**КОМПЬЮТЕРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ
И МОДЕЛИРОВАНИЕ 2024 Т. 16 № 6 С. 1467–1498**
DOI: 10.20537/2076-7633-2024-16-6-1467-1498

МОДЕЛИ ЭКОНОМИЧЕСКИХ И СОЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

УДК: 519.876.2

Моделирование специальных действий и борьбы с терроризмом

В. В. Шумов

Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН,
Россия, 117342, г. Москва, Профсоюзная ул., д. 65

E-mail: v.v.shumov@yandex.ru

Получено 02.08.2024, после доработки — 18.09.2024.
Принято к публикации 26.09.2024.

Специальные действия (партизанские, антипартизанские, разведывательно-диверсионные, подрывные, контртеррористические, контрдиверсионные и др.) организуются и проводятся силами обеспечения правопорядка и вооруженными силами и направлены на защиту граждан и обеспечение национальной безопасности. С начала 2000-х гг. проблематика специальных действий привлекла внимание специалистов в области моделирования, социологов, физиков и представителей других наук. В настоящей статье даны обзор и характеристика работ в области моделирования специальных действий и борьбы с терроризмом. Работы классифицированы по методам моделирования (описательные, оптимизационные и теоретико-игровые), по видам и этапам действий, фазам управления (подготовка и ведение деятельности). Во втором разделе представлена классификация методов и моделей специальных действий и борьбы с терроризмом, дан краткий обзор описательных моделей. Рассмотрены метод географического профилирования, сетевые игры, модели динамики специальных действий, функция победы в боевых и специальных действиях (зависимость вероятности победы от соотношения сил и средств сторон). В третьем разделе рассмотрены игра «атакующий – защитник» и ее расширения: игра Штакельберга и игра безопасности Штакельберга, а также вопросы их применения в задачах обеспечения безопасности В игре «атакующий – защитник» и играх безопасности известные работы классифицируются по следующим основаниям: последовательность ходов, количество игроков и их целевые функции, временной горизонт игры, степень рациональности игроков и их отношение к риску, степень информированности игроков. Четвертый раздел посвящен описанию игр патрулирования на графе с дискретным временем и одновременным выбором сторонами своих действий (для поиска оптимальных стратегий вычисляется равновесие Нэша). В пятом разделе рассмотрены теоретико-игровые модели обеспечения транспортной безопасности как приложения игр безопасности Штакельберга. Последний раздел посвящен обзору и характеристике ряда моделей обеспечения пограничной безопасности на двух фазах управления: подготовка и ведение деятельности. Рассмотрен пример эффективного взаимодействия подразделений береговой охраны с университетскими исследователями. Перспективными направлениями дальнейших исследований являются следующие: во-первых, моделирование контртеррористических и специальных операций по нейтрализации террористических и диверсионных групп с привлечением разноведомственных и разнородных сил и средств, во-вторых, комплексирование моделей по уровням и этапам циклов деятельности; в-третьих, разработка теоретико-игровых моделей борьбы с морским терроризмом и пиратством.

Ключевые слова: математическая модель, национальная безопасность, специальные действия, борьба с терроризмом, охрана границы, игра «атакующий – защитник», игры безопасности, равновесие Штакельберга

COMPUTER RESEARCH AND MODELING
2024 VOL. 16 NO. 6 P. 1467–1498
DOI: 10.20537/2076-7633-2024-16-6-1467-1498

Ки&М

MODELS OF ECONOMIC AND SOCIAL SYSTEMS

UDC: 519.876.2

Special action and counter-terrorism models

V. V. Shumov

V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences,
65 Profsoyuznaya st., Moscow, 117342, Russia

E-mail: v.v.shumov@yandex.ru

Received 02.08.2024, after completion — 18.09.2024.
Accepted for publication 26.09.2024.

Special actions (guerrilla, anti-guerrilla, reconnaissance and sabotage, subversive, counter-terrorist, counter-sabotage, etc.) are organized and conducted by law enforcement and armed forces and are aimed at protecting citizens and ensuring national security. Since the early 2000s, the problems of special actions have attracted the attention of specialists in the field of modeling, sociologists, physicists and representatives of other sciences. This article reviews and characterizes the works in the field of modeling special actions and counterterrorism. The works are classified by modeling methods (descriptive, optimization and game-theoretic), by types and stages of actions, and by phases of management (preparation and conduct of activities). The second section presents a classification of methods and models for special actions and counterterrorism, and gives a brief overview of descriptive models. The method of geographic profiling, network games, models of dynamics of special actions, the function of victory in combat and special actions (the dependence of the probability of victory on the correlation of forces and means of the parties) are considered. The third section considers the "attacker – defender" game and its extensions: the Stackelberg game and the Stackelberg security game, as well as issues of their application in security tasks In the "attacker – defender" game and security games, known works are classified on the following grounds: the sequence of moves, the number of players and their target functions, the time horizon of the game, the degree of rationality of the players and their attitude to risk, the degree of awareness of the players. The fourth section is devoted to the description of patrolling games on a graph with discrete time and simultaneous choice by the parties of their actions (Nash equilibrium is computed to find optimal strategies). The fifth section deals with game-theoretic models of transportation security as applications of Stackelberg security games. The last section is devoted to the review and characterization of a number of models of border security in two phases of management: preparation and conduct of activities. An example of effective interaction between Coast Guard units and university researchers is considered. Promising directions for further research are the following: first, modeling of counter-terrorist and special operations to neutralize terrorist and sabotage groups with the involvement of multidepartmental and heterogeneous forces and means, second, complexification of models by levels and stages of activity cycles, third, development of game-theoretic models of combating maritime terrorism and piracy.

Keywords: mathematical model, national security, special actions, counterterrorism, border security, attacker – defender game, security games, Stackelberg equilibrium

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2024, vol. 16, no. 6, pp. 1467–1498 (Russian).

1. Введение

Одной из форм применения вооруженных сил являются *специальные операции* — совокупность согласованных по целям, задачам, месту и времени специальных действий войск (сил), проводимых по единому замыслу и плану для достижения определенных целей. ***Специальные действия*** войск (сил) — мероприятия, проводимые специально назначенными, организованными, подготовленными и оснащенными силами, применяющими методы и способы боевых действий, не характерные для обычных сил (разведывательно-диверсионные, подрывные, контртеррористические, контрдиверсионные, контрразведывательные, партизанские, антипартизанские и другие действия) [Формы применения].

В вооруженных силах ряда государств созданы *силы специальных операций* — соединения, части и подразделения, предназначенные для ведения диверсионно-разведывательных действий, организации повстанческой деятельности и вооруженных нападений, включая оказание помощи иностранным государствам в обеспечении их внутренней безопасности [Силы].

Для противодействия терроризму, пиратству, диверсиям создаются общегосударственные системы, включающие правоохранительные органы, вооруженные силы и т. д.

На содержательном уровне, с одной стороны, имеются существенные различия между боевыми и специальными действиями (они обусловлены, в частности, асимметричным характером действий и информированности, направлены в защиту мирного населения и инфраструктуры от террористических и диверсионных атак), а с другой стороны — можно выделить и схожие черты (применение оружия и специальной техники, бои в особых условиях и др.).

Указанные особенности специальных действий и обуславливают выбор математического аппарата для их моделирования: набор математических методов (методы теории вероятностей, теории игр, оптимизации и т. д.) при моделировании боевых и специальных действий в основном один и тот же, тогда как конкретные модели позволяют учесть специфику специальных действий.

Цель работы — анализ и обобщение исследований в области моделирования специальных действий и борьбы с терроризмом, выявление актуальных проблем и перспективных задач.

Структурно работа организована так.

Во втором разделе представлена классификация методов и моделей специальных действий и борьбы с терроризмом, дан краткий обзор описательных моделей. Рассмотрены метод географического профилирования, сетевые игры, модели динамики специальных действий, функция победы в боевых и специальных действиях.

В третьем разделе рассмотрены игра «атакующий – защитник» и ее расширения: игра Штакельберга и игра безопасности Штакельберга, а также вопросы их применения в задачах обеспечения безопасности.

Четвертый раздел посвящен описанию игр патрулирования на графе.

В пятом разделе рассмотрены теоретико-игровые модели обеспечения транспортной безопасности.

Последний раздел посвящен описанию моделей обеспечения пограничной безопасности.

В статье не рассматриваются обеспечивающие действия и информационная безопасность.

2. Классификация методов и моделей специальных действий и борьбы с терроризмом

Методы, применяемые при моделировании специальных действий и борьбы с терроризмом, можно классифицировать, в частности, по функциям моделирования: описательные или теоретико-вероятностные, оптимизационные, теоретико-игровые или принятия решений и имитационные методы.

В работе [Memon, Faley, Hicks, 2009] перечислены применяемые математические методы в задачах борьбы с терроризмом:

- методы сетевого анализа (Network Analysis), выявление структуры террористических ячеек;
- методы прогнозирования (Forecasting), динамический анализ сетей, выявление закрытых групп в социальных сетях по неполным данным, обнаружение и отслеживание террористической активности;
- методы построения сетей (Communication/Interpretation) террористических групп, отвечающие требованиям доступности и конспирации, обеспечения влияния этих групп на население;
- методы математического анализа и управления поведением людей и групп (Behavior), анализ государственно-террористических коалиций, анализ поведения террористических групп с целью повышения эффективности борьбы с ними;
- теоретико-игровые методы (Game Theory), выявление условий и превентивных действий, при которых террористические группировки (включая государственные) отказываются от приобретения оружия массового поражения, нахождение оптимальных решений по защите объектов, оценка влияния мер по борьбе с террором на отношение населения к терроризму, анализ террористических структур методами иерархических игр и др.

В указанной работе также анализируются материалы научных конференций по математическим методам борьбы с терроризмом, ставится вопрос о формировании соответствующей теории, объединении усилий представителей различных научных дисциплин (математиков, политологов, психологов, специалистов по информатике и др.).

Классификация моделей специальных действий возможна по следующим основаниям (см. [Wright, Liberatore, Nydick, 2006; Шумов, 2012]).

1. Виды специальных действий: модели борьбы с террористами, диверсантами, пиратами, бандитами, модели партизанских (антипартизанских), разведывательно-диверсионных и др. действий.
2. По среде: модели специальных действий на суше, море, в воздухе, в киберпространстве.
3. По этапам циклов деятельности: модели планирования (прогнозирования), предотвращения, реагирования, восстановления и др.
4. По методам моделирования.

В работе [Chuang, D’Orsogna, 2019] выполнены обзор (библиография включает свыше 300 статей и книг) и анализ комплекса математических моделей, посвященных выявлению причин и условий радикализации отдельных социальных групп в интересах предупреждения терроризма и заблаговременной подготовки к борьбе с ним. Содержание работы и полученные исследователями (специалистами в области физики, социологии, математики, информатики) результаты свидетельствуют о плодотворности идей и подходов, высказанных основателями кибернетики (совместные решения проблем специалистами разных отраслей знаний и перенос результатов из одной предметной области в другую[1]).

[1] В интересах решения задач по обеспечению безопасности были разработаны игры безопасности (security games), нашедшие практическое применение в деятельности специальных служб (защита от терроризма, охрана критически важной инфраструктуры и т. д.). В последние годы полученные теоретико-игровые решения стали использоваться для защиты дикой природы, охраны водных биологических ресурсов, обнаружения угроз в больших компьютерных сетях [Kar et al., 2018].

Процессы радикализации исследуются с использованием моделей демографической динамики, основанных на методах статистической термодинамики: группам социальной среды (основание классификации — степень восприимчивости лиц к идеям терроризма и экстремизма) ставятся в соответствие дифференциальные уравнения.

Вторая группа моделей радикализации, объясняющих групповую поляризацию мнений и взглядов, — это расширения моделей перколяции[1] и модели Изинга, описывающей намагничивание материалов. Распространение мнений рассматривается как на безмасштабных сетях[2] (scale-free network), так и на случайных сетях и сетях малого мира[3]. Модели верифицированы на реальных данных. В частности, рассмотрен пример вербовки террористов на Северном Кавказе в социальной сети «ВКонтакте». За 8 месяцев 2015 г. было выявлено около 196 самоорганизующихся онлайн-сообществ, поддерживающих идеологию ИГИЛ (запрещена в России), которые привлекли к своим идеям свыше ста тысяч подписчиков [Chuang, D'Orsogna, 2019].

Актуальной проблемой является выявление оптимальных (с точки зрения руководителей террористических организаций) организационных структур, обеспечивающих эффективность террористических атак и вместе с тем конспирацию террористических групп и безопасность от внедрения нежелательных элементов. На рис. 1 показаны оптимальные террористические структуры[4] (см. [Chuang, D'Orsogna, 2019], круги — члены террористической группы, линии — связи между ними).

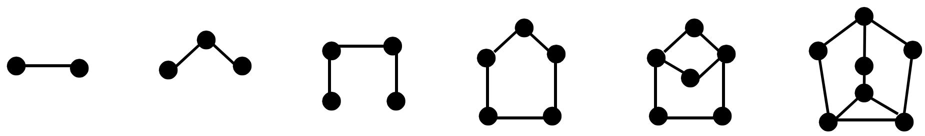

Рис. 1. Оптимальные террористические структуры (пояснения см. в тексте)

Знание оптимальных террористических структур полезно при организации мер по борьбе с терроризмом.

Третья группа моделей — теоретико-игровые модели. С 2000-х годов в задачах анализа терроризма применяются дифференциальные игры (differential terrorism games), которые используются для исследования динамики рациональных действий власти и террористических групп, оценки риска террористических атак и выработки стратегии их предотвращения [Udwadia, Leitmann, Lambertini, 2006; Wrzaczek et al., 2017; Megahed, 2019].

Одна сторона (правоохранительные структуры или террористические организации) наблюдает за действиями другой и соответствующим образом корректирует свою стратегию. Например, террористы наблюдают, как правительство распределяет свои ресурсы по объектам, прежде чем решить, следует ли атаковать и какой из объектов выбрать для атаки. Соответственно, власть распределяет ресурсы по объектам, а после террористической атаки корректирует свои ответные меры. В этом случае для поиска оптимальных решений используется равновесие Штакельберга.

Четвертая группа моделей — описание террористических событий как самоорганизующихся процессов. Хорошо известно, что террористическая деятельность не является полностью случайной, предыдущая успешная атака может временно увеличить вероятность повторной атаки

[1] Введению в теорию перколяции посвящены работы [Christensen, 2002; Тарасевич, 2002].

[2] Безмасштабная сеть — это граф, в котором степени вершин (количество исходящих из вершин ребер) распределены по степенному закону.

[3] Описание характеристик названных сетей можно найти в работе [Евин, 2010].

[4] Оптимальный граф — это граф, максимизирующий произведение меры коммуникации и меры секретности [Chuang, D'Orsogna, 2019].

в географической близости от нее. С математической точки зрения феномен прошлых событий, выступающий как катализатор будущих событий, может быть описан как процесс Хоукса[1].

Каноническая форма дискретного процесса Хоукса:

$$\lambda(t) = \mu(t) + \sum_{i:\, t_i<t} \nu(t - t_i), \tag{1}$$

где $\lambda(t)$ — интенсивность террористических атак в момент времени t, $\mu(t)$ — интенсивность внешних событий (социально-политический контекст), t_i — время наступления i-го события, $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots$, $\nu(s)$ — функция реагирования на атаки, отражает увеличение выделяемых ресурсов с ростом интенсивности атак в предыдущие моменты времени. Как правило, $\nu(s)$ является убывающей функцией (чаще всего — экспонента):

$$\nu(s) = k_0 \omega e^{-\omega s}, \tag{2}$$

где $\omega > 0$ — параметр, характеризующий, как быстро эффект самоорганизации пропадает со временем, k_0 — параметр, учитывающий увеличение риска следующей атаки после предыдущей. Для заданного временного интервала параметры ω, k_0 и $\mu_0 = \mu(t)$ вычисляются методом максимального правдоподобия.

Модель (1)–(2) была проверена на статистических данных по терактам в Юго-Восточной Азии (Филиппины, Индонезия и Таиланд), в Сирии и Северной Ирландии. Значительные различия в характере и интенсивности терактов в этих странах объяснялись за счет различий в социально-политическом контексте. Выявляемые с помощью моделей неравномерности в террористических актах могут быть полезны при организации контртеррористической деятельности.

В табл. 1 даны краткие характеристики некоторых работ в области моделирования специальных действий и борьбы с терроризмом.

Таблица 1. Некоторые работы в области моделирования специальных действий

Работы	Их краткая характеристика
«Geographic profiling: target patterns of serial murderers» [Rossmo, 1995]	Модель, позволяющая определить вероятность места проживания (базирования) преступника с учетом ранее совершенных им преступлений (координаты) и других характеристик
«Advanced techniques for modeling terrorism risk» [Major, 2002]	С использованием равновесия Нэша решается задача оптимального распределения ресурсов между объектами защиты
«A dynamical model of terrorism» [Udwadia, Leitmann, Lambertini, 2006]	Население состоит из трех групп: террористы и лица, восприимчивые и не восприимчивые к пропаганде терроризма (экстремизма). Для анализа динамики используются обыкновенные дифференциальные уравнения и уравнения в частных производных
«Mathematical terrorism» [Gutfraind, 2010]	1) Модель динамики террористической группы (с выделением в ней лидеров и рядовых исполнителей) с использованием системы двух дифференциальных уравнений, учитывающих меры по борьбе с террористами; 2) модель разрушения элементов (террористической) сети с минимальными затратами; 3) модель проектирования сети с обеспечением каскадной устойчивости для выявления уязвимых мест в сетях террористических и преступных группировок

[1] Процессы Хоукса — это расширение процессов Пуассона, применяются для прогнозирования эпидемий, землетрясений, биржевых кризисов, экономических рисков, рисков политических беспорядков и насилия, повстанческой и террористической деятельности. Описание процессов Хоукса и их приложений в экономике можно найти в работе [Егорова, Климюк, 2017].

Таблица 1 (окончание)

Работы	Их краткая характеристика
«Adversarial geospatial abduction problems» [Shakarian, Dickerson, Subrahmanian, 2012]	Теоретико-игровая модель геопространственной абдукции, применяется для поиска мест базирования повстанцев (партизан, террористов) по результатам диверсий или ожидаемым объектам атаки
«Имитационное моделирование борьбы с экстремизмом на Северном Кавказе» [Сущий, Угольницкий, Дьяченко, 2013]	Построена и исследована математическая модель борьбы с экстремизмом, параметры которой идентифицированы на эмпирических данных и экспертных оценках по Дагестану и Чечне. Основу модели составляют балансовые соотношения, описывающие динамику численности групп экстремистской системы с учетом действий государства в рамках борьбы с экстремизмом. Проведены вычислительные эксперименты с моделью, получены содержательные выводы
«Modeling human conflict and terrorism across geographic scales» [Johnson, Restrepo, Johnson, 2015]	Применение методов статистической физики для анализа социальных конфликтов
«An agent based approach for understanding complex terrorism behaviors» [Tutun et al., 2016]	Применение агентного моделирования для анализа террористических атак; верификация модели по данным статистики об атаках террористов-смертников в Ираке
«Trends and applications in Stackelberg security games» [Kar et al., 2018]	Обзор исследований в области игр безопасности Штакельберга
«Lanchester models for irregular warfare» [Kress, 2020]	Расширение уравнений Осипова – Ланчестера для анализа боевых действий с нерегулярными формированиями
«Mathematical model of terrorism: case study of Boko Haram» [Smah, 2022]	Детерминированная модель (система дифференциальных уравнений), учитывающая захваты заложников террористами и их требования по освобождению арестованных террористов. Модель верифицирована на реальных данных
«A risk-based game theory model of navy and pirate behaviors» [Fan, Lu, Chang, 2022]	Применение теоретико-игрового подхода в задачах борьбы с морским терроризмом и пиратством

Исходя из краткого обзора моделей специальных действий, можно сделать вывод, что достаточно востребованными, в частности, являются следующие задачи:

- применение методов криминологии (географическое профилирование) для выявления мест дислокации повстанцев (террористов, серийных преступников);
- анализ и управление сетями, сетевые игры;
- анализ и прогнозирование динамики специальных действий.

Дадим краткую характеристику названным задачам.

Многие исследователи в области криминологии руководствуются теорией рационального выбора и теорией рутинной деятельности[1]. Названные теории являются основой для применения математического аппарата и разработки криминологических моделей. Факторы окружающей среды (пространственные, временные и пространственно-временные) оказывают существенное влияние на преступность.

[1] Основной тезис теории рутинной деятельности: «структурные изменения в рутинной деятельности могут влиять на уровень преступности посредством схождения в одной точке места и времени трех минимальных элементов преступного посягательства прямого контакта: 1) преступников с мотивом, 2) подходящих целей, 3) отсутствия дееспособных защитников от правонарушения» [Cohen, Felson, 1979, p. 589].

Географическое профилирование основано на следующих предположениях: 1) преступники (группы) выбирают места проживания (базирования) для совершения серии преступлений (диверсий, террористических актов); 2) они стремятся минимизировать расстояние от места дислокации до цели, чтобы не быть задержанным с орудиями преступления; 3) существуют буферная зона (область вокруг места дислокации), где они не совершают преступлений, и типовые маршруты.

На рис. 2 показана экспериментальная зависимость количества преступлений от расстояния между местом жительства (базы) преступника и местом преступления [Criminal, 2007, p. 350].

На практике для определения вероятных мест базирования правонарушителей используются, как правило, следующие методы.

1. Метод окружности. Через две точки — координаты самых удаленных мест преступлений — проводится окружность (эти точки лежат на границах диаметра окружности). Центр окружности принимается за место жительства преступника.

2. Метод центра масс. Вычисляется среднее арифметическое координат мест преступлений.

3. Метод с использованием формулы К. Россмо. Территория с использованием электронной карты покрывается сеткой с квадратными ячейками; вероятность (P_{ij}) того, что преступник находится в ячейке (i — номер строки, j — номер столбца), может быть вычислена по формуле [Rossmo, 1995]:

$$P_{ij} = k \sum_{c=1}^{T} \left[\frac{\varphi}{(|x_i - x_c| + |y_i - y_c|)^f} + \frac{(1-\varphi)B^{g-f}}{(2B - |x_i - x_c| - |y_i - y_c|)^g} \right], \tag{3}$$

где $f = g = 1{,}2$ — параметры; k — параметр, обеспечивающий значение вероятности на отрезке $[0, 1]$; T — количество преступлений; $0 \leqslant \phi \leqslant 1$ — весовой коэффициент; B — радиус буферной зоны.

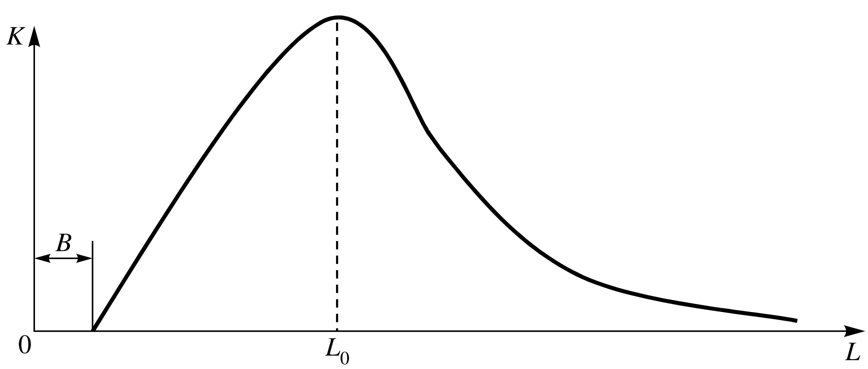

Рис. 2. Зависимость количества K преступлений от расстояния L между местом жительства преступника и местом преступления

Отметим, что метод географического профилирования полезен, когда преступная группа совершает серию преступлений, базируясь в одном месте (районе). С учетом данного ограничения его можно рекомендовать к использованию в деятельности правоохранительных и специальных структур.

Наряду с географическим профилированием в криминологии используются и другие количественные методы анализа и прогноза преступности в целях борьбы с ней и ее предупреждения.

Поскольку одной из целей диверсантов, террористов и повстанцев являются дестабилизация общества и насильственная смена власти, важной научной проблемой криминологии является разработка методов и индикаторов оценки устойчивости общества и его антихрупкости. Одним из методов прогнозирования конфликтов является подход, основанный на выявлении некоторых индикаторов — предикаторов надвигающихся событий. В ряде работ в качестве индикатора напряженности предлагается рассматривать сумму умышленных убийств и самоубийств. Применение данного индикатора основано на выявленной статистической зависимости между аномальным ростом количества убийств и самоубийств и социальными конфликтами (революциями, гражданскими войнами, массовыми протестами) [Каменецкий, Басаева, 2019; Басаева, Каменецкий, Хосаева, 2022].

С конца 1970-х годов развивается *теория сетевых игр*, изучающая формирование сетевых структур — устойчивых связей между игроками в условиях несовпадения интересов и/или различной информированности последних (см. [Губко, 2004; Новиков, 2010]). Наряду с термином «сетевые игры» (network games) все чаще встречается термин «игры формирования сетей» (network formation games) (рис. 3, см. [Новиков, 2010]).

Сетевые игры рассматриваются как включающие в себя игры формирования сетей и игры на сетях, причем в последних сеть фиксирована. Среди игр на сетях, в свою очередь, выделяются: игры маршрутизации, когнитивные игры, игры на социальных сетях и игры на сетевых графиках [Новиков, 2010].

По Д. А. Новикову, на качественном уровне различие между играми формирования сетей и играми на сетях состоит в том, что в первых предметом выбора игроков являются переменные, относящиеся к парному взаимодействию между игроками, а в играх на сетях — переменные, описывающие вершины сети (значения факторов в играх на когнитивных картах, мнения агентов в играх на социальных сетях и т. д.). В будущем эти модели, вероятно, объединятся (см. пунктирные стрелки на рис. 3). Объединение моделей приведет к двухэтапной игре, на первом этапе которой игроки формируют сеть, а на втором этапе используют сформированную сеть для передачи информации, ресурсов и т. д. в соответствии с концепцией игр на сетях.

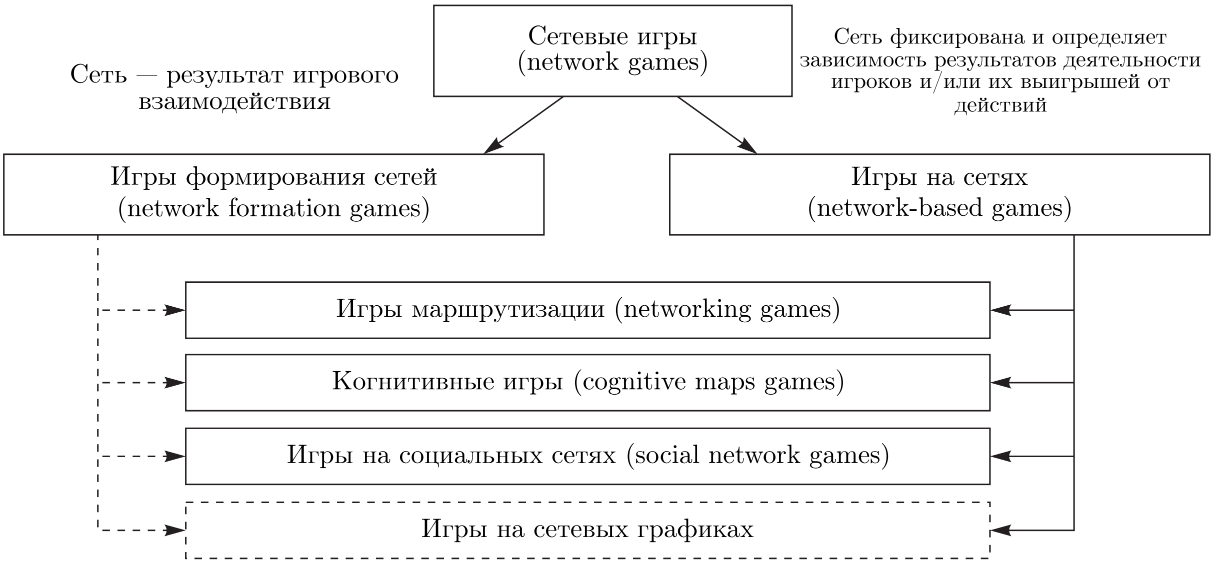

Рис. 3. Сетевые игры

Исследование игр на сетях включает следующие общие этапы [Новиков, 2010]:

1) описание сети и исследование ее динамики;

2) описание множества игроков, их предпочтений, информированности, множеств допустимых стратегий и контролируемых параметров;

3) сведение игры на сети к той или иной известной теоретико-игровой модели (игре в развернутой форме, игре в нормальной форме, кооперативной игре и т. д.).

На этом сетевая специфика заканчивается и начинается этап классического теоретико-игрового анализа, результаты которого, конечно, должны быть затем проинтерпретированы в сетевых терминах.

Для примера рассмотрим постановку задачи исследования оптимальной сети террористической (повстанческой) группы. Создаваемые террористами сети должны обладать как минимум двумя свойствами: 1) каскадная устойчивость сети (разрушение одного ее элемента не должно приводить к разрушению всей сети или значительной ее части); 2) эффективность сети (обмен информацией между членами группы и совместное решение задач).

Если обозначить через $\Theta(N)$ множество всех графов с множеством вершин N, то заинтересованность i-го игрока (руководителя террористической организации или правоохранительных структур) в той или иной структуре связей можно описать функцией выигрыша $f_i\colon \Theta(N) \to \Re$, $i = 1, 2$, определяющей выигрыш игрока при реализации различных структур. Поскольку цели игроков обычно антагонистичны, то достаточно рассмотреть только функцию f_1 руководителя террористической организации.

Целевой функцией 1-го игрока может быть следующая функция:

$$f_1(G) = \max_{G\in\Theta}(\alpha R(G) + (1-\alpha)W(G)), \tag{4}$$

где $0 < \alpha < 1$ — параметр, $R(G)$ — функция устойчивости сети, $W(G)$ — функция эффективности сети. Конкретный вид функций $R(G)$ и $W(G)$ представлен в работе [Gutfraind, 2010]. Отметим, что значения указанных функций зависят от действий обоих игроков.

Одним из первых и наиболее важных классов моделей боевых действий являются уравнения Осипова–Ланчестера, которые легко расширяются для моделирования борьбы с повстанцами, партизанами и террористическими группами [Новиков, 2012; Kress, 2020].

В классической модели Осипова–Ланчестера (см. [Осипов, 1915; Шумов, 2020]) обе стороны применяют одинаковую тактику и технику ведения огня, бои симметричны. Асимметричные бои происходят, когда стороны применяют разную тактику (например, регулярные силы ведут борьбу с партизанами или повстанцами [Deitchman, 1962]). С одной стороны, партизаны, хорошо укрывшиеся в засаде или смешанные с мирным населением, ведут прицельный огонь по регулярным войскам, которые полностью открыты для партизан. С другой стороны, регулярные силы «стреляют врасплох» и поэтому могут вести огонь по партизанам только по площади. Если обозначить через $x(t)$ численность регулярных войск в момент времени t, а через $y(t)$ — численность партизан, то получим следующие уравнения:

$$\frac{dx(t)}{dt} = -a_y y(t), \quad \frac{dy(t)}{dt} = -a_x x(t)\frac{y(t)}{y_0}, \tag{5}$$

где $a_x > 0$ и $a_y > 0$ — параметры поражающей скорострельности (мощи) боевых единиц первой и второй стороны, $y_0 = y(0)$.

Из решения системы (5)

$$\frac{a_x}{2}\left(x_0^2 - x^2(t)\right) = a_y\left(y_0^2 - y_0 y(t)\right) \tag{6}$$

находим условие равенства сил:

$$\frac{a_y y_0^2}{a_x x_0^2} = \frac{1}{2} \quad \text{или} \quad \sqrt{2} y_0 = x_0 \sqrt{\frac{a_x}{a_y}}. \tag{7}$$

То есть при прочих равных условиях для достижения паритета численность регулярных войск должна быть в $\sqrt{2} \approx 1{,}4$ раза выше численности партизан.

Другой вид асимметрии заключается в том, что регулярные войска имеют разнородные силы и средства, а повстанцы (вторая сторона) однородны. Тогда получим уравнения

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = -\beta_i(t) a_y y(t), \quad i = 1, \ldots, n; \quad \frac{dy(t)}{dt} = -\sum_{i=1}^{n} a_{xi} x_i(t), \quad \sum_{i=1}^{n} \beta_i(t) = 1, \tag{8}$$

где a_{xi} — параметр поражающей мощи единиц i-го типа первой стороны, $x_i(t)$ — численность единиц i-го типа первой стороны, $\beta_i(t)$ — доля сил повстанцев, выделяемых в момент времени t для поражения единиц i-го типа противника.

Возможны и другие постановки задач динамики специальных действий:

- учет в моделях активности мирного населения, которое может поддерживать как регулярные войска, так и повстанцев;
- распределение регулярных войск по районам (объектам) для защиты мирного населения от диверсионных и террористических атак как динамически (в зависимости от информации), так и на постоянной основе (например, когда районы защиты территориально разнесены);
- на территории одного государства ведут боевые действия регулярные силы нескольких государств;
- и т. д. и т. п.

Модели динамики специальных действий и имитационные модели используются на фазе ведения действий. На фазе подготовки к ним применяются функции победы в боевых и специальных действиях (функции конфликта или успеха в состязании, см. [Tullock, 1967; Skaperdas, 1996]). В работе [Шумов, 2024a] обоснована функция победы в боевых и специальных действиях, в соответствии с которой вероятность победы первой стороны равна

$$P_x = \frac{(\beta x)^m}{(\beta x)^m + (y)^m} = \frac{q^m}{q^m + 1}, \quad q = \frac{\beta x}{y}, \tag{9}$$

где x (y) — численность боевых единиц первой (второй) стороны, β — параметр боевого превосходства единицы первой стороны над второй, m — параметр масштаба действий, q — соотношение сил сторон.

На большом объеме статистических данных и исходя из содержательных предпосылок получены следующие значения параметра масштаба действий:

Вид действий	Специальные действия	Боевые действия, тактический уровень	Боевые действия, оперативный уровень	Боевые действия, стратегический уровень
Значение параметра масштаба	0,5	1,0	1,0–1,5	1,5–2,0

Из формулы (9) находим требуемое соотношение сил для победы над противником с заданной вероятностью:

$$q = \sqrt[m]{\frac{P_x}{1 - P_x}}. \qquad (10)$$

Для разных значений назначенной вероятности победы требуемое соотношение сил представлено в таблице 2.

Таблица 2. Требуемое превосходство над противником в боевых действиях и специальных операциях

Заданная вероятность победы P_x	Специальные действия, $m = 0{,}5$	Боевые действия		
		Тактический уровень, $m = 1$	Оперативный уровень, $m = 1$–$1{,}5$	Стратегический уровень, $m = 1{,}5$–2
0,7	5,4	2,3	2,0	1,6
0,75	9,0	3,0	2,4	1,9
0,8	16,0	4,0	3,0	2,2
0,9	81,0	9,0	5,8	3,5

Из таблицы видно, что для победы над противником с вероятностью 0,75 на тактическом уровне требуется обеспечить трехкратное превосходство над противником, тогда как при ведении специальных действий уже требуется девятикратное превосходство. Данный результат подтверждается практикой контртеррористических и специальных операций: опыт внутренних конфликтов свидетельствует о том, что соотношение численности правительственных войск к повстанцам должно быть в пределах (8–10) : 1 (восемь-десять единиц к одной). Многие государства Запада исходят именно из таких показателей при определении численности сил правопорядка [Шумов, 2024а]. По сравнению с тактическим уровнем на оперативном и стратегическом уровнях неопределенности исхода сражения (операции) при заданном соотношении сил снижаются. Этот вывод подтверждается военной наукой.

Заметим, если в формуле (9) сделать замену переменной $z^m = q^m + 1$, то мы получим распределение Парето:

$$P_x = 1 - z^{-m}, \quad z \geqslant 1,$$

обладающее свойством самоподобия. Содержательно это значит, что боевые действия батальона могут быть описаны тем же распределением, что и боевые действия бригады, дивизии, армии. Этому свойству в военной науке соответствует принцип, требующий учета одних и тех же факторов, определяющих успех любого боя, сражения и операции [Речь, 1985].

Второе свойство выражения (9) — отсутствие математического ожидания при параметре $m \leqslant 1$ и, как следствие, необходимость создавать значительное превосходство в силах и средствах для достижения победы (разгрома противника, нейтрализации террористов и диверсионных групп).

Малое значение параметра масштаба в специальных действиях и, как следствие, необходимость привлечения значительных сил для достижения результата объясняются тем, что при проведении специальных операций создаются дополнительные элементы боевых порядков [Теория, 2009]:

- группа блокирования — для изоляции определенного района;
- группа захвата или штурмовая группа;
- поисковая группа и др.

Нами рассмотрены некоторые описательные модели специальных действий. Далее перейдем к описанию нормативных (или теоретико-игровых) моделей.

3. Игра «атакующий – защитник» и игра безопасности Штакельберга

Центральной проблемой в задачах защиты населения и инфраструктуры от террористических актов и диверсий является нахождение оптимального распределения ресурсов по объектам, задачам, времени, технологиям и т. д. Эта проблема обычно решается методами теории игр или комплексными исследованиями, где теоретико-игровые задачи описывают стратегическое поведение участников (правительства, вооруженных сил, террористических и диверсионных групп).

Исторически первые постановки и решения задач распределения ресурсов между объектами возникли в военной области (игра полковника Блотто, задача «нападение – защита» Ю. Б. Гермейера и др., см. [Новиков, 2012]).

Игра «атакующий – защитник» применительно к задачам обеспечения безопасности и борьбы с терроризмом стала систематически исследоваться с начала 2000-х годов, и к настоящему времени известны сотни работ с различными постановками задач. Известные работы классифицируются по следующим основаниям [Hunt, Zhuang, 2024].

1. Последовательность ходов. В зависимости от продолжительности циклов деятельности и информированности сторон выделяются игры с одновременным выбором ходов или с последовательным (иерархические игры). В иерархических играх обычно полагается, что защитник (правительственные силы) ходит первым, а атакующий (террористическая или диверсионная группа), после изучения действий защитника, ходит вторым. Если стороны выбирают свою стратегию, не зная действий противника, то полагается, что имеется игра с одновременным выбором ходов.

Игры с одновременным выбором ходов решаются с использованием равновесия Нэша, а с последовательным[1] — равновесия Штакельберга. Другие факторы (информационная структура игры, см. [Новиков, Чхартишвили, 2022]) также влияют на концепцию решения: возникают постановки задач в форме байесовских, сигнальных и рефлексивных игр.

2. Количество игроков. В абсолютном большинстве работ рассматривается два стратегических игрока — защитник и атакующий. В работе [Dighe, Zhuang, Bier, 2009] рассмотрен случай, когда одни и те же объекты защищаются двумя децентрализованными защитниками. Авторы показали, что ожидаемые потери одного централизованного защитника меньше потерь двух децентрализованных защитников.

В ряде работ рассматриваются ситуации, когда имеются один защитник и N атакующих. Если среди разнородной группы атакующих есть один особенно сильный, то остальные атакующие могут отказаться от действий. Поэтому защитнику следует направлять свои усилия в первую очередь против одного сильнейшего.

3. Целевые функции игроков. В качестве целевой функции защитника используются следующие:

- максимизация ожидаемой полезности как разности между ожидаемой выгодой (предотвращенным ущербом) и ожидаемым убытком;
- максимизация ценности неповрежденных объектов или минимизация вероятности успешной атаки;
- максимизация вероятности обнаружения атакующих и др.

[1] В большинстве работ рассматриваются игры с последовательным выбором ходов. Исключения составляют игры патрулирования (patrolling games).

В антагонистических играх цель атакующего заключается в минимизации целевой функции защитника.

4. Временной горизонт игры. Большинство игр являются одноходовыми. Они относительно просты и практичны. Например, когда органы безопасности рассматривают возможность развертывания новых технологий, их интересует, как могут отреагировать стратегическое противники. Аналогично: при изучении различных политик досмотра контейнеров в портах службы безопасности хотят понять, как эти политики повлияют на решения контрабандистов. Конечно, эти примеры могут быть расширены до многошаговой ситуации, где игра ведется непрерывно на фиксированном или бесконечном горизонте времени. Например, если интересуются вопросом, какие технологии следует приобретать со временем, то следует использовать многошаговую игру.

В работе [Zhuang, Bier, Alagoz, 2010] рассматривается игра с конечным числом шагов, в которой защитник на каждом шаге выбирает стратегию защиты и стратегию раскрытия информации, а атакующий с учетом имеющегося знания выбирает свою стратегию. Выяснилось, что в определенных сценариях защитник за счет скрытия и обмана может получить преимущество в игре при прочих равных условиях.

О. Барон и др. [Baron, Berman, Gavious, 2018] исследовали многошаговую игру, где на каждом шаге защитник решает, отвечать ли ему на атаку или не отвечать. На реальных данных из нескольких источников авторы получили согласующиеся с практикой решения.

В статье [Bakshi, Pinker, 2018] моделируется реалистичный сценарий, в котором защитник решает, делать ли публичное предупреждение о готовящейся атаке. Это предупреждение может повлиять на время террористической атаки, сдвинув ее на более поздний период, а службам безопасности лучше подготовиться к защите или подавить угрозу.

5. Степень рациональности игроков. Обычно полагается, что игроки обладают совершенной рациональностью, т. е. четко определяют свои цели, ранжируют их в порядке значимости и обладают абсолютными вычислительными способностями. Вместе с тем имеется ряд работ, в которых игроки считаются ограниченно рациональными и выбирают стратегии, близкие к оптимальным. Описание типов ограниченной рациональности и методов решения задач с учетом ограниченной рациональности игроков можно найти в работе [Новиков, 2022]. В большинстве задач с ограниченной рациональностью игроков находится равновесие дискретного отклика (quantal response equilibrium). В работе [Zhang et al., 2021], используя исторические данные, авторы показали, что равновесие дискретного отклика приводит к более близким к реальности решениям по распределению ресурсов, чем решения с использованием классических подходов и предположения о совершенной рациональности игроков.

6. Отношение игроков к риску. В большинстве теоретико-игровых задач полагается, что игроки нейтральны к риску. Лишь в небольшом числе работ исследуются целевые функции для игроков, склонных к риску или стремящихся его избежать. В работе [Zhuang, Bier, 2007] рассматривается игра по защите объектов от стихийных бедствий и террористических атак с одновременным и последовательным выбором стратегий и аддитивными целевыми функциями, учитывающими ресурсы сторон и возможный ущерб объектам. Рассмотрены варианты, когда игроки нейтральны к риску, склонны к нему или стремятся его избегать.

В общем случае учет отношения игроков к риску приводит к нелинейным целевым функциям и трудностям при нахождении оптимальных решений (зачастую их можно вычислить только численными методами).

7. Степень информированности игроков. Информационная структура игры существенно влияет на действия игроков и, как следствие, на результаты этих действий. Обычно полагается, что игроки обладают *общим знанием* (см. [Новиков, Чхартишвили, 2003]) о существенных параметрах игры (целевых функциях, возможных стратегиях и т. д.). В некоторых работах требование общего знания ослаблялось и вводились следующие предположения:

- только защитник знает уязвимость объектов;
- защитник не знает предпочтений атакующего (его тип и ресурсы);
- атакующий не знает защитных мер на объектах или результата атаки и др.

В результате возникает байесовская игра[1], которая более сложна и трудоемка в решении.

Также выделяется отдельный класс игр — *рефлексивные игры*, позволяющие учесть субъективные информированности игроков и их ценности. Их характеристику и применение в интересах борьбы с терроризмом можно найти в работах [Лефевр, 1973; Лефевр, 2003; Новиков, Чхартишвили, 2003; Новиков, 2016; Новиков, Чхартишвили, 2022].

В игре «защитник – атакующий» (или в игре обеспечения безопасности) оптимальные стратегии находятся с использованием равновесия Нэша или Штакельберга. Обсуждению взаимосвязи указанных концепций равновесия посвящена работа [Korzhyk et al., 2011]. Обычно полагается, что атакующий наблюдает за действиями защитника по охране объектов и, исходя из полученной информации, выбирает объект для атаки. В этом случае имеется иерархическая игра, и оптимальная стратегия защитника основана на равновесии Штакельберга. Однако зачастую атакующему получить информацию о действиях защитника трудно. В этом случае защитнику следует использовать равновесие Нэша (игра с одновременным выбором стратегий).

D. Korzhyk et al. доказали, что оптимальная по Штакельбергу стратегия защитника вместе с тем является оптимальной и по Нэшу при выполнении следующих условий: защитник имеет однородные ресурсы, атакующий выбирает один объект для атаки.

Поскольку для описания проблем безопасности и специальных действий наиболее часто применяются иерархические игры, то далее рассмотрим одну из разновидностей этих игр.

Игра безопасности Штакельберга. Игрой безопасности Штакельберга (Stackelberg security game) называется игра, возникающая в задачах обеспечения безопасности, в которой первая сторона (лидер, обычно это защитник) стремится максимизировать свою полезность, зная, что вторая сторона (агент, последователь, атакующий), зная действия первой стороны, оптимизирует собственную полезность [Casorran et al., 2019].

Сначала формализуем ***игру Штакельберга*** (General Stackelberg game). Обозначим через I множество чистых стратегий лидера (первого игрока), через J — множество чистых стратегий агентов (игроков, делающих ход после лидера), $\pi^k \in [0,\ 1]$ — вероятность столкновения лидера с k-м агентом, $k \in K$, где K — множество агентов. Введем n-мерный симплекс:

$$S^n = \left\{a \in [0,\ 1]^n\colon\ \sum_{h=1}^{n} a_h = 1\right\}.$$

Смешанная стратегия лидера — это вектор $x \in S^{|I|}$ такой, что для любого $i \in I$, x_i — вероятность выбора стратегии i. Аналогично: смешанная стратегия k-го агента — это вектор $q^k \in S^{|J|}$, такой, что q^k_j — это вероятность, с которой k-й агент выбирает стратегию $j \in J$. Заданы матрицы платежей (выигрышей) лидера и агентов. Эти матрицы обозначаются как $\left(R^k,\ C^k\right)$,

[1] Дж. Харсаньи так определил байесовскую игру. В дополнение к фактическим участникам игры появляется виртуальный игрок «природа». Природа наделяет каждого из фактических участников случайной переменной, значение которой называется его типом. Распределение (плотность или функция вероятности) типов для каждого из игроков является общим знанием. В начале игры природа «выбирает» типы игроков. Тип, в частности, определяет функцию выигрыша участника [Harsanyi, 1967].

где $R^k \in \mathbb{R}^{|I|\times|J|}$ — матрица лидера, $C^k \in \mathbb{R}^{|I|\times|J|}$ — матрица k-го агента. Ожидаемые выигрыши лидера и агентов:

$$\sum_{i\in I}\sum_{j\in J}\sum_{k\in K}\pi^k R_{ij}^k x_i q_j^k, \tag{11}$$

$$\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} C_{ij}^k x_i q_j^k, \quad \forall k\in K. \tag{12}$$

Решение игры Штакельберга формулируется как решение задачи двухуровневого программирования (bilevel programming). Задача первого уровня соответствует задаче принятия решения лидером, а вложенная задача (задача второго уровня) решается для агентов [Casorran et al., 2019]:

$$\max_{x,q}\sum_{i\in I}\sum_{j\in J}\sum_{k\in K}\pi^k R_{ij}^k x_i q_j^k, \tag{13}$$

$$x\in S^{|I|}, \tag{14}$$

$$q^k \in \arg\max_{r^k}\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} C_{ij}^k x_i q_j^k, \quad \forall k\in K, \tag{15}$$

$$r_j^k \in \{0,\ 1\}, \quad \forall j\in J, \quad \forall k\in K, \tag{16}$$

$$\sum_{j\in J} r_j^k = 1, \quad \forall k\in K. \tag{17}$$

Выражение (13) соответствует максимизации целевой функции лидера, условие (14) отражает его смешанные стратегии. Задача второго уровня (15)–(17) показывает, что агенты максимизируют свою полезность, давая наилучший ответ в чистой стратегии на смешанную стратегию лидера. Если у агента имеется несколько оптимальных стратегий, то в задаче первого уровня выбирается та, которая устраивает лидера.

В ***игре безопасности Штакельберга*** защитник распределяет ресурсы для защиты множества $J = \{1, \ldots, n\}$ объектов, причем он может защитить одновременно $m < n$ объектов. Множество чистых стратегий защитника обозначим как I, стратегий атакующих — как J. Выигрыши игроков зависят только от того, защищен или нет атакуемый объект.

Обозначим через D^k полезность защитника при столкновении с атакующим, $k \in K$, и через A^k — полезность k-го атакующего. Полезности игроков зависят от того, защищен или нет j-й объект:

	Защищен	Не защищен
Защитник	$D^k(j \mid p)$	$D^k(j \mid u)$
Атакующий	$A^k(j \mid p)$	$A^k(j \mid u)$

Обозначим через c_j вероятность (частота) защиты j-го объекта:

$$c_j = \sum_{i\in I:\ j\in i} x_i, \quad \forall j\in J, \tag{18}$$

т. е. частота защиты j-го объекта есть сумма вероятностей применения стратегий по защите этого объекта. Значения q_j^k указывают, наносит ли k-й атакующий удар по этой цели.

Ожидаемые полезности защитника и атакующих соответственно равны

$$\sum_{j\in J}\sum_{k\in K}\pi^k q_j^k\left\{c_j D^k(j\mid p) + (1-c_j)D^k(j\mid u)\right\}, \tag{19}$$

$$\sum_{j\in J} q_j^k\left\{c_j A^k(j\mid p) + (1-c_j)A^k(j\mid u)\right\}, \quad \forall k\in K. \tag{20}$$

Решение игры безопасности Штакельберга также формулируется как решение задачи двухуровневого программирования (с учетом ограничений (14) и (18)) [Casorran et al., 2019]:

$$\sum_{j\in J}\sum_{k\in K}\pi^k q_j^k\left\{c_j D^k(j\mid p)+(1-c_j)D^k(j\mid u)\right\}\to \max, \tag{21}$$

$$q^k\in \arg\max_{r^k}\sum_{j\in J} q_j^k\left\{c_j A^k(j\mid p)+(1-c_j)A^k(j\mid u)\right\},\quad \forall k\in K, \tag{22}$$

$$r_j^k\in\{0,\,1\},\quad \forall j\in J,\quad \forall k\in K, \tag{23}$$

$$\sum_{j\in J} r_j^k=1,\quad \forall k\in K. \tag{24}$$

Целевая функция защитника подлежит максимизации. Ограничения (14) и (18) характеризуют большое число смешанных стратегий защитника и связывают их с частотой защиты объектов. Остальные выражения относятся к задаче второго уровня, которая гарантирует, что атакующие максимизируют свои целевые функции (каждый из них атакует единственную цель).

Другие возможные формулировки игры безопасности Штакельберга, результаты вычислительных экспериментов и практические приложения теоретико-игровых задач можно найти в [Kar et al., 2018; Casorran et al., 2019].

Далее рассмотрим подкласс игр безопасности — *игры патрулирования*[1].

4. Игры патрулирования на графе

Игры патрулирования на графах могут быть классифицированы по числу участников (один защитник, один атакующий, несколько защитников и атакующих) и по их типам, с дискретным или непрерывным временем, по ограничениям на выигрыши, по наличию или отсутствию кооперации между игроками и т. д. (см. работы [Alpern, Morton, Papadaki, 2011; Lin et al., 2013; Delle Fave et al., 2014; Гусев, Мазалов, 2015; Гусев, 2016]). Эти игры возникают в задачах охраны военных баз и важных объектов.

В играх с дискретным временем задается временной горизонт T игры (например, это обход заданных вершин защитником). Игроки делают ходы в дискретные моменты времени $t = 1, \ldots, T$. Атакующий выбирает i-ю вершину графа и время τ атаки. Для успеха атаки ему надо непрерывно быть в вершине m периодов времени, $m \leqslant T$. Защитник выбирает маршрут обхода w вершин графа. Если он перехватывает атакующего, то его действия считаются успешными, иначе — неуспешными (рис. 4). На рисунке показан маршрут патрулирования $w = 1 - 2 - 4 - 1 - 2 - 2 - 5 - 4$. Атака на вершину 5 в момент времени $\tau = 2$, $m = 4$. Поскольку защитник не перехватывает атакующего, то атака успешна [Alpern, Morton, Papadaki, 2011].

В статье [Lin et al., 2013] рассматривается задача патрулирования на графе. Патрульный перемещается по ребрам графа с задачей обнаружения атак на узлы. За единицу времени он может переместиться только по одному ребру. Возможны два типа атакующих: 1) неподготовленный атакующий (random attacker) с известным защитнику распределением атак по узлам; 2) подготовленный атакующий (strategic attacker), с которым у защитника игра с нулевой суммой.

При нахождении атакующего в i-й вершине графа ему требуется случайное время X_i для завершения атаки. Плотность распределения случайной величины X_i известна и атакующему,

[1] Проблемы патрулирования (problems of patrolling) изучаются с 1970 годов. В ранних работах полагалось, что вероятность нахождения атакующего (частота преступлений) в разных местах района поиска или постоянна, или известна защитнику. В последующем для исследования проблем патрулирования стали использоваться игры поиска (search games) и игры инфильтрации (проникновения, infiltration games).

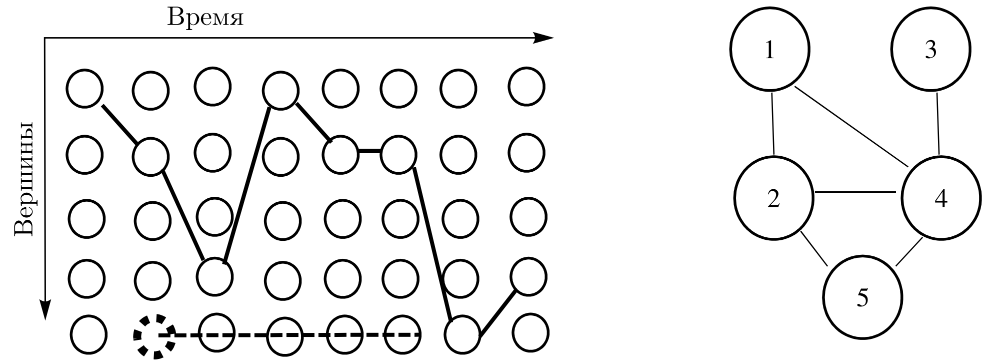

Рис. 4. Пример игры патрулирования на графе. Сплошная линия — маршрут патрулирования, пунктирная — атака

и защитнику. Задача нахождения оптимальных маршрутов патрулирования сведена к задаче линейного программирования (с использованием эвристики для формирования ограниченного количества шаблонов патрулирования). Разработанные алгоритмы могут быть использованы в качестве рекомендаций в задаче построения графа патрулирования.

В статье [Гусев, Мазалов, 2015] рассматривается теоретико-игровая модель патрулирования на графе, в которой атакующий имеет m единиц времени для атаки некоторой вершины графа, а стратегией патрулирующего является выбор пути на графе. Найдены равновесие Нэша в игре с нулевой суммой и средняя длина патрулирования (длина пути до поиски атакующего либо длина пути патрулирования) для различных графов (цикл, звезда, линейный граф).

Игра патрулирования: $G = \langle P, A, Q, S_1, S_2, H\rangle$, где P — защитник (патрулирующий), A — атакующий, $Q = \langle V, E\rangle$ — неориентированный связный граф (V — множество вершин, E — множество ребер, $n = |V|$ — количество вершин в графе), S_1 и S_2 — множества стратегий защитника и атакующего соответственно. Вершины графа обозначены как v_j, $j = 1, \ldots, n$. Разные вершины графа могут соединяться только одним ребром, допустимы ребра вида (v_k, v_k).

Множество стратегий защитника S_1 представляет пути патрулирования $u = v_{k_1} - - v_{k_2} - \ldots - v_{k_T}$, где $\forall j = 1, \ldots, T$: $v_{k_j} \in V$, $1 \leqslant k_j \leqslant n$, $T \geqslant 1$; $\forall t = 1, \ldots, T-1$: $\left(v_{k_t}, v_{k_{t+1}}\right) \in E$. Элементы множества стратегии атакующего S_2 (атаки) представляются в виде

$$\underbrace{0 - \ldots - 0}_{t} - \underbrace{v - \ldots - v}_{m} - 0 - \ldots - 0, \quad t = 0, \ldots, T - m,$$

или, более кратко, $w = (t, v)$, где t — момент посещения вершины v.

Функцией выигрыша $H(u, w)$, $u \in S_1$, $w \in S_2$, является вероятность поимки атакующего защитником:

$$H(u, w) = \begin{cases} 0, & \forall j = 1, \ldots, m\colon v_{k_{t+j}} \neq v, \\ 1, & \exists j = 1, \ldots, m\colon v_{k_{t+j}} = v. \end{cases}$$

Игра $G = \langle P, A, Q, S_1, S_2, H\rangle$ для краткости записывается как $G(Q, T, m)$, где m — время, необходимое атакующему для проведения атаки, T — длина пути ($m \leqslant T$).

Доказано, что в игре $G(Q, T, 1)$ значение игры равно $H^* = \frac{1}{n}$. Далее авторами получены значения игры для цикла, звезд и линейного графа [Гусев, Мазалов, 2015].

В играх патрулирования с непрерывным временем (см. [Alpern, Morton, Papadaki, 2011]) атака может произойти в любой точке сети (не обязательно в вершине) и в любое время. Продолжительность атаки фиксирована.

5. Теоретико-игровые модели обеспечения транспортной безопасности

Транспортные объекты (аэропорты, метро и т. д.) часто являются целями террористических атак, и обеспечению их безопасности правительства многих стран уделяют особое внимание.

Службы безопасности аэропортов США используют программный помощник для планирования графиков проверок на контрольно-пропускных пунктах при въезде в аэропорт и патрулировании в терминалах аэропорта [Pita et al., 2008].

Вводятся следующие предположения:

- атакующие (террористы) могут наблюдать за действиями защиты и, исходя из этого, выбирать время и место атаки;
- тип атакующих неизвестен.

Для поиска оптимальных стратегий защитника используется байесовская игра безопасности Штакельберга. Обозначим через x вектор стратегий защитника. Компонент x_i вектора — вероятность применения защитником i-й стратегии. Соответственно, q^l — это вектор стратегий атакующего типа, $l \in L$ (например, террорист, контрабандист, преступник). Пусть X и Q — множества стратегий защитника и атакующего соответственно. Платежные матрицы защитника R^l и атакующего C^l формируются для каждого типа атакующего. Пусть M — достаточно большое положительное число. Заданы априорные вероятности p^l распределения атакующих по типам, $l \in L$. Задача нахождения решения защитника [Pita et al., 2008]:

$$\max_{x,q,a} \sum_{i\in X} \sum_{l\in L} \sum_{j\in Q} p^l R^l_{ij} x_i q^l_j, \tag{25}$$

с выполнением ограничений

$$\sum_{i\in X} x_i = 1, \quad 0 \leqslant x_i \leqslant 1, \quad \sum_{j\in Q} q^l_j = 1, \quad q^l_j \in \{0,\ 1\}, \tag{26}$$

$$0 \leqslant a^l - \sum_{i\in X} C^l_{ij} x_i \leqslant (1 - q^l_j)M, \quad a \in \mathbb{R}. \tag{27}$$

Последнее ограничение — линеаризованная форма условий оптимальности атакующего. Задача квадратичного программирования (25) может быть сведена к задаче смешанного целочисленного линейного программирования (mixed integer linear programming) заменой переменных $z^l_{ij} = x_i q^l_j$.

Использование компьютерного помощника позволило службам безопасности международного аэропорта Лос-Анджелес и полиции сократить время на рутинные работы по планированию расписаний и повысило качество принимаемых решений. В последующем модель и программный помощник при поддержке администрации транспортной безопасности были масштабированы на 400 аэропортов США [Pita et al., 2008].

В рассмотренной работе по обеспечению безопасности аэропорта неопределенность, связанная с типом нарушителя (террорист, контрабандист, преступник), устранялась применением байесовской игры безопасности (оценивалась вероятность принадлежности атакующего некоторому типу, а степень его общественной опасности учитывалась в значениях платежной матрицы). Однако можно указать несколько факторов, ограничивающих применение байесовских игр:

- защитнику неизвестны вероятности распределения атакующих по типам;
- не всегда возможно или нежелательно сравнивать выигрыши защитника для разных типов противника (в одном случае возможны акты с гибелью людей, в другом случае цель противника заключается в нанесении материального ущерба и т. д.);

- формируется единственное решение, скрывающее для конечного пользователя компромиссы, связанные с типом атакующего.

Второй возможный способ устранения названной неопределенности предложен в работе [Brown et al., 2014], это концепция многокритериальных игр безопасности (multi-objective security games): вместо единственного оптимального решения получается набор оптимальных по Парето (не доминируемых) решений, формируемых в задачах однокритериальной оптимизации с ограничениями.

Таким образом, игра «атакующий – защитник» в настоящее время активно развивается и находит множество приложений в задачах специальных действий и обеспечения безопасности населения, объектов и районов. Некоторые модели реализованы в виде программного обеспечения и используются службами безопасности транспортных и других объектов.

6. Обзор моделей обеспечения пограничной безопасности

Многими исследователями отмечается, что пограничная безопасность является сложной системной проблемой и нельзя рассматривать деятельность пограничных сил (ведомств) изолированно, в отрыве от общей системы обеспечения национальной безопасности [Willis et al., 2011; Шумов, 2023].

Модели обеспечения пограничной безопасности обычно классифицируют по следующим основаниям:

1) комплексные и по направлениям пограничной деятельности (пограничная охрана, береговая охрана и пограничный контроль);

2) по типам управления пограничной деятельностью (обоснование потребных сил и средств, применение существующих сил и средств);

3) по методам моделирования.

По направлению пограничного контроля в опубликованных работах основное внимание уделяется проблемам биометрии (электронная граница), оценке рисков и анализу информации по пассажиропотоку [Labati et al., 2016; Lai et al., 2017; Jain et al., 2020].

Проблема обоснования потребных сил и средств для надежной охраны границы исследована в работах [Wein, Liu, Motskin, 2009; Leonard, Lee, 2020; Шумов, 2024b].

Работа Л. Вайна, И. Лю и А. Моцкина [Wein, Liu, Motskin, 2009] интересна в нескольких отношениях.

Во-первых, она является первой работой, в которой на основе данных экономической и пограничной статистики разработана комплексная агрегированная модель обеспечения пограничной безопасности, состоящая из подмоделей: 1) задержания нарушителей на американо-мексиканской границе; 2) содержания нарушителей под стражей и их выдворения; 3) выявления нелегальных мигрантов на территории США.

Во-вторых, результаты расчетов и обработки данных пограничной статистики позволили сделать следующие выводы:

- деятельность пограничных агентов примерно в пять раз эффективнее деятельности инспекторов, отвечающих за поиск нелегальных мигрантов внутри страны;

- вероятность задержания террористов на американо-мексиканской границе по состоянию на 2006 г. не превышала 0,1;

- для эффективной борьбы с хорошо подготовленными нарушителями границы (террористами, контрабандистами, нелегальными мигрантами, пользующимися услугами проводников) необходимо руководствоваться прежде всего принципом непрерывности охраны границы, а в расчетах — применением игр безопасности Штакельберга.

В-третьих, в работе выполнена оценка параметров логит-модели дискретного выбора.

У потенциальных нарушителей границы с экономическими мотивами имеется две альтернативы: остаться в стране проживания ($i = 0$) и получать доход в размере u_0 (полезность законной деятельности) или пересечь границу США, став нелегальным мигрантом ($i = 1$), и получать доход в размере u_1 (за вычетом издержек, связанных с пересечением границы и др.). Вероятность выбора альтернатив равна [Wein, Liu, Motskin, 2009]

$$s_i = \frac{e^{\lambda u_i}}{e^{\lambda u_0} + e^{\lambda u_1}}. \tag{28}$$

Для нелегальных мигрантов получена следующая оценка значения параметра логит-модели: $\lambda \approx 6{,}83 \cdot 10^{-5}$ 1/\$. Найденному значению параметра λ трудно дать содержательную трактовку. Преобразуем выражение (28), введя безразмерный параметр $\theta = \lambda u_1$:

$$s_i = \frac{e^{\theta u_i/u_1}}{e^{\theta u_0/u_1} + e^{\theta}}. \tag{29}$$

Из результатов расчетов [Wein, Liu, Motskin, 2009] находим $\theta \approx 2{,}7$. Содержательно параметр θ можно трактовать как степень знания нарушителями системы охраны границы и, как следствие, ожидаемого дохода от незаконной деятельности. За счет преобразования выражения (28) мы внесли систематическую ошибку в вычисления при значениях u_1, близких к нулю (много меньших u_0), и малых значениях θ.

Малоисследованным остается вопрос об оценке вероятностей выбора альтернатив для нарушителей с неэкономическими мотивами (террористы, диверсанты и т. д.), для которых не применяется модель Г. Беккера экономической преступности. Рассуждая о неэкономических субъектах, мы должны учитывать, что цели (вокруг которых и построена концепция рациональности) вторичны и подчинены ценностям [Пригожин, 2010].

Один из первых, кто смог дать количественную оценку влияния ценностей на человеческое поведение, — это основоположник моделирования боевых действий М. П. Осипов. По результатам исследования крупнейших битв за столетний период им был сделан вывод: «победа зависит не от продолжительности боя, а главным образом от понесенных сторонами потерь; поэтому вернее будет считать, что бой длится до тех пор, пока потери одной из сторон не достигнут некоторого определенного процента. Таким процентом в среднем можно считать 20 %. . . » [Осипов, 1915].

В последующем на основе данных военной статистики было установлено: во-первых, потери первого эшелона наступающей дивизии в 20–30 % приводят к временной утрате боевой способности; во-вторых, обороняющиеся дивизии могут сохранять боеспособность при потерях до 40–60 % [Цыгичко, 2005].

Руководствуясь ценностями и только ими, индивид способен к самопожертвованию, к риску для жизни и здоровья, если он понимает, что его поступок, во-первых, имеет значительные шансы на успех, во-вторых, принесет пользу окружающим (товарищам, социальной группе, подразделению, стране и т. д.), см., например, раздел «Драма, переживаемая бойцом — борьба двух стремлений: “победить” и “уклониться от опасности”» в книге [Головин, 1938].

У субъекта с неэкономическими мотивами возникает проблема морального выбора (боевые действия, террористические атаки, борьба с терроризмом и т. д.) при наличии хотя бы двух альтернатив. Пусть A_1 — это альтернатива, связанная с выполнением морального долга, A_0 —

это альтернатива, связанная с отказом от его выполнения. Пусть π_1 есть вероятность достижения альтернативы A_1, а π_0 — пороговая вероятность, обусловленная, например, высокими издержками и действиями противника (правоохранительных структур). Для таких субъектов в работе [Шумов, 2014] предложено использовать вместо функции полезности непрерывную возрастающую функцию представления о вероятности $B(p)$: $[0, 1] \to [0, 1]$. В отсутствие целенаправленных социально-информационных воздействий эта функция совпадает с вероятностью $B(p) = p$ (гипотеза рациональности: когнитивные возможности индивида позволяют ему в отсутствие временных и ресурсных ограничений получить представление о значении показателя, совпадающее с объективным значением этого показателя).

Субъект, обычно не обладая всей информацией о рисках и издержках, вынужден полагаться на мнения окружающих, командиров, руководителей, тем самым сравнивая представления о вероятностях $B(\pi_1)$ и $B(\pi_0)$. Второе представление $B(\pi_0)$ зачастую имеет субъективный характер в том смысле, что сама вероятность π_0 субъективна и отражает индивидуальные особенности, которые известны только в среднем. Исходя из данных военной статистики, можно предположить, что $\pi_0 = 0{,}4$–$0{,}6$. Тогда в модели (29) вместо u_0 следует использовать $B(\pi_0)$, а вместо u_1 — представление $B(\pi_1)$.

В качестве недостатка модели (28) отметим тот факт, что свойства альтернатив представлены скаляром, а не вектором. Субъект, выбирая альтернативы, может учитывать как экономические выгоды и издержки, так и риски для здоровья, затраты времени и т. д.

Большинство работ в области охраны границы посвящены оптимальному применению имеющихся пограничных сил и средств (табл. 3).

Таблица 3. Некоторые работы в области моделирования охраны границы и исключительной экономической зоны

Работы	Их краткая характеристика
«Defending critical infrastructure» [Brown et al., 2006]	Расширение иерархической модели «защитник – атакующий» до трех уровней (защитник – атакующий – защитник) и ее иллюстрация на примерах защиты от террористических атак критической инфраструктуры и пограничного патрулирования
«PROTECT: a deployed game theoretic system to protect the ports of the United States» [Shieh et al., 2012]	Теоретико-игровая модель (игра безопасности Штакельберга с ограниченной рациональностью игроков), предназначенная для планирования патрулирования катерами береговой охраны США в интересах обеспечения безопасности побережий, портов и внутренних водных путей
«Analytic model of border control» [Schilling, 1970], «Border security: a conceptual model of complexity» [Stein, 2013]	Применение методов системной динамики (дифференциальных уравнений) для описания процессов защиты и охраны границы
«Robust protection of fisheries with COmPASS» [Haskell et al., 2014], «When security games go green: designing defender strategies to prevent poaching and illegal fishing» [Fang, Stone, Tambe, 2015]	Применение игры безопасности Штакельберга в интересах охраны морских биоресурсов береговой охраной США
«Patrolling a border» [Papadaki et al., 2016]	Рассмотрена игра патрулирования границы на линейном графе с дискретным временем, с одним патрулем и одним атакующим
«A reinforcement learning approach to tackle illegal, unreported and unregulated fishing» [Akinbulire et al., 2017]	Применение машинного обучения (Reinforcement Learning — обучение с подкреплением) для решения игры «преследователь – убегающий» в интересах борьбы с незаконным, несообщаемым и нерегулируемым промыслом в исключительной экономической зоне

Таблица 3 (окончание)

Работы	Их краткая характеристика
«Building real Stackelberg security games for border patrols» [Bucarey et al., 2017]	Применение игры безопасности Штакельберга для планирования расписаний несения службы пограничниками Чили в ночное время
«Моделирование миграции населения в задачах обеспечения безопасности государства» [Шумов, 2017]	На основе анализа законов миграции и факторов, влияющих на ее интенсивность, предложено расширение гравитационной модели миграции. Сформулировано правило выбора мигрантами страны назначения. Оценены параметры модели
«Модель обоснования направлений сосредоточения усилий пограничной охраны на уровне государства» [Шумов, 2019]	Определена целевая функция пограничной охраны — суммарный предотвращенный ущерб от задержанных нарушителей с учетом их ожидаемой опасности для государства и общества, подлежащий максимизации. С использованием условия Слейтера найдено решение задачи — вычислены оптимальные плотности пограничной охраны по регионам государства. При наличии модели распределения ресурсов на примере трех пограничных регионов США решена и обратная задача — оценены угрозы в регионах по известному распределению ресурсов
«Optimization of base location and patrol routes for unmanned aerial vehicles in border intelligence, surveillance and reconnaissance» [Liu et al., 2019], «A multi-UAV deployment method for border patrolling based on Stackelberg game» [Lei et al., 2023]	Исследована проблема совместной оптимизации местоположений базовых станций БПЛА и их маршрутов полета на китайско-вьетнамской границе (решается задача двоично-целочисленного программирования с применением эвристик). Во второй статье рассмотрена игра безопасности Штакельберга
«Resources package modelling supporting border surveillance operations» [Cardoso, Abrahão, Saba, 2021]	В интересах совершенствования охраны границы Бразилии решается задача максимизации суммарного времени патрулирования важных участков границы при ограничениях на ресурсы (количества баз дислокации и пограничных патрулей) и время несения службы

Многие из моделей охраны границы и обеспечения пограничной безопасности реализованы в виде программного обеспечения и используются в служебной деятельности.

Опишем технологию внедрения математических моделей на примере работ [Shieh et al., 2012; An et al., 2013] и с точки зрения пользователя (подразделения береговой охраны). Математическая модель разрабатывалась университетскими исследователями по заказу береговой охраны США. Предварительно консалтинговая компания обследовала территорию морского порта и присвоила каждому объекту соответствующее значение его ценности (с учетом возможных экономических и людских потерь в случае успешной террористической атаки).

Регулярное общение разработчиков с представителями заказчика (руководителями, планировщиками и операторами) позволило переосмыслить постановку задачи на разработку модели и существующие способы действий подразделений береговой охраны.

В основу модели охраны порта положена игра безопасности Штакельберга. Атакующий наблюдает за смешанными стратегиями охраны и затем выбирает для атаки один из объектов порта.

Для генерации стратегий патрулирования построен граф (V, E), где вершины V — это районы патрулирования, а ребра E — маршруты. Причем маршрут патрулирования должен завершаться в начальной вершине, где началось патрулирование. Пример расписания патрулирования и игровой матрицы представлен в табл. 4 (строки — стратегии защитника, столбцы — стратегии атакующего).

Таблица 4. Пример расписания патрулирования и игровой матрицы

Расписание патруля	Объект 1	Объект 2	Объект 3	Объект 4
$(1 : k_1)$, $(2 : k_1)$, $(1 : k_1)$	50, −50	30, −30	15, −15	−20, 20
$(1 : k_2)$, $(2 : k_1)$, $(1 : k_1)$	100, −100	60, −60	15, −15	−20, 20
$(1 : k_1)$, $(2 : k_1)$, $(1 : k_2)$	100, −100	60, −60	15, −15	−20, 20
$(1 : k_2)$, $(2 : k_1)$, $(1 : k_2)$	100, −100	60, −60	15, −15	−20, 20
$(1 : k_1)$, $(3 : k_1)$, $(2 : k_1)$, $(1 : k_1)$	50, −50	30, −30	15, −15	10, −10
$(1 : k_1)$, $(2 : k_1)$, $(3 : k_1)$, $(1 : k_1)$	50, −50	30, −30	15, −15	10, −10

Элементы расписания $(v : s)$, где v — номер района патрулирования, s — способ патрулирования. У защитника в каждом районе возможны два способа (k_1 и k_2), причем действие k_2 обеспечивает более высокую защиту объектов в районе (это может быть неподвижный некоторое время дозор и т. д.). В столбцах 2–4 таблицы записаны выигрыши защитника и атакующего.

Введем следующие обозначения:

R_i^d — выигрыш защитника, если i-й объект атакован и он входит в расписание патрулирования;

P_i^d — штраф защитника, если i-й объект атакован и он не входит в расписание патрулирования;

R_i^a — выигрыш атакующего, если им i-й объект атакован и он не входит в расписание патрулирования;

P_i^a — штраф атакующего, если им i-й объект атакован и он входит в расписание патрулирования;

$0 \leqslant A_{ij} \leqslant 1$ — степень прикрытия i-го объекта при j-й стратегии защитника;

α_i — вероятность выбора j-й стратегии защитником.

Элементы матрицы платежей в рассматриваемой теоретико-игровой модели вычисляются по формуле

$$G_{ij}^d = A_{ij} R_i^d + (1 - A_{ij}) P_i^d. \tag{30}$$

Например, первый объект прикрывается способом патрулирования k_1 в 5-м расписании и $A_{15} = 0{,}5$. Если $R_1^d = 150$ и $P_1^d = -50$, то $G_{15}^d = 50$. Для атакующего элементы матрицы G_{15}^a вычисляются аналогично.

В рассматриваемой игре количество стратегий велико, поэтому используются так называемые компактные стратегии защитника, получаемые в результате объединения эквивалентных расписаний и удаления из них доминируемых. По умолчанию полагается, что маршрут патрулирования завершается в начальной зоне. В таблице 5 показаны компактные стратегии после объединения эквивалентных расписаний.

Таблица 5. Пример компактного расписания патрулирования

Компактные стратегии	Объект 1	Объект 2	Объект 3	Объект 4
$\Gamma_1 = \{(1 : k_1), (2 : k_1)\}$	50, −50	30, −30	15, −15	−20, 20
$\Gamma_2 = \{(1 : k_2), (2 : k_1)\}$	100, −100	60, −60	15, −15	−20, 20
$\Gamma_3 = \{(1 : k_1), (2 : k_1), (3 : k_1)\}$	50, −50	30, −30	15, −15	10, −10

Далее сравниваем стратегии Γ_1 и Γ_2. Замечаем, что для любого объекта выигрыш защитника в стратегии Γ_2 больше или равен его выигрышу в стратегии Γ_1. Иными словами, стратегия Γ_2 доминирует стратегию Γ_1. Следовательно, стратегию Γ_1 исключаем из набора стратегий.

Противник (атакующий) полагается ограниченно рациональным и выбирает для атаки i-й объект с вероятностью

$$q_i = \frac{e^{\lambda G_i^a(x_i)}}{\sum\limits_{j=1}^{T} e^{\lambda G_j^a(x_i)}}, \tag{31}$$

где $\lambda \geqslant 0$ — параметр стандартной логит-модели; T — количество охраняемых объектов; $G_i^a(x_i)$ — выигрыш противника от атаки i-го объекта; x_i — вероятность прикрытия i-го объекта защитником. При $\lambda = 0$ атакующий не ведет наблюдение за системой охраны объектов и с равной вероятностью выбирает любой из них, при $\lambda \to \infty$ у атакующего имеется полное знание действий защитника.

Для нахождения оптимальных стратегий используется равновесие дискретного отклика, т. е. решается следующая задача:

$$\begin{gathered} \max_{x,\alpha} \frac{\sum\limits_{i=1}^{T} e^{\lambda R_i^a} e^{-\lambda\left(R_i^a - P_i^a\right)x_i} \left[\left(R_i^d - P_i^d\right) x_i + P_i^d\right]}{\sum\limits_{i=1}^{T} e^{\lambda R_i^a} e^{-\lambda\left(R_i^a - P_i^a\right)x_i}}, \\ \sum_{j=1}^{T} \alpha_j = 1, \quad 0 \leqslant \alpha_j \leqslant 1, \quad x_i = \sum_{j=1}^{T} \alpha_j A_{ij}, \quad \forall i. \end{gathered} \tag{32}$$

С помощью прикладной программы (установленной на отдельном компьютере, не подключенном в целях безопасности ни к какой сети) выполняется расчет смешанных стратегий и формируется расписание патрулирования в форме, удобной для конечных пользователей (табл. 6).

Таблица 6. Пример расписания патрулирования, формируемого в подразделении береговой охраны для одного патруля

День	Время	Маршрут патрулирования
1	15:00	$(1:A)$, $(5:C)$, $(6:A)$, $(8:A)$, $(9:B)$, $(8:B)$, $(6:A)$, $(5:A)$, $(1:A)$
2	3:00	$(1:A)$, $(5:A)$, $(6:A)$, $(8:A)$, $(9:A)$, $(8:A)$, $(6:A)$, $(5:C)$, $(1:A)$, $(2:A)$, $(1:A)$
3	17:00	$(1:A)$, $(2:C)$, $(4:B)$, $(2:A)$, $(1:B)$, $(2:B)$, $(1:A)$
4	16:00	$(1:A)$, $(2:B)$, $(4:B)$, $(2:A)$, $(1:B)$
5	18:00	$(1:A)$, $(5:A)$, $(6:A)$, $(8:A)$, $(9:B)$, $(8:A)$, $(6:A)$, $(5:B)$, $(1:A)$

Во 2-м столбце таблицы указано время начала патрулирования, в 3-м — подробный маршрут патрулирования (зона и способ).

В целях тестирования программы береговая охрана сформировала специальную группу имитации действий атакующего, которая пыталась проникнуть на охраняемые объекты морского порта в г. Бостоне до и после развертывания компьютерной программы. Результаты тестирования показали повышение эффективности применения подразделений береговой охраны.

Многие страны сталкиваются с проблемой нелегальной миграции. По оценкам, более 10 млн нелегальных мигрантов проживают в США, около 1 млн — в Великобритании, около 3 млн — в странах Европейского Союза [Yazar, Gitter, 2023]. В. Этьер в своей модели рассмотрел возможность наложения штрафов на работодателей, нанимающих нелегальных мигрантов. Эта мера в сочетании с усилением охраны границ приводит к значительному сокращению нелегальной миграции [Ethier, 1986].

Ж. Язар и Р. Гиттер предложили следующую формулировку теоретико-игровой модели миграции [Yazar, Gitter, 2023].

Пусть существует две страны: источник и потребитель нелегальных мигрантов. Считается, что мигрирующие работники являются относительно малоквалифицированными. Полагается, что в стране назначения существует высокий спрос на неквалифицированную рабочую силу и более высокий уровень оплаты труда, чем в стране-источнике. Рассматриваются следующие игроки:

- фирмы страны назначения, стремящиеся к увеличению нелегальной миграции для сохранения низкой зарплаты и имеющие возможности для лоббирования своих интересов;
- работники страны назначения, стремящиеся к сокращению нелегальной миграции для поддержки своих относительно высоких зарплат;
- парламент страны назначения, стремящийся уравновесить желания фирм в интересах своих избирателей;
- семьи страны-источника, распределяющие свои ресурсы между работой дома или в стране назначения и сталкивающиеся с рисками быть задержанными при пересечении границы.

Авторами [Yazar, Gitter, 2023] найдены равновесия игры (Нэша и Байеса–Нэша) и отмечен недостаток модели — сосредоточенность только на экономических аспектах нелегальной миграции.

Вышеприведенный краткий обзор работ в области моделирования пограничной безопасности показывает необходимость учета в комплексных моделях безопасности и обороноспособности вопросов, связанных с защитой и охраной государственной границы.

7. Заключение

Таким образом, нами рассмотрены два основных класса моделей специальных действий и борьбы с терроризмом: описательные (построены с использованием методов теории вероятностей, теории графов, статистической термодинамики, криминологии и др.) и нормативные (теоретико-игровые). Нормативные модели позволяют находить оптимальные решения на распределение имеющихся сил и средств обеспечения безопасности по задачам, направлениям и времени.

Перспективными направлениями моделирования специальных действий и борьбы с терроризмом являются следующие: во-первых, моделирование контртеррористических, специальных и пограничных операций по нейтрализации террористических и диверсионных групп с привлечением разноведомственных и разнородных сил и средств; во-вторых, комплексирование моделей по уровням и этапам циклов деятельности; в-третьих, разработка теоретико-игровых моделей борьбы с морским терроризмом и пиратством.

Автор выражает признательность рецензентам за содержательные замечания, все недостатки работы относит на свой счет.

Список литературы (References)

Басаева Е. К., Каменецкий Е. С., Хосаева З. Х. Прогнозирование социально-политической нестабильности (на примере Арабской весны) // Социологические исследования. — 2022. — № 10. — С. 96–106.

Basaeva E. K., Kameneckij E. S., Hosaeva Z. H. Prognozirovanie social’no-politicheskoj nestabil’nosti (na primere Arabskoj vesny) [Forecasting socio-political instability (Arab Spring case study)] // Sotsiologicheskie issledovaniia. — 2022. — No. 10. — P. 96–106 (in Russian).

Головин Н. Н. Наука о войне. О социологическом изучении войны. — Париж: издательство газеты «Сигнал», 1938. — 241 с.

Golovin N. N. Nauka o vojne. O sociologicheskom izuchenii vojny [The science of war. On the sociological study of war]. — Parizh: izdatel’stvo gazety “Signal”, 1938. — 241 p. (in Russian).

Губко М. В. Задачи управления организационными системами с сетевым взаимодействием участников // Автоматика и телемеханика. — 2004. — № 8. — С. 102–129.

Gubko M. V. Zadachi upravleniya organizacionnymi sistemami s setevym vzaimodejstviem uchastnikov [Management tasks of organizational systems with network interaction of participants] // Automation and Remote Control. — 2004. — No. 8. — P. 102–129 (in Russian).

Гусев В. В. Векторы Шепли, Оуэна и Ауманна – Дрезе в игре патрулирования с коалиционной структурой // Математическая теория игр и ее приложения. — 2016. — Т. 8, вып. 4. — С. 30–42.

Gusev V. V. Vektory Shepli, Ouena i Aumanna – Dreze v igre patrulirovaniya s koalicionnoj strukturoj [The vectors of Shapley, Owen, and the Aumann – Dreze in the game patrolling with coalition structure] // Matematicheskaya teoriya igr i ee prilozheniya. — 2016. — Vol. 8, vyp. 4. — P. 30–42 (in Russian).

Гусев В. В., Мазалов В. В. Оптимальные стратегии в игре патрулирования на графе // Вестник СПбГУ. Сер. 10. — 2015. — Вып. 2. — С. 61–76.

Gusev V. V., Mazalov V. V. Optimal'nye strategii v igre patrulirovaniya na grafe [Optimal strategies in the patrolling game on the graph] // Vestnik SPbGU. Ser. 10. — 2015. — Vyp. 2. — P. 61–76 (in Russian).

Евин И. А. Введение в теорию сложных сетей // Компьютерные исследования и моделирование. — 2010. — Т. 2, № 2. — С. 121–141.

Evin I. A. Vvedenie v teoriyu slozhnyh setej [Introduction to the theory of complex networks] // Computer Research and Modeling. — 2010. — Vol. 2, No. 2. — P. 121–141 (in Russian).

Егорова Л. Г., Климюк И. Ю. Применение процессов Хоукса для прогнозирования финансовых рисков: препринт WP7/2017/02. — М.: ВШЭ, 2017. — 36 с.

Egorova L. G., Klimyuk I. Yu. Primenenie processov Houksa dlya prognozirovaniya finansovyh riskov [Application of Hawkes processes to financial risk forecasting]: preprint WP7/2017/02. — Moscow: VSHE, 2017. — 36 p. (in Russian).

Каменецкий Е. С., Басаева Е. К. Об одном методе предсказания нерегулярной смены власти // Вопросы безопасности. — 2019. — № 6. — С. 38–47.

Kameneckij E. S., Basaeva E. K. Ob odnom metode predskazaniya neregulyarnoj smeny vlasti [On one method for predicting irregular power changes] // Voprosy bezopasnosti. — 2019. — No. 6. — P. 38–47 (in Russian).

Лефевр В. А. Алгебра совести. — М.: Когито-центр, 2003. — 426 с.

Lefevbre V. Algebra of conscience. — London: Springer, 2001. — 372 p. (Russ. ed.: *Lefevr V. A.* Algebra sovesti. — Moscow: Kogito-centr, 2003. — 426 p.)

Лефевр В. А. Конфликтующие структуры. — М.: Советское радио, 1973. — 158 с.

Lefebvre V. A. The structure of awareness: toward a symbolic language of human reflexion. — NY: Sage Publications, 1977. — 199 p. (Russ. ed.: *Lefevr V. A.* Konfliktuyushchie struktury. — Moscow: Sovetskoe radio, 1973. — 158 p.)

Новиков Д. А. В. А. Лефевр и теория игр: вызовы для мейнстрима // Рефлексивные процессы и управление. — 2016. — № 1–2. — С. 54–58.

Novikov D. A. V. A. Lefevr i teoriya igr: vyzovy dlya mejnstrima [V. A. Lefebvre and game theory: challenges for the mainstream] // Refleksivnye processy i upravlenie. — 2016. — No. 1–2. — P. 54–58 (in Russian).

Новиков Д. А. Игры и сети // Математическая теория игр и ее приложения. — 2010. — Т. 2, вып. 1. — С. 107–124.

Novikov D. A. Igry i seti [Games and networks] // Matematicheskaya teoriya igr i ee prilozheniya. — 2010. — Vol 2, vyp. 1. — P. 107–124 (in Russian).

Новиков Д. А. Иерархические модели военных действий // Управление большими системами. — 2012. — Вып. 37. — С. 25–62.

Novikov D. A. Ierarkhicheskie modeli voennykh deistvii [Hierarchical models of warfare] // Large-Scale Systems Control. — 2012. — Vyp. 37. — P. 25–62 (in Russian).

Новиков Д. А. Ограниченная рациональность и управление // Математическая теория игр и ее приложения. — 2022. — Т. 14, вып. 1. — С. 49–84.

Novikov D. A. Ogranichennaya racional'nost' i upravlenie [Bounded rationality and governance] // Matematicheskaya teoriya igr i ee prilozheniya. — 2022. — Vol. 14, vyp. 1. — P. 49–84 (in Russian).

Новиков Д. А., Чхартишвили А. Г. Рефлексивные игры. — М.: СИНТЕГ, 2003. — 149 с.

Novikov D. A., Chkhartishvili A. G. Refleksivnye igry [Reflection games]. — Moscow: SINTEG, 2003. — 149 p. (in Russian).

Новиков Д. А., Чхартишвили А. Г. Рефлексия и управление: математические модели. — М.: URSS, 2022. — 416 с.

Novikov D. A., Chkhartishvili A. G. Refleksiya i upravlenie: matematicheskie modeli [Reflexion and management: mathematical models]. — Moscow: URSS, 2022. — 416 p. (in Russian).

Осипов М. П. Влияние численности сражающихся сторон на их потери // Военный сборник. — 1915. — № 6. — С. 59–74; № 7. — С. 25–36; № 8. — С. 31–40; № 9. — С. 25–37.

Osipov M. P. Vliyanie chislennosti srazhayushchihsya storon na ih poteri [Influence of the number of fighting parties on their losses] // Voennyj sbornik. — 1915. — No. 6. — P. 59–74; No. 7. — P. 25–36; No. 8. — P. 31–40; No. 9. — P. 25–37 (in Russian).

Пригожин А. И. Качество целей // Общественные науки и современность. — 2010. — № 1. — С. 114–125.

Prigozhin A. I. Kachestvo celej [Quality of objectives] // Obshchestvennye nauki i sovremennost'. — 2010. — No. 1. — P. 114–125 (in Russian).

Речь Г. К. Жукова на военно-научной конференции, декабрь 1945 г. // Военная мысль. — 1985. — Специальный выпуск (февраль). — С. 3, 17–33.

Rech' G. K. Zhukova na voenno-nauchnoj konferencii, dekabr' 1945 g. [Speech by G. K. Zhukov at a military-scientific conference, December 1945] // Voennaya mysl'. — 1985. — Special'nyj vypusk (fevral'). — P. 3, 17–33 (in Russian).

Силы специальных операций (ССО). — [Электронный ресурс]. — https://encyclopedia.mil.ru/encyclopedia/dictionary/details_rvsn.htm?id=14234%40morfDictionary (дата обращения: 08.09.2024).

Sily special'nyh operacij (SSO) [Special operations forces (SDF)]. — [Electronic resource]. — https://encyclopedia.mil.ru/encyclopedia/dictionary/details_rvsn.htm?id=14234%40morfDictionary (accessed: 08.09.2024; in Russian).

Сущий С. Я., Угольницкий Г. А., Дьяченко В. К. Имитационное моделирование борьбы с экстремизмом на Северном Кавказе // Социология: методология, методы, математическое моделирование (Социология:4М). — 2013. — № 37. — С. 126–150.

Sushchij S. Ya., Ugol'nickij G. A., D'yachenko V. K. Imitacionnoe modelirovanie bor'by s ekstremizmom na Severnom Kavkaze [Simulation modeling of the fight against extremism in the North Caucasus] // Sociologiya: metodologiya, metody, matematicheskoe modelirovanie (Sociologiya:4M). — 2013. — No. 37. — P. 126–150 (in Russian).

Тарасевич Ю. Ю. Перколяция: теория, приложения, алгоритмы: учеб. пособие. — М.: Едиториал УРСС, 2002. — 112 с.

Tarasevich Yu. Yu. Perkolyaciya: teoriya, prilozheniya, algoritmy [Percolation: theory, applications, algorithms]: ucheb. posobie. — Moscow: Editorial URSS, 2002. — 112 p. (in Russian).

Теория оперативно-розыскной деятельности: учебник / под ред. К. К. Горяинова. — М.: ИНФРА-М, 2009. — 831 с.

Teoriya operativno-rozysknoj deyatel'nosti [Theory of operative-search activity]: uchebnik / pod red. K. K. Goryainova. — Moscow: INFRA-M, 2009. — 831 p. (in Russian).

Формы применения Вооруженных Сил Российской Федерации. — [Электронный ресурс]. — https://encyclopedia.mil.ru/encyclopedia/dictionary/details.htm?id=14014 (дата обращения: 08.09.2024).

Formy primeneniya Vooruzhennyh Sil Rossijskoj Federacii [Forms of application of the Armed Forces of the Russian Federation]. — [Electronic resource]. — https://encyclopedia.mil.ru/encyclopedia/dictionary/details.htm?id=14014 (accessed: 08.09.2024; in Russian).

Цыгичко В. Н. Модели в системе принятия военно-стратегических решений в СССР. — М.: Империум Пресс, 2005. — 96 с.

Cygichko V. N. Modeli v sisteme prinyatiya voenno-strategicheskih reshenij v SSSR [Models in the system of military-strategic decision-making in the USSR]. — Moscow: Imperium Press, 2005. — 96 p. (in Russian).

Шумов В. В. Закон поражения целей и функция победы в бою (сражении, операции) // Управление большими системами: сборник трудов. — 2024a. — Вып. 109. — С. 21–40.

Shumov V. V. Zakon porazheniya celej i funkciya pobedy v boyu (srazhenii, operacii) [The law of target engagement and the function of victory in combat (battle, operation)] // Large-Scale Systems Control. — 2024a. — Vyp. 109. — P. 21–40 (in Russian).

Шумов В. В. Модели и методики обоснования плотностей пограничных сил, обеспечивающих надежную охрану государственной границы // Управление большими системами: сборник трудов. — 2024b. — Вып. 108. — С. 57–77.

Shumov V. V. Modeli i metodiki obosnovaniya plotnostej pogranichnyh sil, obespechivayushchih nadezhnuyu ohranu gosudarstvennoj granicy [Models and methodologies for justifying border force densities that ensure reliable protection of the state border] // Large-Scale Systems Control. — 2024b. — Vyp. 108. — P. 57–77 (in Russian).

Шумов В. В. Модели противодействия терроризму: классификация // Труды института системного анализа РАН. — 2012. — Т. 62, № 4. — С. 106–115.

Shumov V. V. Modeli protivodejstviya terrorizmu: klassifikaciya [Models of counter-terrorism: classification] // Trudy instituta sistemnogo analiza RAN. — 2012. — Vol. 62, No. 4. — P. 106–115 (in Russian).

Шумов В. В. Моделирование миграции населения в задачах обеспечения безопасности государства // Управление большими системами. — 2017. — Вып. 65. — С. 153–169.

Shumov V. V. Modelirovanie migracii naseleniya v zadachah obespecheniya bezopasnosti gosudarstva [Modeling population migration in the tasks of ensuring state security] // Large-Scale Systems Control. — 2017. — Vyp. 65. — P. 153–169 (in Russian).

Шумов В. В. Модель обоснования направлений сосредоточения усилий пограничной охраны на уровне государства // Компьютерные исследования и моделирование. — 2019. — Т. 11, № 1. — С. 187–196.

Shumov V. V. Model obosnovaniya napravlenij sosredotocheniya usilij pogranichnoj ohrany na urovne gosudarstva [A model for justifying areas of focus for border protection at the state level] // Computer Research and Modeling. — 2019. — Vol. 11, No. 1. — P. 187–196 (in Russian).

Шумов В. В. Модель социального влияния и ее применение при анализе пограничной безопасности государства // Управление большими системами. — 2014. — Вып. 47. — С. 125–166.

Shumov V. V. Model’ social’nogo vliyaniya i ee primenenie pri analize pogranichnoj bezopasnosti gosudarstva [The social influence model and its application in analyzing state border security] // Large-Scale Systems Control. — 2014. — Vyp. 47. — P. 125–166 (in Russian).

Шумов В. В. Национальная безопасность: моделирование и прогнозирование. — М.: ЛЕНАНД, 2023. — 138 с.

Shumov V. V. Nacional’naya bezopasnost’: modelirovanie i prognozirovanie [National security: modeling and forecasting]. — Moscow: LENAND, 2023. — 138 p. (in Russian).

Шумов В. В. Учет морального фактора и технологических характеристик в моделях боя // Военная мысль. — 2020. — № 10. — С. 82–99.

Shumov V. V. Uchet moral’nogo faktora i tekhnologicheskih harakteristik v modelyah boya [Incorporating morale and technological characteristics into combat models] // Voennaya mysl’. — 2020. — No. 10. — P. 82–99 (in Russian).

Akinbulire T., Schwartz H., Falcon R., Abielmona R. A reinforcement learning approach to tackle illegal, unreported and unregulated fishing // IEEE Symposium on Computational Intelligence for Security and Defense Applications. — 2017. — P. 1–8.

Alpern S., Morton A., Papadaki K. Patrolling games // Operational Research. — 2011. — Vol. 59, No. 5. — P. 1246–1257.

An B., Ordóñez F., Tambe M., Shieh E., Yang R., Baldwin C., DiRenzo J., Moretti K., Maule B., Meyer G. A deployed quantal response-based patrol planning system for the U.S. Coast Guard // Interfaces. — 2013. — Vol. 43, No. 5. — P. 400–420.

Bakshi N., Pinker E. Public warnings in counterterrorism operations: Managing the “cry-wolf” effect when facing a strategic adversary // Operations Research. — 2018. — No. 66 (4). — P. 977–993.

Baron O., Berman O., Gavious A. A game between a terrorist and a passive defender // Production and Operations Management. — 2018. — No. 27 (3). — P. 433–457.

Brown G., Carlyle M., Salmerón J., Wood K. Defending critical infrastructure // Interfaces. — 2006. — Vol. 36, No. 6. — P. 530–544.

Brown M., An B., Kiekintveld C., Ordóñez F., Tambe M. An extended study on multi-objective security games // Auton. Agent Multi-Agent Syst. — 2014. — No. 28. — P. 31–71.

Bucarey V., Casorrán C., Figueroa Ó., Rosas K., Navarrete H., Ordóñez F. Building real stackelberg security games for border patrols // Decision and Game Theory for Security. — 2017. — P. 193–212.

Cardoso F. A., Abrahão F. T. M., Saba W. B. Resources package modelling supporting border surveillance operations // Defence Science Journal. — 2021. — Vol. 71, No. 3. — P. 410–417.

Casorran C., Fortz B., Labbé M., Ordóñez F. A study of general and security Stackelberg game formulations // European Journal of Operational Research. — 2019. — No. 278 (3). — P. 855–868.

Christensen K. Percolation theory. — London: Blackett Laboratory, 2002. — 39 p.

Chuang Y., D’Orsogna M. R. Mathematical models of radicalization and terrorism // arXiv preprint. — 2019. — arXiv:1903.08485

Cohen L. E., Felson M. Social change and crime rate trends: a routine activities approach // American Sociological Review. — 1979. — Vol. 44, No. 4. — P. 588–608.

Criminal profiling. International theory, research, and practice / Edited by R. Kocsis. — Humana Press, 2007. — 418 p.

Deitchman S. A Lanchester model of guerrilla war // Operational Research. — 1962. — No. 10. — P. 818–827.

Delle Fave F. M., Jiang A. X., Yin Z., Zhang C., Tambe M., Kraus S., Sullivan J. P. Game-theoretic security patrolling with dynamic execution uncertainty and a case study on a real transit system // Journal of Artificial Intelligence Research. — 2014. — No. 50. — P. 321–367.

Dighe N. S., Zhuang J., Bier V. M. Secrecy in defensive allocations as a strategy for achieving more cost-effective attacker detterrence // International Journal of Performability Engineering. — 2009. — No. 5 (1). — P. 31–43.

Ethier W. J. Illegal immigration: the host-country problem // American Economic Review. — 1986. — Vol. 76 (1). — P. 56–71.

Fan H., Lu J., Chang Z. A risk-based game theory model of navy and pirate behaviors // Ocean & Coastal Management. — 2022. — Vol. 225. — 106200.

Fang F., Stone P., Tambe M. When security games go green: designing defender strategies to prevent poaching and illegal fishing // International Joint Conference on Artificial Intelligence. — 2015. — P. 2589–2595.

Gutfraind A. Mathematical terrorism. — A Dissertation for the Degree of Doctor of Philosophy. — Cornell University, 2010. — 139 p.

Harsanyi J. C. Games with incomplete information played by Bayesian players, I–III. Part I. The basic model // Management science. — 1967. — Vol. 14, No. 3. — P. 159–182.

Haskell W., Kar D., Fang F., Tambe M., Cheung S., Denicola E. Robust protection of fisheries with COmPASS // Proceedings of the AAAI Conference on Artificial Intelligence. — 2014. – Vol. 28 (2). — P. 2978–2983.

Hunt K., Zhuang J. A review of attacker-defender games: Current state and paths forward // European Journal of Operational Research. — 2024. — No. 313. — P. 401–417.

Jain A. K., Satsrisakul Y., Fehling-Kaschek M., Häring I., van Rest J. Towards simulation of dynamic risk-based border crossing checkpoints // 30th European Safety and Reliability Conference (ESREL 2020). — 2020. — P. 4446–4452.

Johnson N. F., Restrepo E. M., Johnson D. E. Modeling human conflict and terrorism across geographic scales // Social Phenomena: from data analysis to models. — Springer, 2015. — P. 209–233.

Kar D., Nguyen T. H., Fang F., Brown M., Sinha A., Tambe M., Jiang A. X. Trends and applications in Stackelberg security games / Handbook of Dynamic Game Theory. — Springer, 2018. — P. 1223–1269.

Korzhyk D., Yin Z., Kiekintveld C., Conitzer V., Tambe M. Stackelberg vs. Nash in security games: an extended investigation of interchangeability, equivalence, and uniqueness // Journal of Artificial Intelligence Research. — 2011. — No. 41. — P. 297–327.

Kress M. Lanchester models for irregular warfare // Mathematics. — 2020. — No. 8 (5). — P. 737.

Labati R. D., Genovese A., Muñoz E., Piuri V., Scotti F., Sforza G. Biometric recognition in automated border control: a survey // ACM Computing Surveys. — 2016. — Vol. 49, Iss. 2, Article 24. — P. 1–39.

Lai K., Yanushkevich S. N., Shmerko V. P., Eastwood S. C. Bridging the gap between forensics and biometric-enabled watchlists for e-borders // IEEE Computational Intelligence Magazine. — 2017. — Vol. 12, No. 1. — P. 16–28.

Lei X., Hu X., Wang G., Luo H. A multi-UAV deployment method for border patrolling based on Stackelberg game // Journal of Systems Engineering and Electronics. — 2023. — Vol. 34, No. 1. — P. 99–116.

Leonard T., Lee E. K. US-Mexico border: building a smarter wall through strategic security measure allocation // Journal of Strategic Innovation and Sustainability. — 2020. — Vol. 15 (1). — P. 156–182.

Lin K. Y., Atkinson M. P., Chung T. H., Glazebrook K. D. A graph patrol problem with random attack times // Operations Research. — 2013. — Vol. 61, No. 3. — P. 694–710.

Liu Y., Liu Z., Shi J., Wu G., Chen C. Optimization of base location and patrol routes for unmanned aerial vehicles in border intelligence, surveillance and reconnaissance // Journal of Advanced Transportation. — 2019. — Article ID 9063232. — 13 p.

Major J. Advanced techniques for modeling terrorism risk // The Journal of Risk Finance. — 2002. — No. 4 (1). — P. 15–24.

Megahed A. El-M. A differential game related to terrorism: Stackelberg differential game of e-differentiable and e-convex function // European Journal of Pure and Applied Mathematics. — 2019. — No. 12 (2). — P. 654–667.

Memon N., Faley J. D., Hicks D. L. Mathematical methods in counterterrorism / Editors T. Rosenorn. — Wien: Springer-Verlag, 2009. — 389 p.

Papadaki K., Alpern S., Lidbetter T., Morton A. Patrolling a border // Operations Research. — 2016. — Vol. 64, No. 4. — P. 1256–1269.

Pita J., Jain M., Marecki J., Ordóñez F., Portway C., Tambe M., Western C., Paruchuri P., Kraus S. Deployed ARMOR protection: the application of a game theoretic model for security at the Los Angeles international airport // Proc. of 7th Int. Conf. on Autonomous Agents and Multiagent Systems. — 2008. — P. 125–132.

Rossmo D. K. Geographic profiling: target patterns of serial murderers. — PhD thesis. — Simon Fraser University, 1995. — 550 p.

Schilling G. F. Analytic model of border control. — Santa Monica: Rand, 1970. — 69 p.

Shakarian P., Dickerson J., Subrahmanian V. Adversarial geospatial abduction problems // ACM Transactions on Intelligent Systems and Technology. — 2012. — Vol. 3, No. 2. — P. 34:1–34:35.

Shieh E., An B., Yang R., Tambe M., Baldwin C., DiRenzo J., Maule B., Meyer G. PROTECT: a deployed game theoretic system to protect the ports of the United States // Proceedings of the 11th International Conference on Autonomous Agents and Multiagent Systems. — 2012. — Vol. 1. — P. 13–20.

Skaperdas S. Contest success functions // Economic Theory. — 1996. — No. 7. — P. 283–290.

Smah M. L. Mathematical model of terrorism: case study of Boko Haram // Int. J. Mathematical Modelling and Numerical Optimisation. — 2022. — Vol. 12, No. 1. — P. 88–112.

Stein T. N. Border security: a conceptual model of complexity. — Monterey, California: Naval Postgraduate School, 2013. — 135 p.

Tullock G. The welfare costs of tariffs, monopoly and theft // Western Economic Journal. — 1967. — No. 5. — P. 224–232.

Tutun S., Wang H., Liu Z., Yıldırım M. F., Khanmohammadi S. An agent based approach for understanding complex terrorism behaviors // Industrial and Systems Engineering Research Conference. — 2016. — 6 p.

Udwadia F., Leitmann G., Lambertini L. A dynamical model of terrorism // Discrete Dynamics in Nature and Society. — 2006. — Vol. 11. — P. 1–32.

Wein L. M., Liu Y., Motskin A. Analyzing the homeland security of the U.S.-Mexico border // Risk Analysis. — 2009. — Vol. 29, No. 5. — P. 699–713.

Willis H. H., Predd J. B., Davis P. K., Brown W. Measuring the effectiveness of border security between ports-of-entry. — Santa Monica, Calif.: RAND Corporation, 2011. — 68 p.

Wright P. D., Liberatore M. J., Nydick R. L. A survey of operations research models and applications in homeland security // Interfaces. — 2006. — Vol. 36, No. 6. — P. 514–529.

Wrzaczek S., Kaplan E. H., Caulkins J. P., Seidl A., Feichtinger G. Differential terror queue games // Dynamic Games and Applications. — 2017. — Vol. 7, No. 4. — P. 578–593.

Yazar J., Gitter R. J. Border games: a game theoretic model of undocumented immigration // Games. — 2023. — Vol. 14, No. 5. — P. 1–58.

Zhang X., Ding S., Ge B., Xia B., Pedrycz W. Resource allocation among multiple targets for a defender-attacker game with false targets consideration // Reliability Engineering & System Safety. — 2021. — Vol. 211, No. 11. — 107617.

Zhuang J., Bier V. M. Balancing terrorism and natural disasters — Defensive strategy with endogenous attacker effort // Operations Research. — 2007. — Vol. 55, No. 5. — P. 976–991.

Zhuang J., Bier V. M., Alagoz O. Modeling secrecy and deception in a multiple-period attacker – defender signaling game // European Journal of Operational Research. — 2010. — Vol. 203, No. 2. — P. 409–418.