КОМПЬЮТЕРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ
И МОДЕЛИРОВАНИЕ 2024 Т. 16 № 1 С. 123–136
DOI: 10.20537/2076-7633-2024-16-1-123-136

Ки&М

СПЕЦИАЛЬНЫЙ ВЫПУСК

УДК: 531-44

Численно-аналитическое исследование движения маятника Максвелла

Г. М. Розенблат[a], М. В. Яшина[b]

Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет (МАДИ),
Россия, 125319, г. Москва, Ленинградский проспект, 64

E-mail: [a] gr51@mail.ru, [b] mv.yashina@madi.ru

Получено 22.12.2023.
Принято к публикации 28.01.2023.

В статье рассматривается задача об устойчивости вертикального положения маятника Максвелла при его периодических движениях вверх-вниз. Рассмотрены два типа переходных движений: остановка — происходит тогда, когда тело маятника в своем самом верхнем положении на нити (при его стандартном движении вверх) на мгновение останавливается; двухзвенный маятник — происходит тогда, когда вся нить с тела маятника выбрана (самое нижнее положение тела на нити при его стандартном движении вниз), и тело вынуждено вращаться относительно нити вокруг точки ее закрепления к телу. Показано, что при любых значениях параметров маятника это положение является неустойчивым в том смысле, что в системе возникают колебания нити около вертикали конечной амплитуды при сколь угодно малых начальных отклонениях. Кроме того, установлено, что никаких ударных явлений при движении маятника Максвелла не возникает, а сама модель этого маятника при часто используемых в литературе значениях его параметров является некорректной по Адамару. В настоящей работе показано, что вертикальное положение нитей маятника при указанных колебательных движениях тела вдоль нитей при любых невырожденных значениях параметров маятника Максвелла всегда является неустойчивым в указанном выше смысле. Причем обусловлена эта неустойчивость именно переходными движениями 2-го типа. В настоящей работе далее показано, что никаких скачков скоростей или ускорений (из-за которых могут происходить удары или рывки в натяжениях нитей) при указанных движениях рассматриваемой модели маятника Максвелла не происходит. На наш взгляд, наблюдаемые в экспериментах рывки обусловлены другими причинами, например техническим несовершенством приборов, на которых производились опыты. В работе показано, что при любых значениях параметров маятника это положение является неустойчивым в том смысле, что в системе возникают колебания нити около вертикали конечной амплитуды при сколь угодно малых начальных отклонениях.

Ключевые слова: маятник Максвелла, неустойчивость, удар, некорректность по Адамару

© 2024 Григорий Маркович Розенблат, Марина Викторовна Яшина
Статья доступна по лицензии Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Unported License.
Чтобы получить текст лицензии, посетите веб-сайт http://creativecommons.org/licenses/by-nd/3.0/
или отправьте письмо в Creative Commons, PO Box 1866, Mountain View, CA 94042, USA.

COMPUTER RESEARCH AND MODELING
2024 VOL. 16 NO. 1 P. 123–136
DOI: 10.20537/2076-7633-2024-16-1-123-136

Ки&М

SPECIAL ISSUE

UDC: 531-44

Numerical and analytical study of the motion of Maxwell's pendulum

G. M. Rosenblat[a], M. V. Yashina[b]

Moscow Automobile and Road Construction State Technical University (MADI),
64 Leningradsky prospekt, Moscow, 125319, Russia

E-mail: [a] gr51@mail.ru, [b] mv.yashina@madi.ru

Received 22.12.2023.
Accepted for publication 28.01.2023.

The article considers the problem of the stability of the vertical position of a Maxwell pendulum during its periodic up-down movements. Two types of transition movements are considered: "stop" — occurs when the body of the pendulum in its highest position on the string (during its "standard" upward movement) stops for a moment; "two-link pendulum" — occurs when the entire thread from the body of the pendulum is selected (the lowest position of the body on the thread during its "standard" downward movement), and the body is forced to rotate relative to the thread around the point of its attachment to the body. It is shown that for any values of the pendulum parameters, this position is unstable in the sense that oscillations of the thread around the vertical of finite amplitude occur in the system for arbitrarily small initial deviations. In addition, it has been established that no shock phenomena occur during the movement of the Maxwell pendulum, and the model of this pendulum itself, with the values of its parameters often used in the literature, is incorrect according to Hadamard. In this work, it is shown that the vertical position of the pendulum threads during the indicated oscillatory movements of the body along the threads for any non-degenerate values of the parameters of the Maxwell pendulum is always unstable in the above sense. Moreover, this instability is caused precisely by transitional movements of the 2nd type. In this work, it is further shown that no jumps in speeds or accelerations (due to which shocks or "jerks" in the tension of the threads can occur) do not occur during the indicated movements of the Maxwell pendulum model under consideration. In our opinion, the "jerks" observed in the experiments are due to other reasons, for example, the technical imperfection of the instruments on which the experiments were carried out.

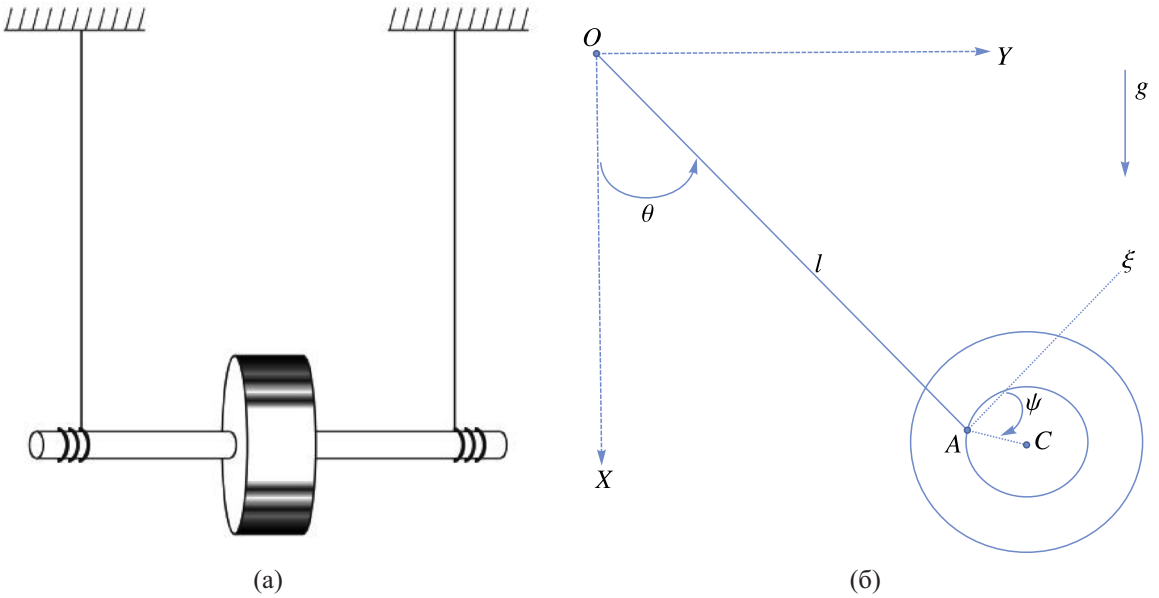
Keywords: Maxwell pendulum, instability, strike, Hadamard incorrectness

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2024, vol. 16, no. 1, pp. 123–136 (Russian).

© 2024 Grigory M. Rosenblat, Marina V. Yashina
This work is licensed under the Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Unported License.
To view a copy of this license, visit http://creativecommons.org/licenses/by-nd/3.0/
or send a letter to Creative Commons, PO Box 1866, Mountain View, CA 94042, USA.

1. Введение

Маятник Максвелла представляет собой систему, состоящую из уравновешенного твердого тела вращения (например, цилиндрическая катушка — тело маятника) с намотанными на его оси невесомыми, нерастяжимыми нитями конечной длины. Нити подвешиваются на горизонтальном подвесе так, чтобы ось симметрии (вращения) тела маятника всегда располагалась строго горизонтально. Кроме того, предполагается, что центр масс тела лежит на этой оси симметрии и всегда находится на постоянном расстоянии r от нити (r — радиус оси тела маятника). Конструкция движется в поле силы тяжести. Тело маятника опускается (поднимается) вдоль нитей при раскручивании (закручивании) последних. Движение при этом может быть организовано так, что оно является плоскопараллельным, т. е. происходит параллельно некоторой неподвижной вертикальной плоскости, перпендикулярной оси тела маятника. Кроме того, допускаются колебательные движения нитей, которые происходят параллельно указанной выше вертикальной плоскости (см. рис. 1, *а*). Настоящая статья является развитием и продолжением ранее опубликованной работы [Розенблат, 2018].



(а) (б)

Рис. 1. (а) Маятник Максвелла; (б) маятник Максвелла в разматывающемся или сматывающемся движениях (стандартные движения)

Маятник Максвелла в разматывающемся или сматывающемся движениях (стандартные движения). O — точка подвеса нити маятника. OXY — неподвижная система координат. θ — угол, образуемый нитью маятника с нисходящей вертикалью OX и отсчитываемый против часовой стрелки. Геометрическая точка A схода нити с катушки (тела маятника) относительно нити подвижна: $OA = \rho(t)$. Физическая (материальная) точка схода нити и соответствующая (совпадающая с ней) точка катушки относительно нити имеют скорости, равные нулю (относительный МЦС). Центр масс катушки лежит все время на прямой $A\xi \perp OA$ и $AC = r = \text{const}$. Движение маятника определяется двумя обобщенными координатами ρ, θ.

Маятник Максвелла в переходном движении (движение 2-го типа — двухзвенный маятник). O — точка подвеса нити маятника. OXY — неподвижная система координат. θ — угол, образуемый нитью маятника с нисходящей вертикалью OX и отсчитываемый против часовой стрелки. Точка A схода нити с катушки (тела маятника) закреплена по отношению к нити, и $OA = l = \text{const}$.

Радиус AC катушки образует переменный угол ψ с прямой $A\xi \perp OA$. Отсчитывается этот угол по часовой стрелке. Движение маятника определяется двумя обобщенными координатами θ, ψ.

Описание конструкции маятника Максвелла и простейших его движений приведено, например, в [Боровой, Климов, 1981; Сивухин, 1989; Матвеев, 1986].

Ввиду ограниченности длины нитей возникают квазипериодические колебательные движения тела маятника вдоль его нитей, причем тело 1 раскручивается или закручивается вдоль нитей, находясь попеременно то справа, то слева от них. Эти виды движений, которые будем называть стандартными, сопрягаются друг с другом при помощи следующих двух типов переходных движений.

1-й тип переходного движения — остановка — происходит тогда, когда тело маятника в своем самом верхнем положении на нити (при его стандартном движении вверх) на мгновение останавливается (скорость центра масс тела маятника становится равной нулю). Этот тип переходного движения происходит практически мгновенно. Затем тело маятника начинает тут же раскручиваться вдоль нити (стандартное движение вниз), двигаясь по той же самой ее стороне, по которой оно пришло в это положение. Иными словами, если тело маятника было слева от нити, то оно при движении вниз останется также слева от нее, а если справа от нити, то при движении вниз останется также справа от нее.

2-й тип переходного движения — двухзвенный маятник — происходит тогда, когда вся нить с тела маятника выбрана (самое нижнее положение тела на нити при его стандартном движении вниз), и тело вынуждено вращаться относительно нити вокруг точки ее закрепления к телу. Отметим, что скорость этой точки относительно нити равна нулю. При этом сама нить продолжает свое колебательное движение относительно неподвижной точки подвеса (см. рис. 1, *б*). Система, таким образом, движется как вырожденный двухзвенный маятник. Этот тип переходного движения происходит уже в течение конечного (и, вообще говоря, не малого) промежутка времени, в результате которого тело маятника поворачивается относительно нити на 180 градусов. Затем начинается закручивающееся (стандартное) обратное движение тела маятника вверх, которое происходит по другой стороне нити. Иными словами, если тело при движении вниз находилось справа от нити, то при движении вверх оно будет находиться слева от нее, и наоборот.

2. Постановки и обсуждения задач

Пусть маятник Максвелла совершает какие-либо движения, описанные во введении, т. е. твердое тело маятника совершает колебательные стандартные движения вдоль нитей, сопряженные с описанными выше переходными движениями 1-го и 2-го типов. Сами нити могут совершать при этом колебания вокруг оси подвеса в вертикальной плоскости движения тела. Рассматриваются следующие задачи.

Пример 1. Исследовать колебания нитей маятника Максвелла в малой окрестности их вертикального положения при описанных колебательных движениях тела маятника вдоль нитей (то есть при стандартных движениях тела, сопряженных с переходными движениями 1-го и 2-го типов). Иными словами, требуется выяснить, будут ли оставаться малыми с течением времени отклонения нитей от вертикали при малых их начальных возмущений по углам и скоростям при указанных колебательных движениях тела вдоль нитей.

Пример 2. Выяснить, происходят ли скачки скоростей или рывки (скачки ускорений) натяжений нитей в моменты сопряжений стандартных движений тела вдоль нитей, то есть в моменты начала или окончания переходных движений 1-го или 2-го типов.

Замечание 1. Пример 1 рассматривался в работах [Маркеев, 2017a; Маркеев, 2017b] без учета влияния переходных движений 2-го типа. Это привело, на наш взгляд, к получению не вполне достоверных результатов, касающихся областей устойчивости и неустойчивости вертикального положения нитей.

Кроме того, в [Маркеев, 2017a; Маркеев, 2017b] рассматривался лишь вырожденный случай, когда: 1) момент инерции тела маятника относительно его центра масс стремится к нулю, 2) расстояние от центра масс тела маятника до нити стремится к нулю. Этот случай соответствует, по сути, материальной точке, очень близко привязанной к нити. Несложно показать (см. п. 5 настоящей статьи), что такое вырождение является некорректным по Адамару, а следовательно, получаемые в этом случае аналитические результаты нуждаются в дополнительных пояснениях. Отметим, что некорректные по Адамару задачи механики подробно изучаются в работе [Журавлёв, 2016].

В настоящей работе далее показано, что вертикальное положение нитей маятника при указанных колебательных движениях тела вдоль нитей при любых невырожденных значениях параметров маятника Максвелла всегда является неустойчивым в указанном выше смысле. Причем обусловлена эта неустойчивость именно переходными движениями 2-го типа. Отметим, что факт неустойчивости вертикального положения нитей маятника Максвелла был ранее экспериментально установлен в статье [Боровой, Климов, 1981], посвященной 150-летию со дня рождения Джеймса Клерка Максвелла и опубликованной в 11-м выпуске журнала «Квант» от 1981 года (см. [Боровой, Климов, 1981]).

Замечание 2. Пример 2 имеет целью установить, носят ли сопряжения стандартных движений с переходными движениями ударный характер или нет. Кроме того, необходимо установить источники и причины описанных в литературе рывков, которые происходят в системе при изменении направления движения тела маятника вдоль нити в самом нижнем его положении. Отметим, что в [Сивухин, 1989; Матвеев, 1986; Маркеев, 2017a; Маркеев, 2017b] сообщалось о рывках, которые передаются телом подвесу и нитям маятника Максвелла при изменении направления движения тела вдоль нити. Более того, в [Маркеев, 2017a; Маркеев, 2017b] утверждался ударный характер в движении маятника, когда движение тела вниз сменялось его движением вверх. Однако причины и источники этих рывков и ударов не были установлены. Подчеркнем, что в указанных работах также не рассматривались переходные движения тела маятника 2-го типа. Аналогичные объяснения имеются также в популярных видеороликах Интернета, посвященных колебательным движениям маятника Максвелла.

В настоящей работе далее показано, что никаких скачков скоростей или ускорений (из-за которых могут происходить удары или рывки в натяжениях нитей) при указанных движениях рассматриваемой модели маятника Максвелла не происходит. На наш взгляд, наблюдаемые в экспериментах рывки обусловлены другими причинами, например техническим несовершенством приборов, на которых производились опыты.

3. Основные обозначения и уравнения движения маятника Максвелла

Стандартное движение маятника Максвелла

Расчетная схема и обозначения приведены на рис. 1, *б*. Движение описывается двумя обобщенными координатами θ, ρ, где θ — угол, образуемый нитью с нисходящей вертикалью и отсчитываемый против часовой стрелки, ρ — текущая длина выбранной с тела нити. Уравнения Лагранжа для указанных обобщенных координат имеют вид (масса тела принята за единицу $m = 1$, а подробный вывод уравнений приведен в [Журавлёв, Розенблат, 2017])

$$\begin{gathered} \rho\ddot{\theta} = -2\dot{\rho}\dot{\theta} + r\dot{\theta}^2 - g\sin\theta, \\ \rho\ddot{\rho} = \left(r^2 + \frac{\rho^2}{\sigma}\right)\dot{\theta}^2 - 2r\dot{\rho}\dot{\theta} + g\left(\frac{\rho}{\sigma}\cos\theta - r\sin\theta\right), \quad \sigma = 1 + J_C r^{-2}, \end{gathered} \tag{1}$$

где обозначено: J_C — момент инерции тела относительно центра масс C (в данном случае это квадрат радиуса инерции тела относительно центра масс), g — ускорение силы тяжести.

Если движение маятника таково, что тело находится слева от нити (в отличие от ситуации, показанной на рис. 1, *б*, где тело изображено справа от нити), то уравнения движения сохраняют вид (1), в котором надо поменять знак у параметра r.

Вычитая из второго уравнения системы (1) первое, обе части которого предварительно умножены на r, получим соотношение

$$\frac{\ddot{\rho}}{r} - \ddot{\theta} = \frac{1}{r\sigma}\left(\rho\dot{\theta}^2 + g\cos\theta\right). \tag{2}$$

Уравнение моментов относительно центра масс для тела маятника дает соотношение

$$J_C\left(\frac{\ddot{\rho}}{r} - \ddot{\theta}\right) = S_0 r, \tag{3}$$

где S_0 — сила натяжения нити. Из (2) и (3) получим следующее выражение для силы натяжения нити:

$$S_0 = \frac{\sigma - 1}{\sigma}\left(\rho\dot{\theta}^2 + g\cos\theta\right). \tag{4}$$

Параметр σ в (4) определен в (1). Из формулы (4) видим, что сила натяжения нити, во-первых, всегда положительна (нить натянута), а во-вторых, эта сила не зависит от $\dot{\rho}$ (т. е. от скорости перемещения центра масс тела вдоль нити).

Приведенные уравнения справедливы при следующих ограничениях:

$$0 < \rho_0 \leqslant \rho(t) \leqslant l,$$

где l — полная (конструктивно максимально допустимая) длина нити, $\rho_0 > 0$ — минимальная допускаемая (конструктивно) длина свободного отрезка нити.

Переходное движение 1-го типа (остановка)

Это движение возникает в тот момент времени $t = t_1$, когда $\rho(t_1) \geqslant \rho_0$, $\dot{\rho}(t_1) = 0$, $\dot{\rho}(t_1 - 0) < 0$, $\dot{\rho}(t_1 + 0) > 0$.

В этом случае происходит полная остановка тела маятника относительно нити и мгновенная перемена направления движения тела относительно нити (движение вверх, после остановки тела относительно нити, сразу меняется на движение тела вниз вдоль нити). Ясно, что такой переход также описывается уравнениями (1). Поэтому никаких ударных эффектов (а также резких изменений натяжения нити) здесь не должно наблюдаться. В принципе, возможны особые случаи, когда функция $\rho(t)$ выходит на минимально допустимое ограничение ρ_0 с ненулевой скоростью. Тогда возникает ударная ситуация, которую необходимо учитывать при анализе движения маятника Максвелла. Будем считать, что такие особые случаи в нашей задаче не реализуются.

Переходное движение 2-го типа (двухзвенный маятник, см. рис. 1, б)

Это движение возникает в тот момент времени $t = t_2$, когда $\rho(t_2) = l$, $\dot{\rho}(t_2) > 0$. Конструкция маятника Максвелла такова, что точка A схода нити с оси тела в этот момент внезапно закрепляется относительно нити. Отметим, что скорости совпадающих в данный момент времени физических точек нити и тела относительно нити всегда равны нулю — это относительный МЦС тела маятника. Поэтому, несмотря на (вроде бы) внезапное закрепление этой точки, удара в системе не происходит. Тело маятника просто начинает (без удара) вращаться вокруг указанной точки закрепления относительно движущейся нити, а движение системы происходит аналогично движению двухзвенного (вырожденного) маятника (см. рис. 1, *б*). Положение и движение системы описываются двумя обобщенными координатами θ, ψ, где ψ — угол, образуемый радиусом AC тела с перпендикуляром к нити и отсчитываемый по часовой стрелке (см. рис. 1, *б*, где A — точка закрепления нити и оси тела маятника, C — центр масс тела маятника). Отметим, что в момент $t = t_2$ начала этого переходного движения имеем следующие начальные условия:

$$\psi(t_2) = 0, \quad \dot{\psi}(t_2) = \frac{\dot{\rho}(t_2)}{r}, \tag{5}$$

а в момент $t = t_3$ окончания этого переходного движения имеем конечное условие $\psi(t_3) = \pi$, но $\dot{\psi}(t_3)$ определяется из решения приводимых ниже уравнений движения.

Обозначив $\alpha = \theta - \psi$, запишем функцию Лагранжа для этой системы:

$$L = \frac{1}{2}\left[\left(J_C + r^2\right)\dot{\alpha}^2 + l\dot{\theta}^2 + 2rl\dot{\alpha}\dot{\theta}\sin(\theta - \alpha)\right] + gl\cos\theta - gr\sin\alpha.$$

Уравнения Лагранжа для указанных обобщенных координат имеют вид

$$\begin{aligned} l\ddot{\theta} + r(\ddot{\theta} - \ddot{\psi})\sin\psi - r(\dot{\theta} - \dot{\psi})^2\cos\psi = -g\sin\theta, \\ \sigma r(\ddot{\theta} - \ddot{\psi}) + l\ddot{\theta}\sin\psi + l\dot{\theta}^2\cos\psi = -g\cos(\theta - \psi), \end{aligned} \tag{6}$$

где обозначения для параметров те же, что и в уравнениях (1). Если это переходное движение 2-го типа возникает из стандартного движения тела по левой стороне нити (противоположной правой, т. е. той, что указана на рис. 1, *б*), то уравнения движения сохраняют вид (6), однако меняются начальные условия из формул (5). Они такие: $\psi(t_2) = \pi$, $\dot{\psi}(t_2) = -\frac{\dot{\rho}(t_2)}{r}$. Соответственно, конечное условие будет $\psi(t_3) = 0$, а $\dot{\psi}(t_3)$ определяется из решения уравнений движения (6).

Вычтем из второго уравнения системы (6) первое уравнение, обе части которого предварительно умножены на $\sin\psi$. Получим соотношение

$$r(\ddot{\psi} - \ddot{\theta})\left(\sigma - \sin^2\psi\right) = \left[l\dot{\theta}^2 + g\cos\theta + r(\dot{\theta} - \dot{\psi})^2\sin\psi\right]\cos\psi. \tag{7}$$

Уравнение моментов относительно центра масс тела в этом случае имеет вид

$$J_C(\ddot{\psi} - \ddot{\theta}) = S_2 r\cos\psi, \tag{8}$$

где S_2 — сила натяжения нити. Из (7) и (8) получим следующую формулу для силы натяжения нити:

$$S_2 = \frac{\sigma - 1}{\sigma - \sin^2\psi}\left[l\dot{\theta}^2 + g\cos\theta + r(\dot{\theta} - \dot{\psi})^2\sin\psi\right]. \tag{9}$$

Эта сила натяжения (в отличие от силы S_0) зависит также и от угловой скорости тела $\dot{\psi}$ относительно нити. Кроме того, так как $\psi \in [0, \pi]$, то сила S_2 всегда является положительной величиной. Следовательно, нить в процессе всего переходного движения 2-го типа остается натянутой. Используя (6), получим уравнения

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}\left(\sigma - \sin^2\psi\right) = \dot{\theta}^2\sin\psi\cos\psi + \omega_0^2(\sin\psi\cos\alpha - \sigma\sin\theta) + \sigma\varepsilon\dot{\alpha}^2\cos\psi, \\ \ddot{\psi}\left(\sigma - \sin^2\psi\right) = \dot{\theta}^2\cos\psi\left(\varepsilon^{-1} + \sin\psi\right) + \\ + \omega_0^2\left[\left(\varepsilon^{-1} + \sin\psi\right)\cos\alpha - \left(\sigma + \varepsilon^{-1}\sin\psi\right)\sin\theta\right] + (\sigma\varepsilon + \sin\psi)\dot{\alpha}^2\cos\psi, \end{aligned} \tag{10}$$

где введены обозначения $\alpha = \theta - \psi$, $\varepsilon = \frac{r}{l}$, $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$. В результате проведенных вычислительных экспериментов установлены следующие качественные закономерности.

На рис. 2 предоставлены зависимости, соответствующие случаям регулярного движения. На рис. 2, *а* $\Phi(\tau)$ и $\theta(\tau)$ являются регулярными ангармоническими колебаниями. Зависимости $P_\Phi(\tau)$ и $P_\theta(\tau)$ представляют собой регулярные ангармонические колебания (рис. 2, *б*). Зависимость $\nu(\tau)$, которая представляет собой силу, осуществляет резкие, но ограниченные скачки (рис. 2, *в*), при этом она остается положительной. Энергия $\epsilon(\tau)$ флуктуирует вокруг своего начального значения, при этом максимум флуктуаций достигает $2 \cdot 10^{-5}$ (рис. 2, *г*). Колебания $F[\Phi]$ и $F[\theta]$ по одной переменной (рис. 2, *д*) возбуждают вторичные колебания по второй переменной, и наоборот. При этом спектры сосредоточены в одном или нескольких пиках. На рис. 2, *е* предоставлено сечение Пуанкаре для регулярного движения, легко видеть, что точки сосредоточены в одном одномерном многообразии.

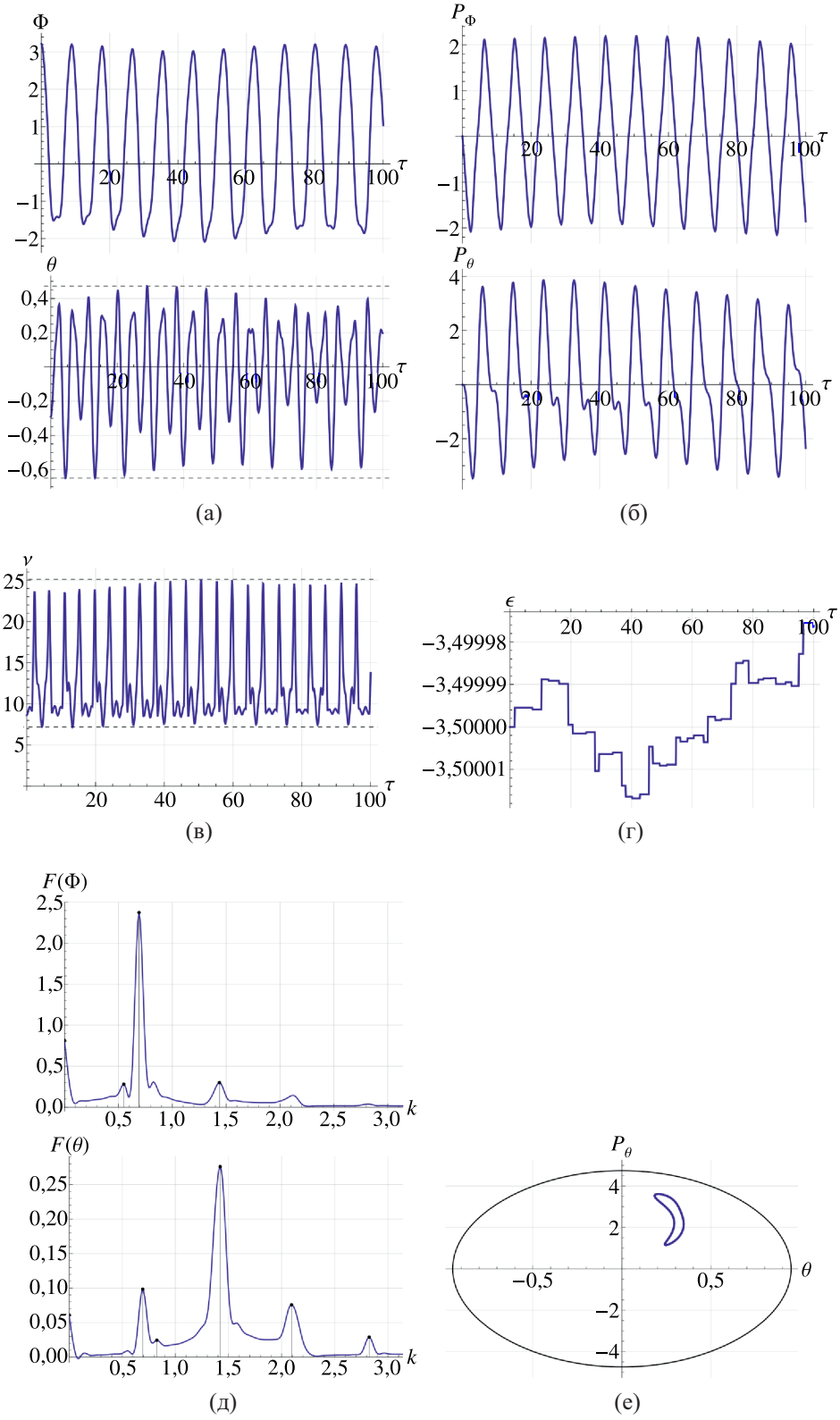


Рис. 2. Регулярное движение. (а) Зависимости $\Phi(\tau)$ и $\theta(\tau)$ для регулярного движения. (б) Зависимости $P_\Phi(\tau)$ и $P_\theta(\tau)$ для регулярного движения. (в) Зависимость $\nu(\tau)$ для регулярного движения. (г) Зависимость $\epsilon(\tau)$ для регулярного движения. (д) Зависимости $F[\Phi]$ и $F[\theta]$ для регулярного движения. (е) Сечение Пуанкаре для регулярного движения

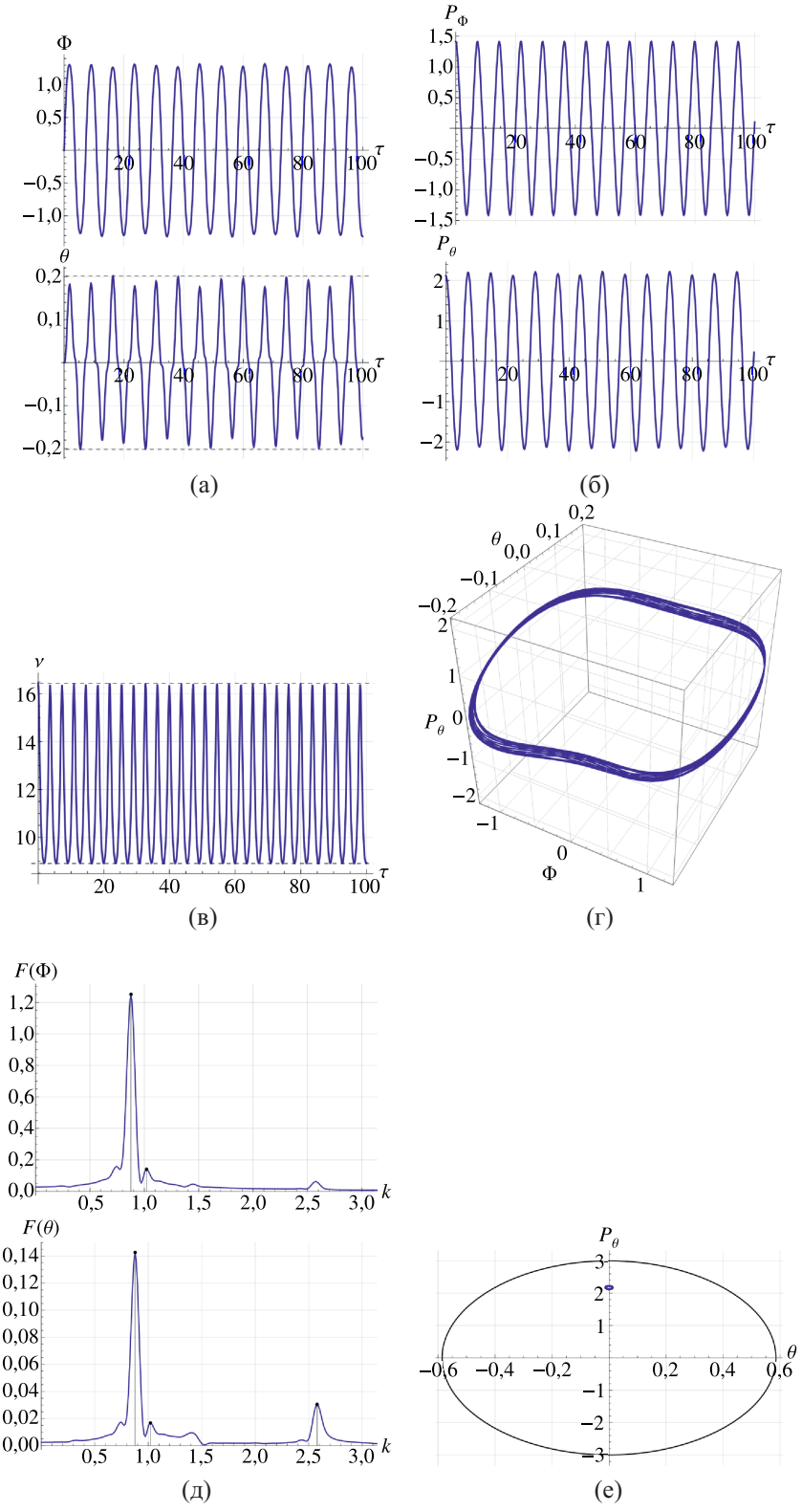


Рис. 3. Квазипериодическое движение. (а) Зависимости $\Phi(\tau)$ и $\theta(\tau)$ для квазипериодического движения. (б) Зависимости $P_\Phi(\tau)$ и $P_\theta(\tau)$ для квазипериодического движения. (в) Зависимость $\nu(\tau)$ для квазипериодического движения. (г) Траектория движения в пространстве (Φ, θ, P_θ) для квазипериодического движения. (д) Зависимости $F[\Phi]$ и $F[\theta]$ для квазипериодического движения. (е) Сечение Пуанкаре для квазипериодического движения

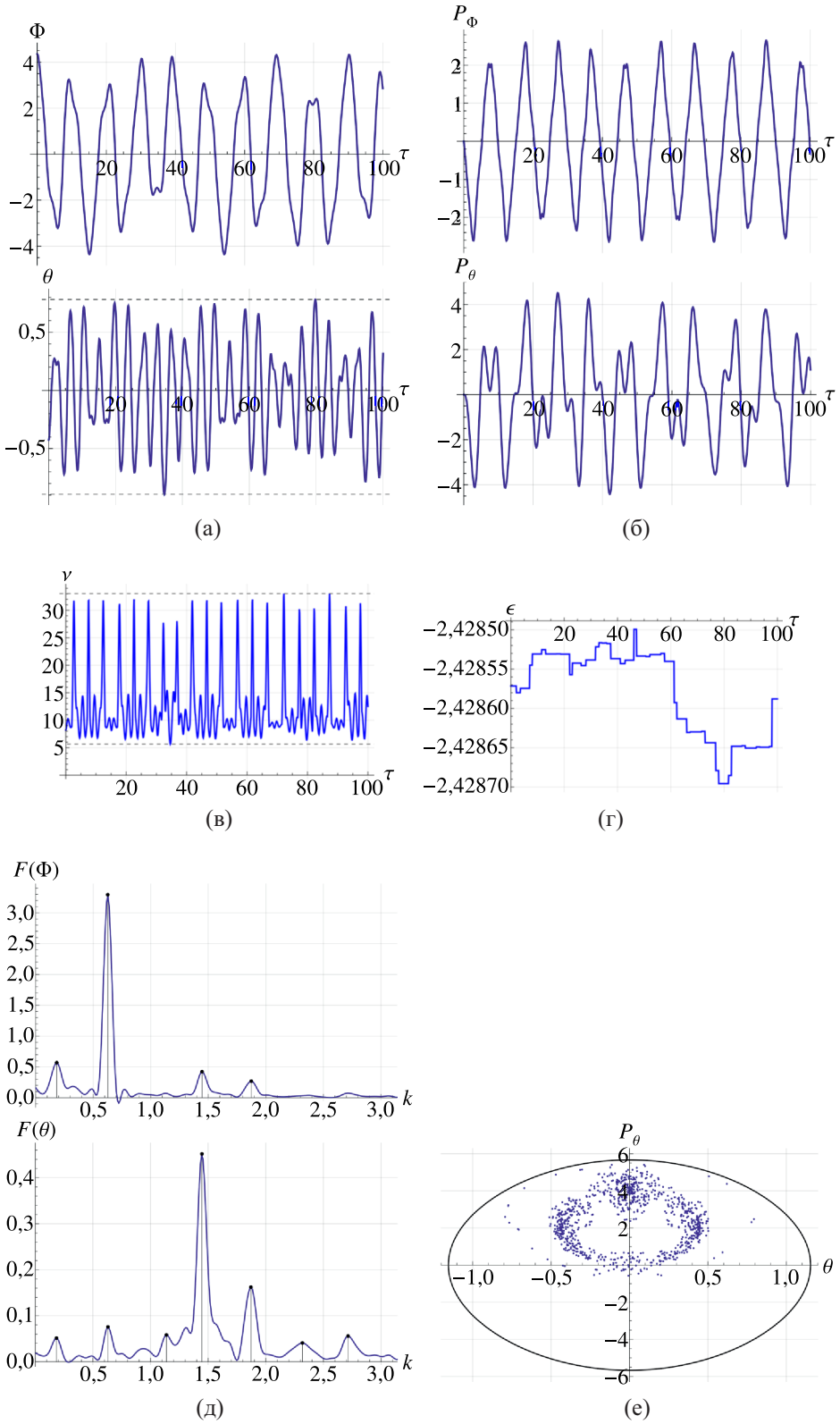


Рис. 4. Хаотическое движение. (а) Зависимости $\Phi(\tau)$ и $\theta(\tau)$ для хаотического движения. (б) Зависимости $P_\Phi(\tau)$ и $P_\theta(\tau)$ для хаотического движения. (в) Зависимость $\nu(\tau)$ для хаотического движения. (г) Зависимость $\epsilon(\tau)$ для хаотического движения. (д) Зависимости $F[\Phi]$ и $F[\theta]$ для хаотического движения. (е) Получено сечение Пуанкаре для хаотического движения, точки которого сосредоточены в некотором двумерном многообразии

На рис. 3 предоставлены зависимости, соответствующие случаям квазипериодического движения. На рис. 3, *а* $\Phi(\tau)$ и $\theta(\tau)$ являются регулярными квазипериодическими колебаниями с близкими периодами. Зависимости $P_\Phi(\tau)$ и $P_\theta(\tau)$ представляют квазипериодические колебания с близкими периодами рис. 3, *б*. На рис. 3, *в* представлена зависимость $\nu(\tau)$ для квазипериодического движения. Траектория движения в пространстве (Φ, θ, P_θ) (рис. 3, *г*) для квазипериодического движения. Каждый следующий виток лежит близко к предыдущему. На рис. 3, *д* предоставлены зависимости $F[\Phi]$ и $F[\theta]$ для квазипериодического движения. При этом спектры очень похожи и оба сосредоточены в пике $k \approx 0{,}877$. На рис. 3, *е* предоставлено сечение Пуанкаре для квазипериодического движения, точки которого сосредоточены в множестве малого объёма.

На рис. 4 предоставлены зависимости, соответствующие случаям хаотического движения. На рис. 4, *а* $\Phi(\tau)$ и $\theta(\tau)$ являются нерегулярными хаотическими колебаниями. На рис. 4, *б* предоставлены зависимости $P_\Phi(\tau)$ и $P_\theta(\tau)$ для хаотического движения. На рис. 4, *в* представлена зависимость $\nu(\tau)$ для хаотического движения. Энергия $\epsilon(\tau)$ флуктуирует вокруг своего начального значения, при этом максимум флуктуаций достигает $2 \cdot 10^{-4}$ (рис. 4, *г*). Колебания $F[\Phi]$ и $F[\theta]$ по одной переменной (рис. 4, *д*) возбуждают вторичные колебания по второй переменной, и наоборот. При этом спектры сосредоточены в большом количестве пиков. На рис. 4, *е* предоставлено сечение Пуанкаре для хаотического движения, точки которого сосредоточены в некотором двумерном многообразии.

4. Формулировка и обоснование результатов

Справедливы следующие утверждения 1 и 2 для решений, соответственно, задач 1 и 2.

Лемма 1. *Вертикальное положение нити маятника Максвелла всегда является неустойчивым при любых движениях тела маятника вдоль нити, указанных во введении. Причем эта неустойчивость обусловлена переходными движениями 2-го типа, неизбежно возникающими при указанных выше движениях тела маятника вдоль нити.*

Доказательство. Предположим обратное, т. е. что вертикальное положение нити маятника $\theta = 0$ является устойчивым. Следовательно, функции $\theta(t)$, $\dot\theta(t)$ все время достаточно малы при достаточно малых возмущениях начальных условий $\theta(0)$, $\dot\theta(0)$, отличных от нуля. Покажем, что из этого предположения должна следовать также малость перемещения центра масс тела маятника по горизонтали.

Действительно, во время переходного движения 2-го типа (вырожденный двухзвенный маятник), с точностью до малых величин $\theta(t)$, $\dot\theta(t)$, имеет место интеграл энергии

$$\left(J_C + r^2\right)\dot\psi^2(\tau) - 2gr\sin\psi(\tau) = \left(J_C + r^2\right)\dot\psi^2(0), \quad \tau \in [0,\ \tau_0], \tag{11}$$

где τ_0 — длительность переходного движения, причем

$$\psi(0) = 0, \quad \psi(\tau_0) = \pi, \quad \dot\psi(0) = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{2gl}{\sigma}}, \quad \sigma = 1 + J_C r^{-2}. \tag{12}$$

Из (11) и (12) следуют оценки

$$\frac{2gl}{r^2} + J_C < \dot\psi^2(\tau) < \frac{2g(l+r)}{r^2 + J_C}, \quad \tau \in [0,\ \tau_0]. \tag{13}$$

Используя (12) и (13), получим следующие оценки для длительности τ_0 переходного движения 2-го типа:

$$\frac{\pi^2\left(r^2 + J_C\right)}{2gl} > \tau_0^2 > \frac{\pi^2\left(r^2 + J_C\right)}{2g(l+r)}. \tag{14}$$

Из формулы (9) получим (с точностью до малых величин порядка $\theta(t)$, $\dot{\theta}(t)$) следующую оценку для силы натяжения нити:

$$S_2 < S_{20} = g\left[1 + \frac{2(l+r)}{r + J_C r^{-1}}\right]. \tag{15}$$

Пусть y — горизонтальная координата центра масс тела маятника. Запишем уравнение для движения центра масс тела маятника в проекции на горизонталь OY: $\ddot{y} = -S_2 \sin\theta$.

Имеем, с точностью до малых величин порядка $\theta(t)$, $\dot{\theta}(t)$, что $y(t_2) = r$, $\dot{y}(t_2) = 0$, где t_2 — момент начала переходного движения 2-го типа. В результате интегрирования последнего дифференциального уравнения на интервале времени $t \in [t_2, t_2 + \tau_0]$ получаем неравенство $|y(t_2 + \tau_0) - r| < \frac{1}{2}\tau_0^2 S_{20} \max\limits_{\tau\in[0,\tau_0]} |\theta(\tau)|$.

В силу предполагаемой малости функции $\theta(\tau)$ и оценок (14), (15) отсюда получаем, что горизонтальная координата $y(t_2 + \tau_0)$ центра масс тела маятника в конце переходного движения 2-го типа мало отличается от ее начального значения $y(t_2) = +r$. А на самом же деле, в силу конструктивных и кинематических особенностей маятника Максвелла, эта координата (при малости угла θ) должна мало отличаться от значения $y(t_2 + \tau_0) = -r$. Это противоречие доказывает справедливость леммы 1. □

Лемма 2. *Указанные во введении движения маятника Максвелла являются безударными* (*скорости точек тела маятника не испытывают скачков*)*, сила натяжения нити меняется непрерывным образом при всех движениях тела маятника по нити* (*ускорения точек тела маятника не испытывают скачков*)*.*

Доказательство. Рассмотрим сначала переходные движения 1-го типа. Эти движения также описываются уравнениями (1) для стандартных движений. Поэтому никаких скачков скоростей и ускорений точек тела маятника в момент этих переходов не происходит. Исключение составляют описанные выше во введении особые (ударные) случаи, которые в данной работе не рассматриваются.

Рассмотрим теперь переходные движения 2-го типа. Сначала покажем, что в момент перехода (т. е. в момент внезапного закрепления точки A схода нити) не происходит скачков скоростей тела. Составляем уравнение сохранения кинетического момента тела в момент закрепления относительно точки A, приравняв кинетические моменты тела относительно точки A непосредственно до ее закрепления (значок «–») и после (значок «+»). Получим

$$J_C\left(-\dot{\rho}r^{-1} + \dot{\theta}^-\right) - \dot{\rho}r + \dot{\theta}^- r^2 = J_C\left(-\dot{\psi}^+ + \dot{\theta}^+\right) - \dot{\psi}^+ r^2 + \dot{\theta}^+ r^2. \tag{16}$$

Далее, составим уравнение сохранения кинетического момента тела в момент закрепления относительно точки O, приравняв кинетические моменты тела относительно точки непосредственно до ее закрепления (значок «–») и после (значок «+»). Получим

$$J_C\left(-\dot{\rho}r^{-1} + \dot{\theta}^-\right) - \dot{\rho}r + \dot{\theta}^-\left(r^2 + \rho^2\right) = J_C\left(-\dot{\psi}^+ + \dot{\theta}^+\right) - \dot{\psi}^+ r^2 + \dot{\theta}^+\left(r^2 + \rho^2\right). \tag{17}$$

Вычитая уравнение (16) из уравнения (17), получим равенство $\rho^2\dot{\theta}^- = \rho^2\dot{\theta}^+$, из которого следует, что $\dot{\theta}^- = \dot{\theta}^+$ (этот факт, впрочем, очевиден из механических соображений). Используя полученное равенство, из (16) имеем $\dot{\rho} = r\dot{\psi}^+$, что согласуется со вторым из условий (5).

Теперь покажем, что сила натяжения нити не испытывает скачков в момент начала (или конца) переходного движения 2-го типа. Для этого сравним формулы (4) и (9) для сил натяжения S_0 и S_2 в момент $t = t_2$ перехода от стандартного движения к переходному движению 2-го типа, когда $\rho(t_2) = l$, $\psi = 0$, $\dot{\psi}r = \dot{\rho}(t_2)$. Получим $S_0 = S_2$. Аналогичный результат получается для того момента $t = t_3$, когда происходит обратный переход от движения 2-го типа к стандартному (в этом случае $\rho(t_3) = l$, $\psi = \pi$, $\dot{\psi}r = \dot{\rho}(t_3)$).

Лемма 2 полностью доказана. □

5. О некорректности по Адамару модели маятника Максвелла и результаты численного исследования динамики движения маятника Максвелла

Пусть маятник Максвелла совершает разматывающееся или сматывающееся движения (стандартные движение, см. рис. 1).

Движение маятника в этом случае определяется двумя обобщенными координатами ρ, θ.

Уравнения Лагранжа для указанных обобщенных координат имеют вид (1).

Пусть начальные условия таковы:

$$\rho(0) = \rho_0, \quad \dot\rho(0) = 0, \quad \theta(0) = \theta_0, \quad \dot\theta(0) = \dot\theta_0. \tag{18}$$

Система (1) допускает интеграл энергии, который, с учетом начальных условий (18), имеет вид

$$\begin{gathered} 2H = \sigma(\dot\rho - r\dot\theta)^2 + \rho^2\dot\theta^2 - 2g(\rho\cos\theta - r\sin\theta) = 2h = \text{const}, \\ 2h = \sigma r^2\dot\theta_0^2 + \rho_0^2\dot\theta_0^2 - 2g(\rho_0\cos\theta_0 - r\sin\theta_0). \end{gathered} \tag{19}$$

Пусть параметр $r \to 0$. Выясним, что будет в пределе в различных возможных случаях.

Решение 1. $r \to 0$, $J_C \neq 0$. Тогда имеем $\sigma \to \infty$, из формул (19) получим $\dot\rho(t) = 0$, т. е. $\rho(t) = \rho_0 = \text{const}$. Система представляет собой обычный физический маятник. Однако из первого уравнения системы (1) имеем

$$\rho_0\ddot\theta = -g\sin\theta. \tag{20}$$

Второе уравнение системы (1) удовлетворяется тождественно. Уравнение (20) есть уравнение математического маятника. На самом же деле уравнение получающегося (в результате такого предельного перехода) физического маятника должно было бы иметь вид $\left(\rho_0 + \frac{J_C}{\rho_0}\right)\ddot\theta = -g\sin\theta$.

Таким образом, налицо некорректность по Адамару.

Указанное несоответствие наводит на мысль, что при $r \to 0$ следует также соблюдать условие $J_C \to 0$. Таким образом, мы получаем модель материальной точки. Такая предельная модель очень далека от исходной модели маятника Максвелла. Тем не менее и этот случай является некорректным.

Решение 2. $r \to 0$, $J_C \to 0$. Вводим параметр $\lambda = \frac{J_C}{r^2} \in (0, \infty)$.

Тогда $\sigma = 1 + \lambda$. Получающиеся в пределе модели зависят от того, какие значения в пределе принимает параметр λ. Рассмотрим различные возможные случаи.

2.1. $\lambda \to 0$. Сила натяжения нити дается формулой

$$S_0 = \frac{\sigma - 1}{\sigma}\left(\rho\dot\theta^2 + g\cos\theta\right). \tag{21}$$

Так как в рассматриваемом случае $\sigma = 1 + \lambda \to 1$, то из (21) имеем $S_0 = 0$. Уравнения (1) превращаются в уравнения

$$\ddot\rho = \rho\dot\theta^2 + g\cos\theta, \quad \rho\ddot\theta = -2\dot\rho\dot\theta - g\sin\theta. \tag{22}$$

Уравнения (22) в декартовых координатах имеют вид $\ddot x = g$, $\ddot y = 0$.

Это суть уравнения свободного падения точки в поле силы тяжести, которые справедливы вплоть до того момента, пока $x^2 + y^2 < l^2$. Далее, при $x^2 + y^2 = l^2$ возникает удар, и это движение продолжается.

2.2. $\lambda \to \lambda_0 \neq 0$. Тогда натяжение нити дается формулой $S_0 = \frac{\lambda_0}{1+\lambda_0}\left(\rho\dot\theta^2 + g\cos\theta\right) \neq 0$.

Уравнения движения (1) переходят в следующие: $\rho\ddot\theta = -2\dot\rho\dot\theta - g\sin\theta$, $(1+\lambda_0)\ddot\rho = g\cos\theta + \rho\dot\theta^2$. Таким образом, мы получаем совершенно другую модель, которая представляет собой движение точки под действием двух сил: 1) силы тяжести, 2) некоторой управляющей центральной силы.

2.3. $\lambda \to \infty$. Тогда и $\sigma \to \infty$. Мы приходим к случаю 1, который представляет собой математический маятник безо всяких противоречий, так как $J_C = 0$.

6. Заключение

В статье рассмотрена задача об устойчивости вертикального положения маятника Максвелла при его периодических движениях вверх-вниз. Показано, что при любых значениях параметров маятника это положение является неустойчивым в том смысле, что в системе возникают колебания нити около вертикали конечной амплитуды при сколь угодно малых начальных отклонениях. Результаты работы могут быть использованы в задачах математического моделирования эффектов неустойчивости транспортных потоков, важных для обеспечения безопасности дорожного движения [Buslaev, Gasnikov, Yashina, 2012].

Благодарности

Авторы выражают благодарность Математическому центру за проведение научной конференции «Транспортные потоки на сетях» с 24 по 28 апреля 2023 г., а также студенту Павлу Чертовских за проведение вычислений по тематике работы.

Список литературы (References)

Боровой А., Климов Ю. Маятник Максвелла // Квант. — 1981. — № 11. — С. 18–20.
Borovoy A., Klimov Yu. Mayatnik Maksvella [Maxwell's pendulum] // Kvant. — 1981. — No. 11. — P. 18–20 (in Russian).

Журавлёв В. Ф. О некорректных задачах механики // Известия РАН. Механика твердого тела. — 2016. — № 5. — С. 36–41.
Zhuravlev V. F. O nekorrektnykh zadachakh mekhaniki [On ill-posed problems in mechanics] // News of the Russian Academy of Sciences. Mechanics of solids. — 2016. — No. 5. — P. 36–41 (in Russian).

Журавлёв В. Ф., Розенблат Г. М. Парадоксы, контрпримеры и ошибки в механике / вступ. сл. академика РАН Д. М. Климова. — М.: ЛЕНАНД, 2017. — 240 с.
Zhuravlev V. F., Rosenblat G. M. Paradoksy, kontrprimery i oshibki v mekhanike / vstup. sl. akademika RAN D. M. Klimova [Paradoxes, counterexamples and errors in mechanics / intro. sl. Academician of the Russian Academy of Sciences D. M. Klimov]. — Moscow: LENNAND, 2017. — 240 p. (in Russian).

Маркеев А. П. К динамике маятника Максвелла // Доклады академии наук. — 2017a. — Т. 473, № 6. — С. 664–668.
Markeev A. P. K dinamike mayatnika Maksvella [On the dynamics of Maxwell's pendulum] // Proceedings of the Academy of Sciences. — 2017a. — Vol. 473, No. 6. — P. 664–668 (in Russian).

Маркеев А. П. Об устойчивости движения маятника Максвелла // Нелинейная динамика. — 2017b. — Т. 13, № 2. — С. 207–226.
Markeev A. P. Ob ustoichivosti dvizheniya mayatnika Maksvella [On the stability of motion of Maxwell's pendulum] // Nonlinear dynamics. — 2017b. — Vol. 13, No. 2. — P. 207–226 (in Russian).

Матвеев А. Н. Механика и теория относительности: учеб. пособие для физ. спец. вузов. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Высш. шк., 1986. — 320 с.
Matveev A. N. Mekhanika i teoriya otnositel'nosti: ucheb. posobie dlya fiz. spets. vuzov [Mechanics and theory of relativity: textbook allowance for physical specialist. universities]. — 2-e izd., pererab. i dop. — Moscow: Higher. school, 1986. — 320 p. (in Russian).

Розенблат Г. М. О неустойчивости движения маятника Максвелла // Известия РАН. Механика твердого тела. — 2018. — № 5. — С. 61–69.
Rosenblat G. M. O neustoichivosti dvizheniya mayatnika Maksvella [On the instability of the motion of Maxwell's pendulum] // Mechanics of solids. — 2018. — No. 5. — P. 61–69 (in Russian).

Сивухин Д. В. Общий курс физики. Т. 1. Механика. — 3-е изд., испр. и доп. — М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. — 576 с.
Sivukhin D. V. Obshchii kurs fiziki. T. 1. Mekhanika [General physics course. Vol. 1. Mechanics]. — 3rd ed., rev. and additional. — Moscow: Nauka, Ch. ed. phys.-math. lit., 1989. — 576 p. (in Russian).

Buslaev A. P., Gasnikov A. V., Yashina M. V. Selected mathematical problems of traffic flow theory // International Journal of Computer Mathematics. — 2012. — Vol. 89, No. 3, Section B. — P. 409–432.