КОМПЬЮТЕРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ
И МОДЕЛИРОВАНИЕ 2024 Т. 16 № 1 С. 17–34
DOI: 10.20537/2076-7633-2024-16-1-17-34

Ки&М

СПЕЦИАЛЬНЫЙ ВЫПУСК

УДК: 519.8

О периодических режимах движения тела по горизонтальной шероховатой плоскости, реализуемых посредством перемещения двух внутренних масс

Б. С. Бардин[1,2,a], А. А. Рачков[1,b], Е. А. Чекина[1,c], А. М. Чекин[1,d]

[1]Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),
Россия, 125993, г. Москва, ГСП-3, А-80, Волоколамское ш., д. 4
[2]Лаборатория компьютерного моделирования, отдел механики машин и управления машинами, Институт машиноведения им. А. А. Благонравова Российской академии наук,
Россия, 101990, г. Москва, М. Харитоньевский пер., д. 4

E-mail: [a] bsbardin@yandex.ru, [b] alexey-rachkov@yandex.ru, [c] chekina_ev@mail.ru, [d] tchek@mail.ru

Получено 07.11.2023, после доработки — 10.11.2023.
Принято к публикации 24.11.2023.

Рассматривается механическая система, состоящая из твердого тела и двух масс, которые перемещаются внутри тела по взаимно перпендикулярным направляющим. Тело имеет плоскую грань, которая опирается на горизонтальную шероховатую плоскость. Движение масс внутри тела происходит в вертикальной плоскости по гармоническому закону с одним и тем же периодом. Предполагается, что силы трения, возникающие в области контакта тела и опорной плоскости, описываются классической моделью сухого кулоновского трения, а параметры задачи выбраны так, что тело может совершать безотрывное прямолинейное движение. Данная механическая система может служить простейшей моделью капсульного робота, движущегося по твердой поверхности посредством перемещения внутренних элементов.

В работе исследуются режимы движения тела, при которых его скорость изменяется периодически с периодом, равным периоду движения внутренних масс. Показано, что если в результате перемещения внутренних масс тело может начать движение из состояния покоя, то при любых допустимых значениях параметров задачи существует периодический режим движения. При изменении значений параметров может существенно меняться и характер периодического движения. В частности, возможны как реверсионные, так и безреверсионные режимы движения. В безреверсионном режиме тело движется в одном и том же направлении, а интервалы движения чередуются с интервалами покоя (залипания тела). В реверсионном режиме тело на временном интервале, равном одному периоду, движется как в положительном, так и в отрицательном направлении. В этом случае тело за период движения совершает две остановки. После остановки тело либо сразу продолжает движение в противоположном направлении, либо попадает в зону залипания и покоится в течение конечного промежутка времени, а затем начинает движение в противоположном направлении. Было также установлено, что при определенных значениях параметров возможен периодический реверсионный режим, при котором тело движется без залипания. Была проведена подробная классификация всех возможных типов периодических режимов движения. Дано их полное качественное описание и в трехмерном пространстве параметров задачи построены области существования каждого из возможных типов движения.

Ключевые слова: периодические движения, перемещение посредством внутренних масс, капсульные роботы, сухое трение

Работа выполнена в Московском авиационном институте (национальном исследовательском университете) за счет гранта РНФ № 19-11-00116.

© 2024 Борис Сабирович Бардин, Алексей Андреевич Рачков, Евгения Алексеевна Чекина, Александр Михайлович Чекин
Статья доступна по лицензии Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Unported License.
Чтобы получить текст лицензии, посетите веб-сайт http://creativecommons.org/licenses/by-nd/3.0/
или отправьте письмо в Creative Commons, PO Box 1866, Mountain View, CA 94042, USA.

COMPUTER RESEARCH AND MODELING
2024 VOL. 16 NO. 1 P. 17–34
DOI: 10.20537/2076-7633-2024-16-1-17-34

Ки&М

SPECIAL ISSUE

UDC: 519.8

On periodic modes of body motion along a horizontal rough plane, performed by moving two internal masses

B. S. Bardin[1,2,a], A. A. Rachkov[1,b], E. A. Chekina[1,c], A. M. Chekin[1,d]

[1]Moscow Aviation Institute (National Research University),
4 Volokolamskoe ave., A-80, GSP-3, Moscow, 125993, Russia
[2]Computer Modelling Laboratory, Department of Mechanics and Control of Machines, Mechanical Engineering Research Institute of the Russian Academy of Sciences,
4 M. Kharitonyevskiy per., Moscow, 101990, Russia

E-mail: [a] bsbardin@yandex.ru, [b] alexey-rachkov@yandex.ru, [c] chekina_ev@mail.ru, [d] tchek@mail.ru

Received 07.11.2023, after completion — 10.11.2023.
Accepted for publication 24.11.2023.

We consider a mechanical system consisting of a rigid body and two masses that move inside the body along mutually perpendicular guides. The body has a flat face, which rests on a horizontal rough plane. The masses move inside the body in a vertical plane according to a harmonic law with the same period. It is assumed that the friction forces arising in the area of contact between the body and the supporting plane are described by the classical model of dry Coulomb friction, and the parameters of the problem are chosen so that the body can perform translationally rectilinearly motion. This mechanical system can serve as the simplest model of a capsule robot moving on a solid surface by moving internal elements.

We study the modes of motion of a body in which its velocity is periodic with a period equal to the period of motion of the internal masses. It is shown that if the body can starts to move from a state of rest by means of displacements of the masses, then for any permissible values of the problem parameters there is a periodic mode of motion. Depending on the parameter values, the nature of the periodic motion can be essentially different. In particular, both reversible and non-reversible driving modes are possible. In the non-reversion mode, the body moves in the same direction, and intervals of movement alternate with intervals of rest (body sticking). In the reversal mode, the body moves in both positive and negative directions over a time interval equal to one period. In this case, the body makes two stops during the period of movement. After stopping, the body either immediately continues moving in the opposite direction, or enters a sticking zone and rests for a finite period of time, and then stats moving in the opposite direction. It was also found that, at certain parameter values, a periodic reversal mode is possible, in which the body moves without sticking. A detailed classification of all possible types of periodic motion modes was carried out. Their complete qualitative description is given and the regions of their existence in the three-dimensional space of the parameters are constructed.

Keywords: periodic motions, motion through internal masses moving, capsule robots, dry friction

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2024, vol. 16, no. 1, pp. 17–34 (Russian).

The work was carried out at the Moscow Aviation Institute (National Research University) supported by the Russian Science Foundation grant No. 19-11-00116.

© 2024 Boris S. Bardin, Aleksey A. Rachkov, Evgeniya A. Chekina, Aleksandr M. Chekin
This work is licensed under the Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Unported License.
To view a copy of this license, visit http://creativecommons.org/licenses/by-nd/3.0/
or send a letter to Creative Commons, PO Box 1866, Mountain View, CA 94042, USA.

Введение

Исследование движений механических систем посредством перемещения внутренних элементов не только является актуальной теоретической проблемой, но и имеет большое прикладное значение для развития робототехники и создания перспективных транспортных средств, использующих новые принципы движения. В частности, математические модели таких систем представляют интерес на этапах проектирования и конструирования так называемых капсульных роботов, которые могут быть выполнены в виде герметичного корпуса, содержащего неподвижные элементы. Стоит отметить, что такие роботы имеют важное преимущество перед теми, что совершают движения за счет внешних движителей (гусеницы, колеса и т. д.), поскольку наличие непроницаемого корпуса делает их практически неуязвимыми по отношению к агрессивному воздействию внешней среды. Такие устройства могут перемещаться как в жидких средах, так и по твердым поверхностям.

Задача о движении твердого тела по горизонтальной поверхности посредством перемещения внутренних масс рассматривалась во многих работах. Подробный обзор этого вопроса содержится в монографии [Черноусько, Болотник, 2022]. Строгое теоретическое исследование динамики оптимального управления движением таких механических систем было начато в работах [Черноусько, 2005; Черноусько, 2006]. В работе [Болотник и др., 2006] было выполнено исследование стационарных периодических режимов движения. В работе [Болотник, Черноусько, 2010] было найдено оптимальное управление прямолинейного движения тела с двумя внутренними массами. Анализ безударных прыжков тела, несущего две подвижные массы, по горизонтальной плоскости был выполнен в [Бардин, 2015]. В работах [Бардин, Панев, 2015; Bardin, Panev, 2018] дано полное качественное исследование динамики колебательной системы, состоящей из твердого тела и частицы, движущейся по окружности внутри тела. Последняя система является частным случаем системы, состоящей из корпуса и двух внутренних масс, движущихся по гармоническому закону по двум взаимно перпендикулярным направляющим. Такая система при условии безотрывного движения тела по шероховатой поверхности была рассмотрена в работе [Chekina, 2021], где были описаны некоторые предельные режимы такого движения.

В данной работе проводится подробный анализ периодических режимов движения твердого тела по горизонтальной шероховатой плоскости посредством перемещения двух внутренних масс.

Постановка задачи

Рассмотрим механическую систему, состоящую из твердого тела и двух масс, перемещающихся внутри него по взаимно перпендикулярным направляющим (рис. 1). Твердое тело имеет плоскую грань, которой опирается на шероховатую горизонтальную плоскость, а массы перемещаются внутри тела в вертикальной плоскости. Между телом и горизонтальной плоскостью действует сила сухого кулоновского трения.

Для описания движения тела и внутренних масс введем две системы координат. Подвижная система координат $C\xi\eta$ жестко связана с телом, ее оси расположены по направляющим, вдоль которых происходит движение внутренних масс. Абсолютная система координат Oxy с осью абсцисс, направленной вдоль движения корпуса, и осью ординат, направленной вертикально вверх.

Будем считать, что движение внутренних масс относительно корпуса происходит по гармоническому закону:

$$\begin{cases} \xi = a\cos(\omega t + \phi), \\ \eta = b\sin\omega t, \end{cases} \tag{1}$$

где a, b — амплитуды, ϕ — начальная фаза и ω — частота колебаний внутренних масс.

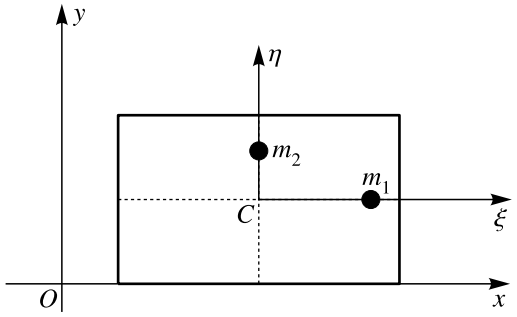

Рис. 1. Механическая система: твердое тело и две внутренние массы m_1 и m_2. Oxy — неподвижная система координат, $C\xi\eta$ — подвижная система координат, жестко связанная с телом

Обозначая через x и y координаты центра масс и полагая, что параметры задачи таковы, что тело движется без отрыва от поверхности, уравнения движения тела можно записать в следующем виде:

$$\begin{cases} (m_0 + m_1 + m_2)\ddot{x} + m_1\ddot{\xi} = F_{fr}, \\ (m_0 + m_1 + m_2)\ddot{y} + m_2\ddot{\eta} = N - (m_0 + m_1 + m_2)g. \end{cases} \tag{2}$$

Здесь m_0 — масса тела, m_1 и m_2 — массы частиц, движущихся вдоль горизонтальной и вертикальной направляющих соответственно. N — реакция опоры. F_{fr} — кулоновская сила трения:

$$F_{fr} = \begin{cases} -fN\operatorname{sign}\dot{x}, & \dot{x} \neq 0, \\ m_1\ddot{\xi}, & \dot{x} = 0 \text{ и } |m_1\ddot{\xi}| \leqslant fN, \\ fN\operatorname{sign}\dot{\xi}, & \dot{x} = 0 \text{ и } |m_1\ddot{\xi}| > fN. \end{cases} \tag{3}$$

Из второго уравнения системы (2) нетрудно получить условие, при котором движение происходит без отрыва от горизонтальной плоскости.

$$N = (m_0 + m_1 + m_2)g + m_2\ddot{\eta} \geqslant 0. \tag{4}$$

Принимая во внимание (1) и обозначая $m_0 + m_1 + m_2 = m$, последнее соотношение может быть переписано в виде

$$N = mg - m_2 b\omega^2 \sin\omega t \geqslant 0. \tag{5}$$

В дальнейшем мы считаем, что параметры задачи удовлетворяют соотношению (5).

Переходя к новым безразмерным переменным по формулам

$$x = \frac{am_1}{m}x', \quad y = \frac{bm_2}{m}y', \quad \xi = a\xi', \quad \eta = b\eta', \quad t = \frac{t'}{\omega} \tag{6}$$

и сохраняя для удобства старые обозначения (то есть опуская символ $'$), перепишем уравнение поступательного прямолинейного движения корпуса в виде

$$\ddot{x} + \ddot{\xi} = \Phi_c. \tag{7}$$

Здесь

$$\Phi_c = \begin{cases} -k(\mu + \ddot{\eta})\operatorname{sign}\dot{x}, & \dot{x} \neq 0, \\ \ddot{\xi}, & \dot{x} = 0 \text{ и } |\ddot{\xi}| \leqslant k(\mu + \ddot{\eta}), \\ k(\mu + \ddot{\eta})\operatorname{sign}\dot{\xi}, & \dot{x} = 0 \text{ и } |\ddot{\xi}| > k(\mu + \ddot{\eta}), \end{cases} \tag{8}$$

где

$$\begin{cases} \xi = \cos(t + \phi), \\ \eta = \sin t. \end{cases} \tag{9}$$

Безразмерные параметры в (8) введены по следующим формулам:

$$k = f\frac{m_2 b}{m_1 a}, \quad \mu = \frac{mg}{bm_2\omega^2}. \tag{10}$$

Таким образом, в задаче имеется три безразмерных параметра: k, μ и ϕ, а условие (5) можно переписать в следующем простом виде:

$$\mu \geqslant 1.$$

Введем безразмерную скорость $v = \dot{x}$, тогда уравнение (7) с учетом (9) можно записать в виде дифференциального уравнения первого порядка:

$$\dot{v} - \cos(t + \phi) = f_c. \tag{11}$$

Здесь

$$f_c = \begin{cases} -k(\mu - \sin t)\operatorname{sign} v, & v \neq 0, \\ -\cos(t + \phi), & v = 0 \text{ и } |\cos(t + \phi)| \leqslant k(\mu - \sin t), \\ k(\mu - \sin t)\operatorname{sign}(-\sin(t + \phi)), & v = 0 \text{ и } |\cos(t + \phi)| > k(\mu - \sin t). \end{cases} \tag{12}$$

Целью данной работы является исследование всех возможных режимов движения тела с периодически меняющейся скоростью и построение областей существования таких режимов движения в трехмерном пространстве параметров задачи.

Зоны разгона и замедления

Получим сначала условия, при которых тело может начать движение из состояния покоя ($v = 0$). Из выражения (12) следует, что при выполнении условия

$$|\cos(t + \phi)| \leqslant k(\mu - \sin t) \tag{13}$$

имеет место равенство $f_c = -\cos(t+\phi)$, поэтому уравнение (11) принимает вид $\dot{v} = 0$. Условие (13) означает, что если значение силы инерции, вызванной перемещением массы, движущейся по горизонтали, не превышает силы трения скольжения, то при нулевой начальной скорости тело будет оставаться в покое. Если же существует интервал времени, на котором неравенство (13) выполняется с противоположным знаком, то возможно движение тела с периодически меняющейся скоростью. Рассмотрим этот вопрос более подробно.

Важную роль при изучении характера движения твердого тела играют моменты времени, при которых неравенство (13) обращается в равенство. Их можно определить из следующего уравнения:

$$\cos(t + \phi) = \pm k(\mu - \sin t). \tag{14}$$

Это уравнение можно переписать в виде совокупности двух уравнений:

$$\begin{aligned} &\cos t\cos\phi - (\sin\phi - k)\sin t - k\mu = 0. \\ &\cos t\cos\phi - (\sin\phi + k)\sin t + k\mu = 0. \end{aligned} \tag{15}$$

Введем обозначения $X = \cos t$, $Y = \sin t$. Тогда совокупность уравнений (15) запишется в виде двух систем алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} X\cos\phi - Y(\sin\phi - k) - k\mu = 0, \\ X^2 + Y^2 = 1, \end{cases} \tag{16}$$

$$\begin{cases} X\cos\phi - Y(\sin\phi + k) + k\mu = 0, \\ X^2 + Y^2 = 1. \end{cases} \tag{17}$$

В плоскости величин X, Y решения данных систем соответствуют точкам пересечения единичной окружности и двух прямых (см. рис. 2).

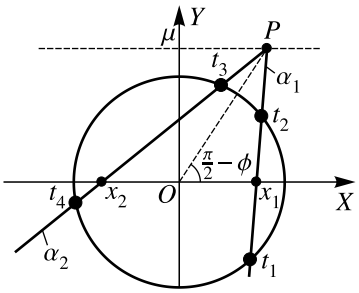

Рис. 2. Геометрическая интерпретация параметров задачи (см. пояснения в тексте)

На рис. 2 прямая, заданная первым уравнением системы (16), обозначена через α_1, а прямая, заданная первым уравнением системы (17), — через α_2 соответственно. Если параметры $k \neq 0$ и $\phi \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, то эти прямые пересекаются в точке P с координатами $X = \mu\frac{\sin\phi}{\cos\phi}$, $Y = \mu$. Угол между прямой, проходящей через начало координат, и точкой пересечения с осью абсцисс равен $\frac{\pi}{2} - \phi$. Точки пересечения прямых α_1 и α_2 с осью абсцисс определяются значениями

$$X_1 = -X_2 = \frac{k\mu}{\cos\phi}.$$

При изучении движения тела каждому моменту времени можно поставить в соответствие точку на единичной окружности, изображенной на рис. 2. Если система (16) имеет решение, то прямая α_1 пересекает единичную окружность в двух точках. Моменты времени, соответствующие этим точкам, обозначим как t_1 и t_2. Моменты времени, соответствующие возможным точкам пересечения прямой α_2 и единичной окружности обозначим через t_3 и t_4.

Рассмотрим интервал (t_1, t_2). Здесь выполняется следующее неравенство:

$$\cos(t + \phi) - k(\mu - \sin t) > 0.$$

Предположим, что тело движется вправо, то есть $v > 0$. Тогда уравнение движения принимает вид

$$\dot{v} = \cos(t + \phi) - k(\mu - \sin t). \tag{18}$$

Таким образом, при движении вправо ускорение на этом интервале будет положительным, а на всей остальной части окружности — отрицательным или равным нулю.

Рассуждая аналогичным образом, находим, что при движении влево на интервале (t_3, t_4)

$$\dot{v} = \cos(t + \phi) + k(\mu - \sin t), \tag{19}$$

тело ускоряется, замедляясь на остальной части окружности.

Таким образом, если прямые α_1 и α_2 пересекаются с окружностью, то при движении вправо на интервале времени (t_1, t_2) векторы скорости и ускорения тела сонаправлены: модуль скорости тела увеличивается. Аналогично: на интервале (t_3, t_4) при движении влево модуль скорости тела также увеличивается. В дальнейшем интервал (t_1, t_2) будем называть зоной разгона вправо, а интервал (t_3, t_4), соответственно, зоной разгона влево.

На интервалах (t_2, t_3) и $(t_4, t_1 + 2\pi)$ ускорение всегда противоположно направлению движения или равно нулю, следовательно, тело на этих интервалах либо покоится, либо движется с убывающей по модулю скоростью. Поскольку именно здесь выполняется неравенство (13), то это и означает, что, если тело остановится на данном интервале, оно не сможет начать движение до конца интервала (будем называть такое состояние тела залипанием). В дальнейшем такие интервалы называются зонами замедления. Соответственно, интервал (t_2, t_3) назовем первой зоной замедления, а интервал $(t_4, t_1 + 2\pi)$ — второй зоной замедления. Эти интервалы играют важную роль в динамике движения тела.

О существовании и взаимном расположении зон разгона и зон замедления

Существование зон разгона и зон замедления, а также их расположение на единичной окружности существенно влияют на характер движения тела и зависят от значений параметров задачи. Принципиально различные случаи существования и расположения этих зон удобно проиллюстрировать, используя графическую интерпретацию, введенную в предыдущем параграфе. С этой целью рассмотрим различные случаи взаимного расположения единичной окружности и прямых в плоскости величин X, Y. Рассмотрим сначала случай, когда начальная фаза ϕ принадлежит интервалу $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, в данном случае точка пересечения P лежит правее оси ординат и имеет положительную абсциссу. При этом возможны три следующих случая взаимного расположения прямых α_1, α_2 и единичной окружности. Они изображены на рис. 3, 4, 5. В каждом из этих случаев характер движения тела имеет свои особенности.

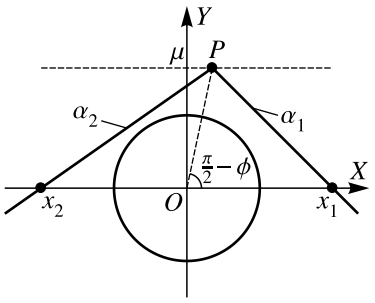

Рис. 3. Случай I. Вся окружность является зоной замедления

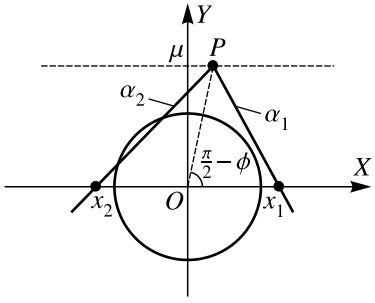

Рис. 4. Случай II. Одна зона замедления и одна зона разгона

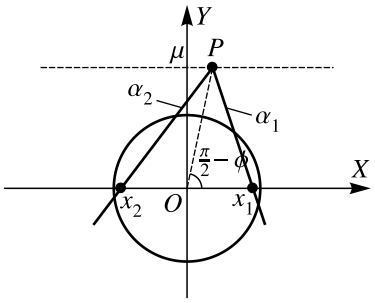

Рис. 5. Случай III. Две зоны замедления и две зоны разгона

I. Прямые α_1, α_2 не пересекают окружность (см. рис. 3). В этом случае зоной замедления будет вся окружность. Можно показать, что для этого случая параметры задачи удовлетворяют неравенству

$$\mu \geqslant \frac{\sqrt{1 + 2k\sin\phi + k^2}}{k}.$$

При выполнении данного неравенства тело, начав движение с произвольной начальной скоростью, через конечный интервал времени остановится и далее будет находиться в покое.

II. Прямая α_2 пересекает окружность, прямая α_1 не пересекает. Этот случай реализуется, когда параметры задачи удовлетворяют неравенству

$$\frac{\sqrt{1-2k\sin\phi+k^2}}{k} \leqslant \mu < \frac{\sqrt{1+2k\sin\phi+k^2}}{k}.$$

В этом случае существуют одна зона разгона влево (на рис. 4 ей соответствует дуга окружности, расположенная выше прямой α_2) и одна зона замедления (которой на рис. 4 соответствует вся оставшаяся часть единичной окружности, расположенная под прямой α_2).

III. Обе прямые пересекают окружность. В этом случае выполняется неравенство

$$\mu < \frac{\sqrt{1-2k\sin\phi+k^2}}{k}.$$

Тогда существует одна зона разгона вправо, представленная на рис. 5 дугой единичной окружности, расположенной выше прямой α_1, и одновременно существует одна зона разгона влево (дуга окружности выше прямой α_2). Эти зоны отделяются друг от друга двумя зонами замедления, которые представлены на рис. 5 дугами окружности, расположенными между прямыми α_1 и α_2.

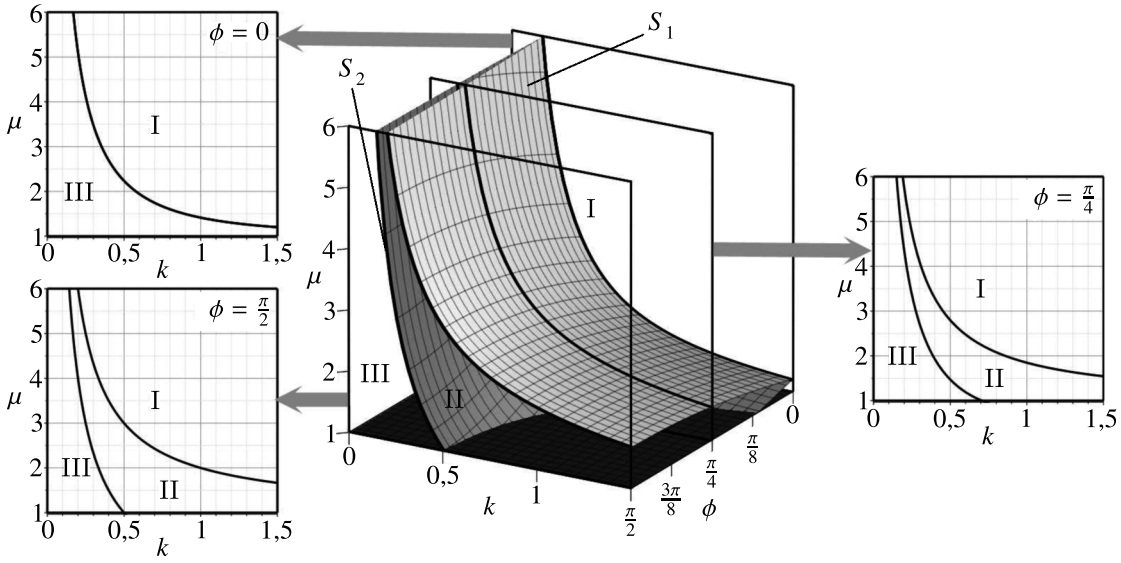

Рис. 6. Области в трехмерном пространстве параметров задачи, соответствующие случаям I, II и III $\left(0 \leqslant \phi \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$

В трехмерном пространстве параметров k, μ и ϕ каждому из указанных выше случаев соответствует области, обозначенные на рис. 6 римскими цифрами I, II и III.

Эти области отделяются друг от друга следующими поверхностями:

$$S_1: \quad \mu = \frac{\sqrt{1+2k\sin\phi+k^2}}{k}, \tag{20}$$

$$S_2: \quad \mu = \frac{\sqrt{1-2k\sin\phi+k^2}}{k}. \tag{21}$$

Также на рис. 6 указаны сечения этих областей плоскостями $\phi = 0$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$.

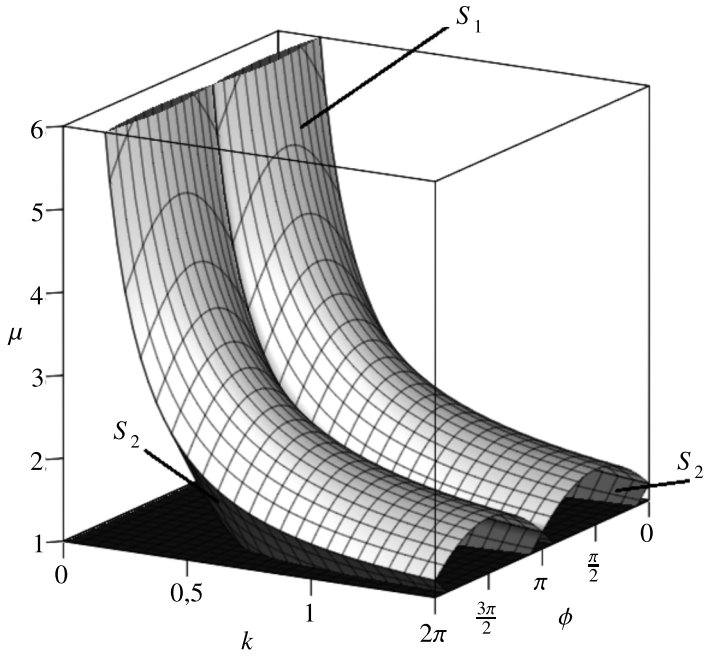

Рис. 7. Области в трехмерном пространстве, соответствующие случаям I, II и III ($0 \leqslant \phi \leqslant 2\pi$)

Проведенный выше анализ можно обобщить на весь интервал изменения начальной фазы $0 < \phi \leqslant 2\pi$ следующим образом.

Случай I, когда ни одна из прямых не пересекает окружность, определяется следующим неравенством:

$$\mu \geqslant \frac{\sqrt{1 + 2k|\sin\phi| + k^2}}{k}. \tag{22}$$

Случай II, когда только одна из прямых (либо α_1, либо α_2, в зависимости от значения параметра ϕ) пересекает окружность, реализуется, если выполнено неравенство

$$\frac{\sqrt{1 - 2k|\sin\phi| + k^2}}{k} \leqslant \mu < \frac{\sqrt{1 + 2k|\sin\phi| + k^2}}{k}. \tag{23}$$

А случай III, когда обе прямые пересекают окружность, задается неравенством

$$\mu < \frac{\sqrt{1 - 2k|\sin\phi| + k^2}}{k}. \tag{24}$$

На рис. 7 показаны области, соответствующие этим случаям для ϕ в интервале $(0, 2\pi)$.

О движении тела в случаях I и II

Исследуем типы движений, которые возможны в каждом из рассмотренных случаев.

В случае I характер движения тела будет наиболее простым. Тело, двигаясь с убывающей по модулю скоростью, останавливается через конечный промежуток времени и далее будет находиться в покое. Таким образом, в данном случае периодический режим невозможен.

Исследуем характер движения тела в случае II. Сначала предположим, что параметр $\phi \in (0, \pi)$. В этом случае при изучении движения тела на бесконечном промежутке времени можно, без ограничения общности, считать, что в начальный момент скорость тела равна нулю. Действительно, поскольку при $\phi \in (0, \pi)$ не существует зон разгона вправо, то, двигаясь с положительной скоростью (вправо), тело будет замедляться и остановится в некоторый

момент времени, который можно принять за начальный момент. При движении влево (в отрицательном направлении) зависимость скорости от времени можно получить интегрированием уравнения (19):

$$v(t) = \int_{t_0}^{t} [\cos(\tau + \phi) + k(\mu - \sin\tau)]\, d\tau + v(t_0). \tag{25}$$

Покажем, что функция $v(t)$ при некотором $t = t^*$ обращается в ноль. С этой целью вычислим ее значение при $t = t_0 + 2\pi n$, где $n \in \mathbb{N}$:

$$v(t_0 + 2\pi n) = v(t_0) + 2\pi k\mu n.$$

Таким образом, каким бы ни было начальное значение $v(t_0)$, существует такое n^*, что $v\left(t_0 + 2\pi n^*\right) > 0$, и, следовательно, в силу непрерывности функции $v(t)$ существует такой момент времени t^*, когда $v(t^*) = 0$, то есть произойдет остановка тела.

Итак, пусть в начальный момент времени t_0 тело находится в состоянии покоя. Если $t_0 \notin (t_3, t_4)$, то до момента времени t_3 тело будет оставаться в покое. В момент времени t_3 тело начнет двигаться влево с отрицательным ускорением, и в момент времени t_4 модуль его скорости достигнет максимального значения, а ускорение обратится в ноль.

На интервале $(t_4, t_3 + 2\pi)$ ускорение тела противоположно его скорости, то есть тело продолжает двигаться влево, но теперь уже с убывающей по модулю скоростью:

$$v(t) = \int_{t_3}^{t} [\cos(\tau + \phi) + k(\mu - \sin\tau)]\, d\tau. \tag{26}$$

Функция $v(t)$, заданная выражением (26), будет отрицательной в момент времени t_4 и монотонно возрастающей на интервале $(t_4, t_3 + 2\pi)$. Поскольку $v(t_3 + 2\pi) = 2\pi k\mu > 0$, то на интервале $(t_4, t_3 + 2\pi)$ существует такой момент времени, когда скорость тела обратиться в ноль, то есть тело совершит остановку. Поскольку остановка происходит в зоне замедления, то тело будет оставаться в покое до момента $t_3 + 2\pi$. Поскольку $v(t_3) = v(t_3 + 2\pi) = 0$, то, учитывая, что правая часть уравнения движения (19) 2π-периодически зависит от t, приходим к следующему выводу. При выполнении неравенства (23) движение тела, заданное начальным условием $v(t_0) = 0$, $t_0 \notin (t_3, t_4)$, представляет собой безреверсионный (в одном направлении) режим движения с периодически меняющейся скоростью.

Пусть теперь $t_0 \in (t_3, t_4)$. В этом случае тело сразу начнет движение влево со скоростью, определяемой формулой (25), где $v(t_0) = 0$. В момент времени t_4 будет иметь максимальную по модулю отрицательную скорость. Из неравенства

$$\int_{t_0}^{t} [\cos(\tau + \phi) + k(\mu - \sin\tau)]\, d\tau > \int_{t_3}^{t} [\cos(\tau + \phi) + k(\mu - \sin\tau)]\, d\tau \tag{27}$$

сразу следует, что $v(t_3 + 2\pi) > 2\pi k\mu > 0$. Поэтому в рассматриваемом случае остановка тела также произойдет на интервале $(t_4, t_3 + 2\pi)$. Последнее означает, что в момент времени $t_3 + 2\pi$ тело будет иметь нулевую скорость, и далее его движение будет полностью совпадать с рассмотренным выше случаем, то есть тело выйдет на безреверсионный режим движения влево с периодически меняющейся скоростью.

Аналогично можно показать, что в случае $\pi < \phi < 2\pi$ единственным возможным предельным режимом, на который тело выходит за конечный промежуток времени, будет безреверсионный режим движения вправо с периодически меняющейся скоростью.

Проведенный выше анализ позволяет сформулировать следующую теорему.

Теорема 1. *Если параметры задачи удовлетворяют неравенству* (23)*, то при любой начальной скорости движение тела через конечный промежуток времени выйдет на режим с периодически меняющейся скоростью и одним интервалом залипания за период. В зависимости от значения параметра ϕ этот режим может быть либо периодическим безреверсионным движением влево* ($0 < \phi < \pi$)*, либо периодическим безреверсионным движением вправо* ($\pi < \phi < 2\pi$).

Дадим описание безреверсионного режима движения влево, который имеет место при выполнении неравенства $0 < \phi < \pi$. В момент времени t_3 тело начинает движение влево из состояния покоя. Скорость тела, достигнув в момент времени t_4 своего максимального значения, начнет уменьшаться по абсолютной величине до тех пор, пока тело не остановится. Остановка тела произойдет в момент времени t^*, который определяется из уравнения

$$(\sin\phi + k)\left(\cos t^* - \cos t_3\right) + \cos\phi\left(\sin t^* - \sin t_3\right) + k\mu\left(t^* - t_3\right) = 0. \tag{28}$$

После остановки тело остается в покое на интервале времени $\left(t^*,\, t_3 + 2\pi\right)$. В момент времени $t_3 + 2\pi$ тело начинает новый цикл движения, который полностью повторяет предыдущий. Для интервала начальной фазы $\pi < \phi < 2\pi$ имеет место аналогичный безреверсионный периодический режим движения вправо.

Заметим, что случай II невозможен при $\phi = \pi m$, $m = 0,\ 1,\ 2$ (см. неравенство (23)). Также отметим, что при $\phi = \pi m$, $m = 0,\ 1,\ 2$ движение тела с двумя внутренними массами эквивалентно движению тела с одной внутренней массой, движущейся по окружности. Движение последней системы было подробно изучено в [Bardin, Panev, 2018], где было также показано, что в такой системе рассматриваемый случай не реализуется.

Периодические режимы движения тела в случае III

Рассмотрим случай III, то есть далее будем предполагать, что параметры задачи удовлетворяют неравенству (24). Этот случай наиболее сложен для анализа, поэтому ограничимся только изучением периодических режимов движения, которые, как было показано в случае II, играют определяющую роль в динамике системы.

В рассматриваемом случае, в отличие от случая II, на одном периоде движения одновременно присутствуют зоны разгона как влево, так и вправо, поэтому возможны как реверсионные режимы (движение происходит и вправо, и влево), так и безреверсионные (движение происходит только в одном направлении, без отката). Исследование показало, что в случае III, в зависимости от значения параметров, имеют место 6 качественно различных периодических режимов движения. При фиксированных значениях параметров реализуется только один из этих шести режимов. На рис. 8 представлены области, соответствующие каждому из указанных режимов.

Рассмотрим каждый из этих периодических режимов в отдельности.

1. *Периодический реверсионный режим движения с двумя залипаниями*. В этом случае тело останавливается и в первой, и во второй зонах замедления и остается в покое до начала соответствующей зоны разгона. Исследуем, при каких условиях реализуется данный режим. Поскольку при таком режиме тело совершает остановки и в первой, и во второй зонах замедления, то в моменты времени t_1 и t_3 скорость тела равна нулю.

   - В момент t_1 тело начинает движение вправо, то есть скорость становится положительной. Ее зависимость от времени можно получить интегрированием уравнения (18):

$$v(t) = \int_{t_1}^{t} \left[\cos(\tau + \phi) - k(\mu - \sin\tau)\right] d\tau. \tag{29}$$

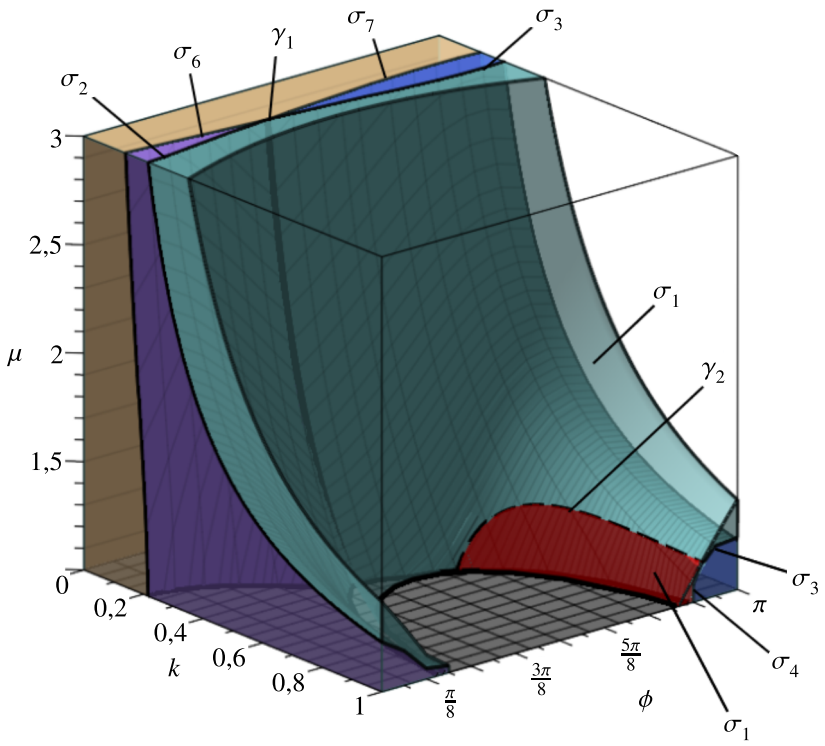

Рис. 8. Области в пространстве параметров задачи, соответствующие периодическим режимам движения в случае III. Через σ_i ($i = 1, \ldots, 7$) обозначены поверхности, разделяющие области параметров, соответствующие различным периодическим режимам движения тела. Кривая γ_1 является пересечением поверхностей σ_2, σ_3, σ_6 и σ_7. Кривая γ_2 является пересечением поверхностей σ_1, σ_3 и σ_4

Правая часть выражения (29) является монотонно возрастающей положительной функцией на интервале (t_1, t_2) и монотонно убывающей на интервале (t_2, t_3). Таким образом, для гарантированной остановки на интервале (t_2, t_3) необходимо потребовать, чтобы правая часть выражения (29) при $t = t_3$ была отрицательна либо обращалась в ноль, то есть чтобы было выполнено неравенство

$$(\sin\phi - k)(\cos t_3 - \cos t_1) + \cos\phi(\sin t_3 - \sin t_1) - k\mu(t_3 - t_1) \leqslant 0. \tag{30}$$

После остановки тело будет покоится до момента времени t_3.

- В момент времени t_3 тело начнет движение из состояния покоя с отрицательным ускорением. При этом скорость тела вычисляется по формуле (26). Функция $v(t)$, заданная по формуле (26), убывает до своего минимального (отрицательного) значения в момент времени t_4, а затем начинает возрастать до тех пор, пока не обратится в ноль в момент остановки тела. Поскольку, по предположению, остановка должна произойти на интервале $(t_4, t_1 + 2\pi)$, то непрерывно возрастающая функция $v(t)$ в момент времени $t_1 + 2\pi$ должна принимать положительное значение либо обращаться в ноль:

$$(\sin\phi + k)(\cos t_3 - \cos t_1) + \cos\phi(\sin t_3 - \sin t_1) + k\mu(t_3 - t_1 - 2\pi) \geqslant 0. \tag{31}$$

Таким образом, если тело начинает движение из состояния покоя и выполняются неравенства (30) и (31), то реализуется периодический реверсионный режим движения с двумя залипаниями за один период. Поскольку t_1, t_2, t_3 и t_4 являются решениями уравнений (15), то есть выражаются через параметры задачи k, ϕ и μ, то неравенства (30), (31), а также

неравенство (24) задают в пространстве параметров задачи область, границами которой являются поверхности:

$$\begin{aligned}
&\sigma_1: \quad \mu = \frac{\sqrt{1 - 2|\sin\phi|k + k^2}}{k},\\
&\sigma_2: \quad (\sin\phi - k)(\cos t_3 - \cos t_1) + \cos\phi(\sin t_3 - \sin t_1) - k\mu(t_3 - t_1) = 0,\\
&\sigma_3: \quad (\sin\phi + k)(\cos t_3 - \cos t_1) + \cos\phi(\sin t_3 - \sin t_1) + k\mu(t_3 - t_1 - 2\pi) = 0.
\end{aligned} \tag{32}$$

На рис. 8 и 9 область, соответствующая описанному режиму движения, закрашена зеленым цветом.

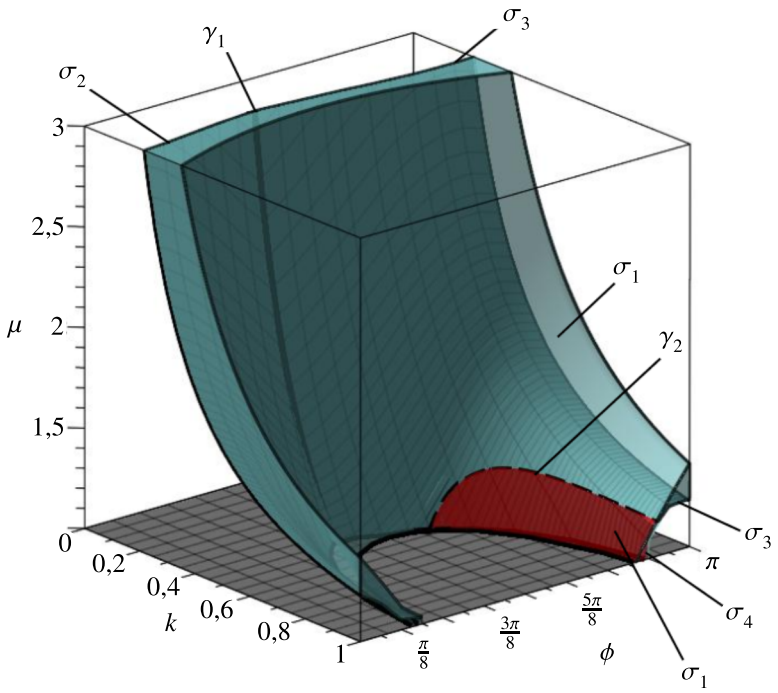

Рис. 9. Области, соответствующие реверсионному периодическому движению с двумя интервалами залипания за период и безреверсионному периодическому движению с одним интервалом залипания за период (режимы движения 1 и 4)

2. *Периодический реверсионный режим движения с одним залипанием во второй зоне замедления*. Получим условия, накладываемые на параметры задачи, при которых реализуется данный режим.

- Поскольку во второй зоне замедления происходит остановка с залипанием, в момент времени t_1 тело начинает движение из состояния покоя вправо с монотонно возрастающей функцией скорости (29). Своего максимума функция скорости достигает в момент времени t_2, после чего начинает монотонно убывать. Так как остановки и, соответственно, залипания в первой зоне замедления (интервал (t_2, t_3)) не происходит, то функция скорости в момент времени t_3 неотрицательна, то есть выполняется неравенство

$$(\sin\phi - k)(\cos t_3 - \cos t_1) + \cos\phi(\sin t_3 - \sin t_1) - k\mu(t_3 - t_1) \geqslant 0. \tag{33}$$

- Первая остановка тела происходит в зоне разгона влево. В некоторый момент времени $t^* \in (t_3, t_4)$, определяемый из уравнения

$$(\sin\phi - k)\left(\cos t^* - \cos t_1\right) + \cos\phi\left(\sin t^* - \sin t_1\right) - k\mu\left(t^* - t_1\right) = 0, \tag{34}$$

тело останавливается и сразу начинает движение в обратном направлении (влево). Для гарантированной остановки функция скорости (29) на этом интервале должна обратиться в ноль. Это означает, что в момент времени t_4 функция скорости должна быть неположительной, то есть должно выполняться неравенство

$$(\sin\phi - k)(\cos t_4 - \cos t_1) + \cos\phi(\sin t_4 + \sin t_1) - k\mu(t_4 - t_1) \leqslant 0. \tag{35}$$

- Начиная с момента времени t^* тело движется влево. Зависимость функции скорости от времени принимает следующий вид:

$$v(t) = \int\limits_{t^*}^{t} [\cos(\tau + \phi) + k(\mu - \sin\tau)]\, d\tau. \tag{36}$$

Данная функция в зоне разгона влево принимает отрицательные значения и монотонно убывает до момента времени t_4, а затем, на интервале $(t_4,\ t_1 + 2\pi)$, начинает возрастать и достигает своего нулевого значения. Поскольку, по предположению, на интервале $(t_4,\ t_1 + 2\pi)$ тело останавливается, то в силу непрерывности функция $v(t)$ в момент времени $t_1 + 2\pi$ неотрицательна, то есть выполняется неравенство

$$(\sin\phi + k)\left(\cos t^* - \cos t_1\right) + \cos\phi\left(\sin t^* - \sin t_1\right) + k\mu\left(t^* - t_1 + 2\pi\right) \geqslant 0, \tag{37}$$

где t^* определяется из уравнения (34).

Таким образом, при выполнении неравенств (33), (35) и (37) тело, начав движение из состояния покоя в момент времени t_1, попадает на периодический реверсионный режим движения с залипанием только во второй зоне замедления. Значения параметров, соответствующие этому режиму, лежат в области, ограниченной поверхностями:

$$\begin{aligned}
&\sigma_2: \quad (\sin\phi - k)(\cos t_3 - \cos t_1) + \cos\phi(\sin t_3 - \sin t_1) - k\mu(t_3 - t_1) = 0,\\
&\sigma_5: \quad (\sin\phi - k)(\cos t_4 - \cos t_1) + \cos\phi(\sin t_4 + \sin t_1) - k\mu(t_4 - t_1) = 0,\\
&\sigma_6: \quad (\sin\phi + k)\left(\cos t^* - \cos t_1\right) + \cos\phi\left(\sin t^* - \sin t_1\right) + k\mu\left(t^* - t_1 + 2\pi\right) = 0.
\end{aligned} \tag{38}$$

Область, соответствующая описанному выше режиму движения, обозначена на рис. 8 и 10 фиолетовым цветом. Стоит отметить, что граница σ_5 на рисунках не приведена, поскольку на интервале изменения начальной фазы $\phi \in (0,\ \pi)$ неравенство (35) выполняется для всех значений параметров, соответствующих случаю III.

3. *Периодический реверсионный режим движения с одним залипанием в первой зоне замедления*. Этот режим аналогичен предыдущему, с той лишь разницей, что залипание происходит в первой зоне замедления, и движение из состояния покоя начинается в момент времени t_3 влево. Нетрудно показать, что область параметров задачи, соответствующих данному режиму движения, реализуется при выполнении следующих неравенств:

$$(\sin\phi + k)(\cos t_3 - \cos t_1) + \cos\phi(\sin t_3 - \sin t_1) + k\mu(t_3 - t_1 - 2\pi) \leqslant 0, \tag{39}$$

$$(\sin\phi + k)(\cos t_3 - \cos t_2) + \cos\phi(\sin t_3 - \sin t_2) + k\mu(t_3 - t_2 - 2\pi) \geqslant 0, \tag{40}$$

$$(\sin\phi - k)\left(\cos t^{**} - \cos t_3\right) + \cos\phi\left(\sin t^{**} - \sin t_3\right) - k\mu\left(t^{**} - t_3 - 2\pi\right) \leqslant 0, \tag{41}$$

где t^{**} находится из уравнения

$$(\sin\phi + k)\left(\cos t^{**} - \cos t_3\right) + \cos\phi\left(\sin t^{**} - \sin t_3\right) + k\mu\left(t^{**} - t_3\right) = 0. \tag{42}$$

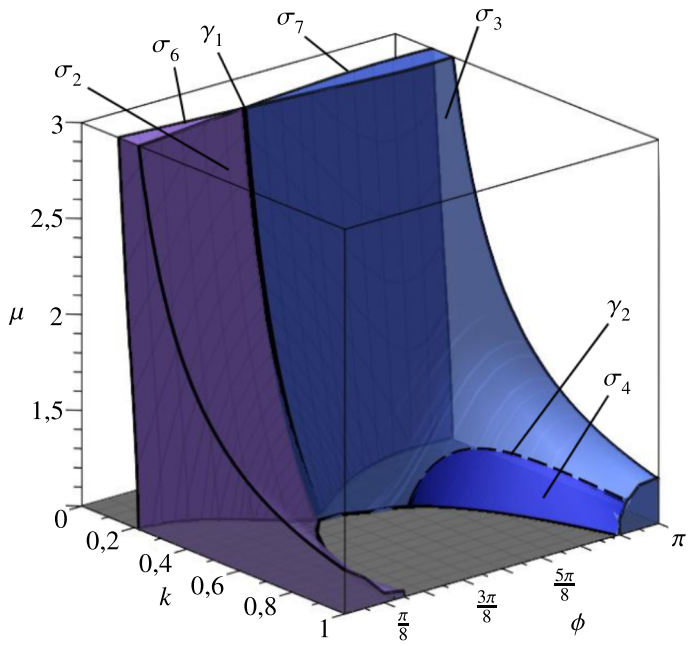

Рис. 10. Области, соответствующие реверсионному периодическому движению с одним интервалом залипания за период (режимы 2 и 3)

Неравенства (39), (40) и (41) задают область, ограниченную поверхностями:

$$\begin{aligned}
&\sigma_3: \quad (\sin\phi + k)(\cos t_3 - \cos t_1) + \cos\phi(\sin t_3 - \sin t_1) + k\mu(t_3 - t_1 - 2\pi) = 0,\\
&\sigma_4: \quad (\sin\phi + k)(\cos t_3 - \cos t_2) + \cos\phi(\sin t_3 - \sin t_2) + k\mu(t_3 - t_2 - 2\pi) = 0,\\
&\sigma_7: \quad (\sin\phi - k)\left(\cos t^{**} - \cos t_3\right) + \cos\phi\left(\sin t^{**} - \sin t_3\right) - k\mu\left(t^{**} - t_3 - 2\pi\right) = 0.
\end{aligned} \tag{43}$$

Область, соответствующая данному режиму движения, отмечена на рис. 8 и 10 синим цветом.

4. *Периодический безреверсионный режим движения с залипанием в первой зоне замедления*. Оказалось, что и в случае III существуют безреверсионные режимы движения с залипанием в одной зоне замедления. Рассмотрим сначала периодический безреверсионный режим движения с залипанием в первой зоне замедления. При данном режиме происходит движение влево, без отката. Тело начинает движение влево в момент времени t_3 и проходит без остановки вторую зону замедления (интервал $(t_4,\ t_1 + 2\pi)$), а также зону разгона вправо (интервал $(t_1 + 2\pi,\ t_2 + 2\pi)$). Остановка тела происходит лишь в первой зоне замедления, соответствующей интервалу $(t_2 + 2\pi,\ t_3 + 2\pi)$. Получим условие, при котором реализуется данный режим.

   Поскольку при данном режиме движения остановка с залипанием происходит в первой зоне замедления, следовательно, в момент времени t_3 тело начинает движение из состояния покоя влево с монотонно убывающей скоростью (26), которая после момента времени t_4 начинает монотонно возрастать и обращается в ноль на интервале $(t_2 + 2\pi,\ t_3 + 2\pi)$, то есть остановка тела происходит в первой зоне замедления. Рассуждая так же, как и в рассмотренных выше случаях, можно показать, что условие остановки тела при $t > t_2 + 2\pi$ задается неравенством

$$(\sin\phi + k)(\cos t_3 - \cos t_2) + \cos\phi(\sin t_3 - \sin t_2) + k\mu(t_3 - t_2 - 2\pi) < 0. \tag{44}$$

Нетрудно показать, что если неравенство (44) выполнено, то остановка произойдет до момента времени $t_3 + 2\pi$.

Таким образом, при выполнении неравенства (44) реализуется периодический безреверсионный режим движения с одним залипанием в первой зоне замедления. Область, соответствующую этому режиму, в пространстве параметров ограничивают две поверхности: поверхность σ_1, заданная уравнением (32), и поверхность σ_4, заданная уравнением (38).

Область, соответствующая четвертому режиму, показана на рис. 8 и 9 красным цветом.

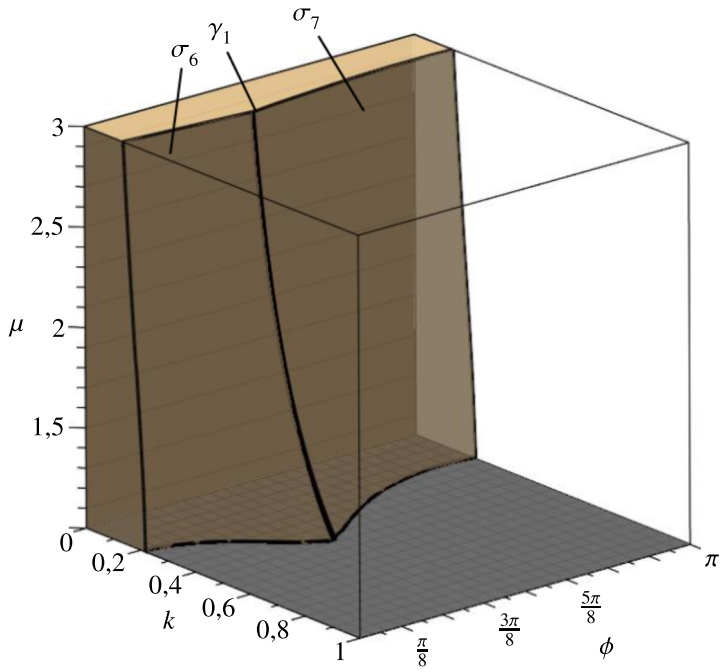

Рис. 11. Область, соответствующая реверсионному периодическому режиму движения без интервалов залипания

5. *Периодический безреверсионный режим движения с одним залипанием во второй зоне замедления*. Данный режим аналогичен рассмотренному выше режиму, с той лишь разницей, что движение происходит только вправо. В этом случае условие, накладываемое на параметры задачи, имеет следующий вид:

$$(\sin\phi - k)(\cos t_4 - \cos t_1) + \cos\phi(\sin t_4 - \sin t_1) - k\mu(t_4 - t_1) > 0. \qquad (45)$$

Область, соответствующую этому режиму, в пространстве параметров ограничивают поверхность σ_1 (32) и поверхность σ_5 (38).

Замечание 1. Области четвертого и пятого режимов непосредственно граничат с областью, соответствующей случаю II, в которой предельным режимом также является периодический безреверсионный режим с залипанием либо в первой, либо во второй зоне замедления. Таким образом, в этих областях характер периодического движения качественно не отличается от периодического движения в случае II.

6. *Периодический реверсионный режим движения без интервалов залипания*. В пространстве параметров задачи неисследованной осталась область, заданная неравенствами

$$(\sin\phi + k)\left(\cos t^* - \cos t_1\right) + \cos\phi\left(\sin t^* - \sin t_1\right) + k\mu\left(t^* - t_1 + 2\pi\right) \leqslant 0, \tag{46}$$

$$(\sin\phi - k)\left(\cos t^{**} - \cos t_3\right) + \cos\phi\left(\sin t^{**} - \sin t_3\right) - k\mu\left(t^{**} - t_3 - 2\pi\right) \geqslant 0, \tag{47}$$

где t^* определяется из уравнения (34), а t^{**} определяется из уравнения (42).

Численно было установлено, что в данной области существует реверсионный периодический режим движения. В отличие от рассмотренных выше периодических режимов здесь тело движется без залипаний. Опишем данный периодический режим.

В некоторый момент времени $t^{(1)} \in (t_1, t_2)$ тело начинает движение вправо до остановки в некоторый момент времени $t^{(2)} \in (t_3, t_4)$. Затем сразу же начинается движение влево до момента времени $t^{(1)} + 2\pi$, в который происходит вторая остановка тела. Затем весь цикл движения повторяется. Моменты времени $t^{(1)}$ и $t^{(2)}$ определяются из следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} \sin\left(t^{(1)} + \phi\right) - \sin\left(t^{(2)} + \phi\right) + k\left(\cos t^{(1)} - \cos t^{(2)}\right) + k\mu\left(t^{(1)} - t^{(2)} + 2\pi\right) = 0, \\ \sin\left(t^{(2)} + \phi\right) - \sin\left(t^{(1)} + \phi\right) + k\left(\cos t^{(1)} - \cos t^{(2)}\right) + k\mu\left(t^{(1)} - t^{(2)}\right) = 0. \end{cases} \tag{48}$$

Область, соответствующая данному режиму, показана на рис. 8 и 11 бежевым цветом. Она ограничена поверхностями σ_6 и σ_7, заданными уравнениями (38) и (43).

Результаты проведенного в данном параграфе анализа можно сформулировать в форме следующей теоремы.

Теорема 2. *Если параметры задачи удовлетворяют неравенству* (24)*, то существует режим движения с периодически меняющейся скоростью. Возможны следующие типы периодических режимов движения.*

1. *При выполнении условий* (30) *и* (31) *реализуется периодический реверсионный режим движения с двумя интервалами залипаниями за период.*
2. *При выполнении условий* (33)*,* (35)*,* (37) *или* (39)*,* (40) *и* (41) *реализуется периодический реверсионный режим движения с одним интервалом залипания за период.*
3. *При выполнении условий* (44) *и* (45) *реализуются периодические безреверсионные режимы движения влево и вправо соответственно, на которых движение тела происходит с одним интервалом залипания за период.*
4. *При выполнении условий* (46)*,* (47) *реализуется периодический реверсионный режим движения без интервалов залипания.*

Заключение

Анализ динамики механической системы, рассмотренной в данной работе, позволяет сделать вывод о том, что если в результате перемещения внутренних масс тело может начать движение из состояния покоя, то существует периодический режим движения. Характер периодического движения существенно зависит от параметров задачи. При определенных значениях параметров периодическое движение имеет реверсионный характер. В этом случае на временном интервале, равном одному периоду, тело движется как в положительном, так и в отрицательном направлении. Здесь возможно либо реверсионное движение без интервалов залипания, либо

реверсионное движение с одним или двумя интервалами залипания за период. Заметим, что интервалы залипания чередуются с интервалами движения в положительном и отрицательном направлении. Существуют также области значений параметров, в которых имеет место безреверсионное периодическое движение. В безреверсионном режиме тело движется в одном и том же направлении, а интервалы движения чередуются с интервалами залипания.

Кроме аналитического исследования периодических режимов было проведено численное моделирование динамики рассмотренной механической системы. Анализ результатов численного моделирования показал, что каждый периодический режим является предельным режимом движения, на который тело выходит либо за конечный промежуток времени, либо асимптотически приближается к нему. Предельные режимы движения играют важную роль в динамике системы, поэтому результаты их исследования могут представить интерес при решении прикладных задач проектирования и конструирования мобильных капсульных роботов.

Список литературы (References)

Бардин Б. С. О безударных прыжках тела, несущего подвижные массы // Труды XVIII Межд. симп. «Динамика виброударных сильно нелинейных систем» (DYVIS-2015). — 2015. — С. 42–49.

Bardin B. S. O bezudarnykh pryzhkakh tela, nesushchego podvizhnye massy [On shockless jumps of a body carrying moving masses] // Trudy XVIII Mezhd. simp. “Dinamika vibroudarnyh sil’no nelinejnyh sistem” (DYVIS-2015). — 2015. — P. 42–49 (in Russian).

Бардин Б. С., Панев А. С. О периодических движениях тела с подвижной внутренней массой по горизонтальной поверхности // Труды МАИ. — 2015. — Т. 84. — https://trudymai.ru/published.php?ID=62995

Bardin B. S., Panev A. S. O periodicheskikh dvizheniyakh tela s podvizhnoj vnutrennej massoj po gorizontal’noj poverhnosti [On periodic motions of a body with a moving internal mass on a horizontal surface] // Trudy MAI. — 2015. — Vol. 84. — https://trudymai.ru/published.php?ID=62995 (in Russian).

Болотник Н. Н., Зейдис И. М., Циммерманн К., Яцун С. Ф. Динамика управляемых движений вибрационных систем // Известия РАН. Теория и системы управления. — 2006. — Т. 70, № 5. — С. 157–167.

Bolotnik N. N., Zeidis I. M., Zimmermann K., Yatsun S. F. Dynamics of controlled motion of vibration-driven systems // Journal of computer and systems sciences international. — 2006. — Vol. 45, No. 5. — P. 831–840. (Original Russian paper: *Bolotnik N. N., Zeidis I. M., Zimmermann K., Yatsun S. F.* Dinamika upravlyaemykh dvizhenijvibratsionnykh sistem // Izvestiya RAN. — 2006. — Vol. 70, No. 5. — P. 157–167.)

Болотник Н. Н., Черноусько Ф. Л. Мобильные роботы, управляемые движением внутренних тел // Труды Института математики и механики УрО РАН. — 2010. — Т. 16, № 5. — С. 213–222.

Bolotnik N. N., Chernous’ko F. L. Mobil’nye roboty, upravlyaemye dvizheniem vnutrennikh tel [Mobile robots controlled by the movement of internal bodies] // Trudy Instituta matematiki i mekhaniki UrO RAN. — 2010. — Vol. 16, No. 5. — P. 213–222 (in Russian).

Черноусько Ф. Л. Анализ и оптимизация движения тела, управляемого посредством подвижной внутренней массы // Прикладная математика и механика. — 2006. — Т. 70, № 6. — С. 915–946.

Chernous’ko F. L. Analysis and optimization of the motion of a body controlled by means of a movable internal mass // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. — 2006. — Vol. 70, No. 6. — P. 819–842. (Original Russian paper: *Chernous’ko F. L.* Analiz i optimizatsiya dvizheniya tela, upravlyaemogo posredstvom podvizhnoj vnutrennej massy // Prikladnaya matematika i mekhanika. — 2006. — Vol. 70, No. 6. — P. 915–946.)

Черноусько Ф. Л. О движении тела, содержащего подвижную внутреннюю массу // Докл. РАН. — 2005. — Т. 405, № 1. — С. 56–60.

Chernous’ko F. L. On the motion of a body containing a movable internal mass // Doklady Physics. — 2005. — Vol. 50, No. 11. — P. 593–597. (Original Russian paper: *Chernous’ko F. L.* O dvizhenii tela, soderzhashchego podvizhnuyu vnutrenn’uyu massu // Doklady Akademii nauk. — 2005. — Vol. 405, No. 1. — P. 56–60.)

Черноусько Ф. Л., Болотник Н. Н. Динамика мобильных систем с управляемой конфигурацией. — М.: Физматлит, 2022. — 464 с.

Chernous’ko F. L., Bolotnik N. N. Dinamika mobilnyh sistem s upravlyaemoj konfiguratsiej [Dynamics of mobile systems with managed configuration]. — Moscow: Fizmatlit, 2002. — 464 p. (in Russian).

Bardin B. S., Panev A. S. On motion of a body with moving internal mass on a rough horizontal surface // Rus. J. Nonlin. Dyn. — 2018. — Vol. 14, No. 4.

Chekina E. A. Periodic body motions along a horizontal rough surface by moving two internal masses // J. Phys.: Conf. Ser. — 2021. — Vol. 1959. — 012014.