

где $p_1, \ldots, p_r$ — единичные векторы $\mathbb{R}^k$, $\mu_1, \ldots, \mu_r$ — вещественные числа.

Вместо систем (1.1), (1.2) рассмотрим систему

$$D^{(\alpha)}z_i = az_i + u_i - v, \quad z_i(0) = z_i^0 = x_i^0 - y^0, \quad u_i, v \in V. \tag{1.3}$$

Пусть $T$ — произвольное положительное число, $\sigma = \{0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{s+1} = T\}$ — конечное разбиение отрезка $[0, T]$.

**Определение 2.** *Кусочно-программной стратегией* $Q$ убегающего $E$, заданной на $[0, T]$, соответствующей разбиению $\sigma$, называется семейство отображений $b_l$, $l = 0, \ldots, s$, ставящих в соответствие величинам $(t_l, z_1(t_l), \ldots, z_n(t_l))$ измеримую функцию $v_l(t)$, определенную для $t \in [t_l, t_{l+1})$ и такую, что $v_l(t) \in V$, $y(t) \in \Omega$ для всех $t \in [t_l, t_{l+1})$.

**Определение 3.** *Кусочно-программной контрстратегией* $S_i$ преследователя $P_i$, заданной на $[0, T]$, соответствующей разбиению $\sigma$, называется семейство отображений $c_l^i$, $l = 0, \ldots, s$, ставящих в соответствие величинам $(t_l, z_1(t_l), \ldots, z_n(t_l))$ и управлению $v_l(t)$, $t \in [t_l, t_{l+1})$, измеримую функцию $u_l^i(t)$, определенную для $t \in [t_l, t_{l+1})$ и такую, что $u_l^i(t) \in V$ для всех $t \in [t_l, t_{l+1})$.

**Определение 4.** В игре *происходит поимка,* если существует момент $T_0 > 0$ такой, что для любого разбиения $\sigma$ отрезка $[0, T_0]$, для любой кусочно-программной стратегии $Q$ убегающего $E$ найдутся кусочно-программные контрстратегии $S_1, \ldots, S_n$ преследователей $P_1, \ldots, P_n$, для которых найдутся момент $T \in [0, T_0]$ и номер $p$, что $z_p(T) = 0$.

Пусть далее $\operatorname{Int} A$ и $\operatorname{co} A$ — внутренность и выпуклая оболочка множества $A$ соответственно, $I(l) = \{1, \ldots, n + l\}$, $E_\rho(z, \mu) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{z^k}{\Gamma(k\rho^{-1} + \mu)}$ — обобщенная функция Миттаг-Леффлера,

$$\lambda_i(v) = \sup\big\{\lambda \geqslant 0 \ \big|\ -\lambda z_i^0 \in V - v\big\},\ i \in I(0), \quad \lambda_{n+j}(v) = (p_j, v),\ j = 1, \ldots, r,$$
$$\delta_r = \min_{v \in V} \max_{l \in I(r)} \lambda_l(v), \quad d = \max\{\|v\|, v \in V\}, \quad D_r(a) = \{y \in \mathbb{R}^k \ \big|\ \|y - a\| \leqslant r\}.$$

## § 2. Достаточные условия поимки

**Теорема 1.** *Пусть* $a < 0$, $\Omega = \mathbb{R}^k$, $\delta_0 > 0$. *Тогда в игре происходит поимка.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $T$ — произвольное положительное число, $\sigma$ — разбиение отрезка $[0, T]$, $Q$ — кусочно-программная стратегия убегающего $E$. Задаем кусочно-программные контрстратегии преследователей, полагая

$$u_i(t) = v(t) - \lambda_i(v(t))z_i^0.$$

Тогда решение системы (1.3) представимо в виде [14]

$$z_i(t) = E_{1/\alpha}(at^\alpha, 1)z_i^0 - \int_0^t (t - \tau)^{\alpha - 1} E_{1/\alpha}(a(t - \tau)^\alpha, \alpha)\lambda_i(v(\tau))z_i^0 \, d\tau = z_i^0 h_i(t), \tag{2.1}$$

где

$$h_i(t) = E_{1/\alpha}(at^\alpha, 1) - \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{1/\alpha}(a(t-\tau)^\alpha, \alpha)\lambda_i(v(\tau))\,d\tau. \tag{2.2}$$

Отсюда

$$\sum_{i=1}^n h_i(t) = nE_{1/\alpha}(at^\alpha, 1) - \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{1/\alpha}(a(t-\tau)^\alpha, \alpha)\sum_{i=1}^n \lambda_i(v(\tau))\,d\tau. \tag{2.3}$$

Из теоремы 4.1.1 [15, с. 101] следует, что $E_{1/\alpha}(z, \alpha) \geqslant 0$ для всех $z \in \mathbb{R}^1$. Кроме того, для всех $v$ верно неравенство $\sum\limits_{i=1}^n \lambda_i(v) \geqslant \max\limits_i \lambda_i(v) \geqslant \delta_0$. Поэтому из (2.3) следует справедливость неравенства

$$\sum_{i=1}^n h_i(t) \leqslant H(t) = nE_{1/\alpha}(at^\alpha, 1) - \delta_0 \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{1/\alpha}(a(t-\tau)^\alpha, \alpha)\,d\tau.$$

В силу [16, с. 120] имеем

$$\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{1/\alpha}(a(t-\tau)^\alpha, \alpha)\,d\tau = t^\alpha E_{1/\alpha}(at^\alpha, \alpha+1).$$

Поэтому

$$H(t) = nE_{1/\alpha}(at^\alpha, 1) - \delta_0 t^\alpha E_{1/\alpha}(at^\alpha, \alpha+1) = nE_{1/\alpha}(at^\alpha, 1) - \frac{\delta_0}{a} at^\alpha E_{1/\alpha}(at^\alpha, \alpha+1).$$

Так как $a < 0$, то $at^\alpha \to -\infty$ при $t \to +\infty$, и поэтому справедливы следующие асимптотические оценки [15, с. 12]:

$$E_{1/\alpha}(at^\alpha, 1) = -\frac{1}{at^\alpha \Gamma(1-\alpha)} + O\left(\frac{1}{t^{2\alpha}}\right), \quad E_{1/\alpha}(at^\alpha, \alpha+1) = -\frac{1}{at^\alpha} + O\left(\frac{1}{t^{2\alpha}}\right).$$

Следовательно, при $t \to +\infty$

$$H(t) = -\frac{n}{at^\alpha\Gamma(1-\alpha)} + \frac{\delta_0}{a} + O\left(\frac{1}{t^\alpha}\right).$$

Поэтому существует момент $T > 0$, для которого $H(T) < 0$. Значит, $\sum\limits_{i=1}^n h_i(T) < 0$. Так как $h_i(0) = 1$ для всех $i$ и функции $h_i$ непрерывны, то существуют $T_0 \leqslant T$ и номер $l \in I(0)$, для которых $h_l(T_0) = 0$. Отсюда, в силу (2.1), получаем $z_l(T_0) = 0$. Следовательно, в игре происходит поимка. Теорема доказана. □

**Следствие 1.** *Пусть $a < 0$, $\Omega = \mathbb{R}^k$, $V$ — строго выпуклый компакт с гладкой границей и*

$$0 \in \operatorname{Int} \operatorname{co}\{z_1^0, \ldots, z_n^0\}.$$

*Тогда в игре происходит поимка.*

Доказательство. Из условия следствия и [6, с. 15] следует, что $\delta_0 > 0$. Поэтому применима теорема 1. □

**Теорема 2.** *Пусть $a < 0$, $r = 1$, $\delta_1 > 0$. Тогда в игре происходит поимка.*

Доказательство. Пусть $T$ — произвольное положительное число, $\sigma$ — разбиение отрезка $[0,T]$, $Q$ — кусочно-программная стратегия убегающего $E$. Задаем кусочно-программные контрстратегии преследователей, полагая

$$u_i(t)=v(t)-\lambda_i(v(t))z_i^0.$$

Тогда решение системы (1.3) представимо в виде $z_i(t)=h_i(t)z_i^0$, где $h_i$ определены равенством (2.2). Так как стратегия $Q$ убегающего допустима, то $(p_1,y(t))\leqslant\mu_1$. Это означает, что для всех $t\geqslant 0$ справедливо неравенство

$$\int_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}E_{1/\alpha}(a(t-\tau)^\alpha,\alpha)(p_1,v(\tau))\,d\tau\leqslant\mu(t)=\mu_1-E_{1/\alpha}(at^\alpha,1)(p_1,y^0).$$

Пусть $\Delta_1(t),\Delta_2(t)$ — два подмножества отрезка $[0,t]$ такие, что

$$\Delta_1(t)=\{\tau\bigm|\tau\in[0,t],(p_1,v(\tau))<\delta_1\},\quad \Delta_2(t)=\{\tau\bigm|\tau\in[0,t],(p_1,v(\tau))\geqslant\delta_1\}.$$

Тогда

$$G_1(t)+G_2(t)=g(t),\quad -dG_1(t)+\delta_1G_2(t)\leqslant\mu(t),\tag{2.4}$$

где

$$G_{1,2}(t)=\int_{\Delta_{1,2}(t)}(t-\tau)^{\alpha-1}E_{1/\alpha}(a(t-\tau)^\alpha,\alpha)\,d\tau,\quad g(t)=\int_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}E_{1/\alpha}(a(t-\tau)^\alpha,\alpha)\,d\tau.$$

Из (2.4) следует, что для всех $t\geqslant 0$ справедливо неравенство

$$G_1(t)\geqslant\frac{\delta_1g(t)-\mu(t)}{d+\delta_1}.$$

Далее имеем

$$\sum_{i=1}^n h_i(t)\leqslant nE_{1/\alpha}(at^\alpha,1)-\int_{\Delta_1(t)}(t-\tau)^{\alpha-1}E_{1/\alpha}(a(t-\tau)^\alpha,\alpha)\max_i\lambda_i(v(\tau))\,d\tau\leqslant$$
$$\leqslant nE_{1/\alpha}(at^\alpha,1)-\delta_1G_1(t)\leqslant nE_{1/\alpha}(at^\alpha,1)-\frac{\delta_1}{d+\delta_1}\left[\delta_1g(t)-\mu(t)\right].$$

В силу [15, с. 12] имеем

$$E_{1/\alpha}(at^\alpha,1)=-\frac{1}{at^\alpha\Gamma(1-\alpha)}+O\left(\frac{1}{t^{2\alpha}}\right),\quad g(t)=-\frac{1}{a}+O\left(\frac{1}{t^\alpha}\right),\quad \mu(t)=-\frac{(p_1,y^0)}{at^\alpha}+O\left(\frac{1}{t^{2\alpha}}\right).$$

Следовательно, при $t\to+\infty$ справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^n h_i(t)\leqslant\frac{\delta_1^2}{a(\delta_1+d)}+O\left(\frac{1}{t^\alpha}\right).$$

Так как $a<0$, то существует момент $T>0$, для которого $\sum\limits_i h_i(T)<0$. Значит, существуют $l\in I(0)$ и $T_0\in[0,T]$, для которых $z_l(T_0)=0$. Следовательно, в игре происходит поимка. Теорема доказана. □

**Следствие 2.** *Пусть $a<0$, $r=1$, $V=D_1(0)$ и*

$$0\in\operatorname{Int}\operatorname{co}\{z_1^0,\ldots,z_n^0,p_1\}.$$

*Тогда в игре происходит поимка.*

Доказательство. Из условия следствия и леммы 4.1 [6, с. 36] следует, что $\delta_1>0$. □

**Теорема 3.** *Пусть $a<0$, $V=D_1(0)$, $n\geqslant k$ и*

$$0\in\operatorname{Int}\operatorname{co}\{z_1^0,\ldots,z_n^0,p_1,\ldots,p_r\}.$$

*Тогда в игре происходит поимка.*

Доказательство данной теоремы проводится аналогично доказательству теоремы 4.1 [6, с. 37].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
2. Петросян Л.А. Дифференциальные игры преследования. Л.: Изд-во ЛГУ, 1977. 222 с.
3. Рихсиев Б.Б. Дифференциальные игры с простыми движениями. Ташкент: Фан, 1989. 232 с.
4. Chikrii A.A. Conflict-controlled processes. Springer Netherlands. 1997. 404 p. DOI: 10.1007/978-94-017-1135-7
5. Григоренко Н.Л. Математические методы управления несколькими динамическими процессами. М.: Изд-во МГУ, 1990. 197 с.
6. Благодатских А.И., Петров Н.Н. Конфликтное взаимодействие групп управляемых объектов. Ижевск: Изд-во Удмурт. ун-та, 2009. 266 с.
7. Эйдельман С.Д., Чикрий А.А. Динамические задачи сближения для уравнений дробного порядка // Украинский математический журнал. 2000. Т. 52. № 11. С. 1566–1583.
8. Чикрий А.А., Матичин И.И. Игровые задачи для линейных систем дробного порядка // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15. № 3. С. 262–278.
9. Чикрий А.А., Матичин И.И. О линейных конфликтно управляемых процессах с дробными производными // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17. № 2. С. 256–270.
10. Petrov N.N. To a nonstationary group pursuit problem with phase constraints // Automation and Remote Control. 2014. Vol. 75. Issue 8. P. 1525–1531. DOI: 10.1134/S0005117914080153
11. Благодатских А.И., Петров Н.Н. Групповое преследование с фазовыми ограничениями в почти периодическом примере Л. С. Понтрягина // Дифференциальные уравнения. 2015. Т. 51. № 3. С. 387–394.
12. Petrov N.N., Solov'eva N.A. Multiple capture in Pontryagin's recurrent example with phase constraints // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. 2016. Vol. 293. Suppl. 1. P. 174–182. DOI: 10.1134/S0081543816050163
13. Caputo M. Linear models of dissipation whose $Q$ is almost frequency independent-II // Geophysical Journal International. 1967. Vol. 13. Issue 5. P. 529–539. DOI: 10.1111/j.1365-246X.1967.tb02303.x
14. Чикрий А.А., Матичин И.И. Об аналоге формулы Коши для линейных систем произвольного дробного порядка // Доповiдi Нацiональноi академii наук Украiни. 2007. № 1. С. 50–55.
15. Попов А.Ю., Седлецкий А.М. Распределение корней функции Миттаг-Леффлера // Современная математика. Фундаментальные направления. 2011. Т. 40. С. 3–171.
16. Джрбашян М.М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М.: Наука, 1966. 672 с.

Поступила в редакцию 01.02.2017

Петров Николай Никандрович, д. ф.-м. н., профессор, кафедра дифференциальных уравнений, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
E-mail: kma3@list.ru

***N. N. Petrov***

**One problem of group pursuit with fractional derivatives and phase constraints**

**Citation:** *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2017, vol. 27, issue 1, pp. 54–59 (in Russian).

*Keywords*: differential game, group pursuit, phase restrictions, pursuer, evader.

MSC2010: 49N75, 91A23

DOI: 10.20537/vm170105

In the finite-dimensional Euclidean space, we consider the problem of persecution of one evader by the group of pursuers, which is described by the system

$$D^{(\alpha)} z_i = az_i + u_i - v,$$

where $D^{(\alpha)}f$ is the Caputo derivative of order $\alpha \in (0,1)$ of the function $f$. It is further assumed that the evader does not leave the convex polyhedron with nonempty interior. The evader uses piecewise-program strategies, and the pursuers use piecewise-program counterstrategies. The set of admissible controls is a convex compact, the target sets are the origin of coordinates, and $a$ is a real number. In terms of the initial positions and the parameters of the game, sufficient conditions for the solvability of the pursuit problem are obtained.

## REFERENCES


1. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Pozitsionnye differentsial'nye igry* (Positional differential games), Moscow: Nauka, 1974, 456 p.
2. Petrosyan L.A. *Differentsial'nye igry presledovaniya* (Differential games of pursuit), Leningrad: Leningrad State University, 1977, 222 p.
3. Rikhsiev B.B. *Differentsial'nye igry s prostym dvizheniem* (Differential games with simple motion), Tashkent: Fan, 1989, 232 p.
4. Chikrii A.A. *Conflict-controlled processes*, Springer Netherlands, 1997, 404 p. DOI: 10.1007/978-94-017-1135-7
5. Grigorenko N.L. *Matematicheskie metody upravleniya neskol'kimi dinamicheskimi* protsessami (Mathematical methods of control over multiple dynamic processes), Moscow: Moscow State University, 1990, 197 p.
6. Blagodatskikh A.I., Petrov N.N. *Konfliktnoe vzaimodeistvie grupp upravlyaemykh ob"ektov* (Conflict interaction of groups of controlled objects), Izhevsk: Udmurt State University, 2009, 266 p.
7. Eidel'man S.D., Chikrii A.A. Dynamic game problems of approach for fractional-order equations, *Ukrainian Mathematical Journal*, 2000, vol. 52, issue 11, pp. 1787–1806. DOI: 10.1023/A:1010439422856
8. Chikrii A.A., Matichin I.I. Game problems for fractional-order linear systems, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2010, vol. 268, suppl. 1, pp. 54–70. DOI: 10.1134/S0081543810050056
9. Chikrii A.A., Matichin I.I. On linear conflict-controlled processes with fractional derivatives, *Tr. Inst. Mat. Mekh. Ural. Otd. Ross. Akad. Nauk*, 2011, vol. 17, no. 2, pp. 256–270 (in Russian).
10. Petrov N.N. To a nonstationary group pursuit problem with phase constraints, *Automation and Remote Control*, 2014, vol. 75, issue 8, pp. 1525–1531. DOI: 10.1134/S0005117914080153
11. Blagodatskikh A.I., Petrov N.N. Group pursuit with state constraints in Pontryagin's almost periodic example, *Differential Equations*, 2015, vol. 51, issue 3, pp. 391–398. DOI: 10.1134/S001226611503009X
12. Petrov N.N., Solov'eva N.A. Multiple capture in Pontryagin's recurrent example with phase constraints, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2016, vol. 293, suppl. 1, pp. 174–182. DOI: 10.1134/S0081543816050163
13. Caputo M. Linear models of dissipation whose $Q$ is almost frequency independent-II, *Geophysical Journal International*, 1967, vol. 13, issue 5, pp. 529–539. DOI: 10.1111/j.1365-246X.1967.tb02303.x
14. Chikrii A.A., Matichin I.I. On an analogue of the Cauchy formula for linear systems of any fractional order, *Dopov. Nats. Akad. Nauk Ukr., Mat. Pryr. Tekh. Nauky*, 2007, no. 1, pp. 50–55 (in Russian).
15. Popov A.Yu., Sedletskii A.M. Distribution of roots of Mittag-Leffler functions, *Journal of Mathematical Sciences*, 2013, vol. 190, issue 2, pp. 209–409. DOI: 10.1007/s10958-013-1255-3
16. Dzhrbashyan M.M. *Integral'nye preobrazovaniya i predstavleniya funktsii v kompleksnoi oblasti* (Integral transformations and representations of functions in the complex domain), Moscow: Nauka, 1966, 672 p.


Received 01.02.2017

Petrov Nikolai Nikandrovich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Department of Differential Equations, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
E-mail: kma3@list.ru