

УДК: 532.5.011

## Странный репеллер в динамике эллиптического профиля с присоединенным вихрем в идеальной жидкости

А. А. Килин<sup>а</sup>, Е. М. Артемова<sup>б</sup>, А. М. Гаврилова<sup>с</sup>

Уральский математический центр, Удмуртский государственный университет,  
Россия, 426034, г. Ижевск, ул. Университетская, д. 1

E-mail: <sup>а</sup> kilin@rcd.ru, <sup>б</sup> artemova@rcd.ru, <sup>с</sup> ann.gavrilova5@mail.ru

Получено 14.11.2025, после доработки — 09.12.2022.

Принято к публикации 09.12.2025.

В данной работе рассматривается задача о плоскопараллельном движении эллиптического профиля с присоединенным точечным вихрем постоянной интенсивности в идеальной жидкости. Положение вихря относительно профиля считается неизменным во время движения. Течение жидкости вне тела считается потенциальным (за исключением особенности, соответствующей точечному вихрю), а обтекание тела является безциркуляционным. Рассмотрен случай общего положения, когда точечный вихрь не лежит на продолжениях полуосей эллипса. Рассматриваемая задача описывается системой шести дифференциальных уравнений первого порядка. После редукции по группе движений плоскости  $E(2)$  она сводится к системе трех дифференциальных уравнений. В работе исследуется данная редуцированная система. Показано, что эта система допускает от одной до пяти неподвижных точек, которым соответствуют движения эллипса по разным окружностям. Основываясь на численных исследованиях фазового потока приведенной системы вблизи неподвижных точек, показано, что рассматриваемая система в общем случае не допускает инвариантной меры с гладкой положительно определенной плотностью. Найдены значения параметров, при которых одна из неподвижных точек редуцированной системы является неустойчивым узлофокусом. Показано, что при продолжении по параметрам из неустойчивой неподвижной точки через бифуркацию Андронова–Хопфа может родиться неустойчивый предельный цикл. В работе исследованы бифуркации данного предельного цикла при изменении положения точечного вихря относительно эллипса. С помощью построения параметрической бифуркационной диаграммы показано, что при изменении параметров системы предельный цикл претерпевает каскад бифуркаций удвоения периода, в результате которого рождается хаотический репеллер (аттрактор в обратном времени). Для численного анализа задачи использовался метод построения двумерного отображения Пуанкаре. Для поиска и анализа простых и странных репеллеров исследование проводилось в обратном времени.

Ключевые слова: идеальная жидкость, эллиптический профиль, точечный вихрь, хаос, странный аттрактор

Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки России (FEWS-2024-0007).

UDC: 532.5.011

## Strange repeller in the dynamics of an elliptical foil with an attached vortex in an ideal fluid

A. A. Kilin<sup>a</sup>, E. M. Artemova<sup>b</sup>, A. M. Gavrilova<sup>c</sup>

Ural Mathematical Center, Udmurt State University,  
1 Universitetskaya st., Izhevsk, 426034, Russia

E-mail: <sup>a</sup> kilin@rcd.ru, <sup>b</sup> artemova@rcd.ru, <sup>c</sup> ann.gavrilova5@mail.ru

*Received 14.11.2025, after completion — 09.12.2022.*

*Accepted for publication 09.12.2025.*

This paper addresses the problem of the plane-parallel motion of an elliptic foil with an attached point vortex of constant strength in an ideal fluid. It is assumed that the position of the vortex relative to the foil remains unchanged during motion. The flow of the fluid outside the body is assumed to be potential (except for the singularity corresponding to a point vortex), and the flow around the body is noncirculatory. Special attention is given to the general position case in which the point vortex does not lie on the continuations of the semiaxes of the ellipse. The problem under consideration is described by a system of six first-order differential equations. After reduction by the motion group of the plane  $E(2)$  it reduces to a system of three differential equations. An analysis of this reduced system is made. It is shown that this system admits one to five fixed points which correspond to motions of the ellipse in various circles. By numerically investigating the phase flow of the reduced system near fixed points, it is shown that, in the general case, the system admits no invariant measure with a smooth positive definite density. Parameter values are found for which one of the fixed points of the reduced system is an unstable node-focus. It is shown that, as the variation of the parameters is continued, an unstable limit cycle can arise from an unstable fixed point via an Andronov–Hopf bifurcation. An analysis is made of bifurcations of this limit cycle for the case where the position of the point vortex relative to the ellipse changes. By constructing a parametric bifurcation diagram, it is shown that, as the system's parameters are varied, the limit cycle undergoes a cascade of period-doubling bifurcations, giving rise to a chaotic repeller (a reversed-time attractor). To carry out a numerical analysis of the problem, the method of constructing a two-dimensional Poincaré map is used. The search for and analysis of simple and strange repellers were performed backward in time.

**Keywords:** ideal fluid, elliptic foil, point vortex, chaos, strange attractor

**Citation:** *Computer Research and Modeling*, 2025, vol. 17, no. 6, pp. 1051–1067 (Russian).

This work was carried out within the framework of the state assignment of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (FEWS-2024-0007).

## Введение

Задача о движении твердого тела в жидкости является одной из классических задач гидродинамики. Уравнения движения твердого тела в идеальной несжимаемой жидкости были впервые получены Кирхгофом [Kirchhoff, 1876]. Достаточно большое количество классических и современных работ посвящено исследованию этих уравнений и различных их обобщений. Полный обзор этих работ можно найти, например, в [Borisov, Mamaev, 2018].

Одним из обобщений упомянутой задачи является задача о движении в жидкости твердого тела в присутствии точечных особенностей потока (вихрей, источников и других). Уравнения движения кругового профиля для случая одного вихря были получены в работе [Ramodanov, 2001]. Интегрируемость такой задачи была показана в работах [Kilin, 2001; Borisov, Mamaev, 2003]. В работах [Ramodanov, 2002; Shashikanth et al., 2002] исследовалось движение твердого тела и  $N$  точечных вихрей. Задача о движении неуровновешенного профиля и точечного вихря исследовалась в [Mamaev, Bizyaev, 2021].

Помимо вихрей, изучалось влияние точечных источников и вихреисточников на движение твердого тела. Например, в работе [Artemova, Vetchanin, 2022] рассмотрено движение неуровновешенного кругового профиля в присутствии неподвижного точечного источника, показана неинтегрируемость этой задачи. В работе [Artemova, Vetchanin, 2024] рассматривалось движение твердого тела с собственной циркуляцией в поле неподвижных источника, вихреисточника. В недавней работе [Artemova et al., 2025] были получены уравнения, описывающие движение эллиптического профиля в присутствии вихреисточника.

Еще одним близким направлением исследований является изучение управляемого движения твердого тела в идеальной жидкости без изменения формы тела. Такое движение реализуют с помощью механизмов, изменяющих распределение масс внутри тела. Исследование этой задачи в рамках модели идеальной жидкости началось с работ [Козлов, Рамоданов, 2001; Козлов, Рамоданов, 2002; Kozlov, Onishchenko, 2003]. В работах [Ветчанин, Килин, 2016; Vetchanin, Kilin, 2017] исследовалось управление водным роботом за счет подвижных внутренних масс и внутреннего ротора. Также отметим экспериментальные работы, посвященные самопродвижению тела в жидкости [Klekovkin et al., 2023; Pollard, Tallapragada, 2016; Tallapragada, 2015].

Уравнения движения, возникающие при рассмотрении управляемого движения тела в идеальной жидкости, могут становиться негамильтоновыми и допускать асимптотические режимы движения [Vetchanin, Mamaev, 2024; Borisov et al., 2020]. Например, в задаче об управляемом движении каплеобразного робота был найден странный аттрактор [Vetchanin, Mamaev, 2024]. Подобного рода решения (странные аттракторы) возникают не только в задачах о движении твердого тела в жидкости, но и при исследовании неголономных систем, описывающих движение таких систем, как шар, катящийся по плоскости, [Kazakov et al., 2016], roller-racer [Bizyaev, Mamaev, 2023] или движение твердого тела с неподвижной точкой с дополнительной неголономной связью (задача Суслова) [Bizyaev et al., 2015]. Отметим, что в последнем случае структура уравнений движения схожа с уравнениями движения твердого тела в жидкости (в двумерной постановке). Более того, интересно, что для феноменологического описания движения твердого тела в жидкости иногда также используют модели с неголономными связями [Tallapragada, 2015].

В данной работе мы продолжаем исследования, начатые в [Kilin et al., 2024], и рассматриваем движение эллиптического профиля с присоединенным вихрем. В первом разделе приведены уравнения, описывающие движение такой системы. В втором и третьем разделах исследуются частные решения, возникающие в рассматриваемой системе.

## 1. Математическая модель

Рассмотрим движение эллиптического профиля с большой ( $a$ ) и малой ( $b$ ) полуосями в идеальной несжимаемой жидкости (см. рис. 1, а). Будем считать, что с профилем связан вихрь постоянной интенсивности  $\Gamma$ , расположенный на некотором фиксированном расстоянии от него. Относительно рассматриваемой системы сделаем следующие допущения:

- 1°) движение жидкости потенциально, на бесконечности жидкость покоится;
- 2°) эллиптический профиль уравновешен, его движение бесциркуляционное.

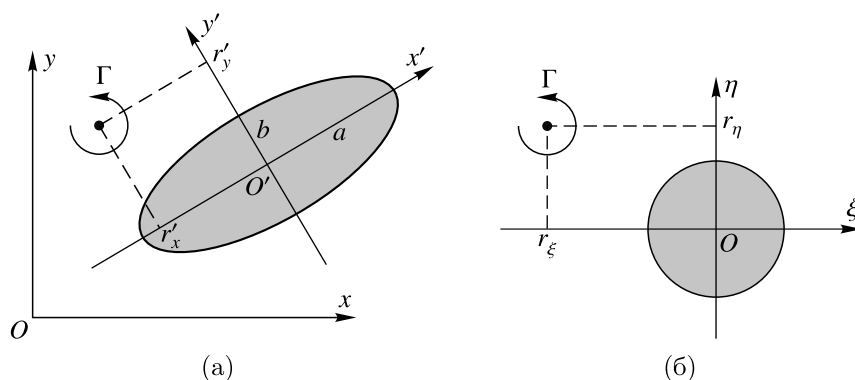


Рис. 1. Схематическое изображение (а) эллиптического и (б) кругового профилей с присоединенным вихрем

Для описания движения эллиптического профиля с присоединенным вихрем введем две системы координат: неподвижную  $Oxy$  и подвижную  $O'x'y'$ , жестко связанную с профилем, так что ее оси направлены вдоль полуосей эллипса (см. рис. 1, а).

Рассматриваемая система приводится в движение за счет силового воздействия со стороны жидкости. Для вычисления сил, действующих на эллиптический профиль, воспользуемся преобразованием Жуковского:

$$z' = \frac{1}{2} \left( \zeta + \frac{c}{\zeta} \right), \quad (1)$$

где  $c = a^2 - b^2$ . Это преобразование отображает точки системы координат  $O'x'y'$ , заданные комплексным числом  $z' = x' + iy'$  на вспомогательную комплексную плоскость  $\zeta = \xi + i\eta$  (см. рис. 1, б). С помощью такого преобразования перейдем от задачи о движении эллипса к задаче о движении кругового профиля радиусом  $R = a + b$ . При этом положения вихрей в системе с эллиптическим профилем ( $r'_x, r'_y$ ) и в системе с круговым профилем ( $r_\xi, r_\eta$ ) связаны соотношением

$$r'_x + ir'_y = \frac{1}{2} \left( r_\xi + ir_\eta + \frac{c}{r_\xi + ir_\eta} \right). \quad (2)$$

Дальнейшее вычисление сил и момента сил производится в плоскости  $\zeta$ , связанной с круговым профилем и присоединенным к нему вихрем, а затем переводятся обратно в систему координат  $O'x'y'$ . Подробный вывод сил и момента сил приведен в работе [Kilin et al., 2024]. В настоящей статье мы воспользуемся результатами работы [Kilin et al., 2024] и сразу приведем уравнения, описывающие изменение поступательной и угловой скоростей эллиптического

профиля:

$$\Lambda \dot{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} (m + \lambda_2)\omega u_2 \\ -(m + \lambda_1)\omega u_1 \\ -\rho \pi c u_1 u_2 \end{pmatrix} - \frac{\rho \Gamma R}{(c^2 - 2c\gamma_2 + \gamma_1^2)\gamma_1} \Lambda \mathbf{u} - \frac{\rho \Gamma^2}{\pi(R^2 - \gamma_1)(c^2 - 2c\gamma_2 + \gamma_1^2)} \mathbf{s}. \quad (3)$$

В уравнениях (3) используются следующие обозначения:

- $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \omega)^T$ , где  $(u_1, u_2)$  — проекции поступательной скорости центра масс эллипса, на оси подвижной системы координат  $O'x'y'$ ,  $\omega$  — угловая скорость эллипса;
- $\Lambda = \text{diag}(m + \lambda_1, m + \lambda_2, I + \lambda_3)$ , где  $m$  и  $I$  — масса и момент инерции эллипса,  $\lambda_1 = \rho \pi b^2$ ,  $\lambda_2 = \rho \pi a^2$  — коэффициенты присоединенных масс,  $\lambda_3 = \frac{\rho \pi c^2}{8}$  — коэффициент присоединенного момента инерции,  $\rho$  — плотность жидкости;
- $\gamma_1 = r_\xi^2 + r_\eta^2$ ,  $\gamma_2 = r_\xi^2 - r_\eta^2$ , где  $r_\xi, r_\eta$  — координаты присоединенного вихря на плоскости  $O\xi\eta$  (см. рис. 1, б);
- вспомогательные матрица  $\Lambda$  и вектор  $\mathbf{s}$  имеют следующий вид:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 4br_\xi r_\eta \gamma_1 & 2a(c - \gamma_2)\gamma_1 & r_\xi(a\gamma_1(c - \gamma_1) + bc(c + \gamma_1 - 2\gamma_2)) \\ 2b(c - \gamma_2)\gamma_1 & -4ar_\xi r_\eta \gamma_1 & r_\eta(ac(c - \gamma_1 - 2\gamma_2) - b\gamma_1(c + \gamma_1)) \\ a_{31} & a_{32} & \frac{cRr_\xi r_\eta(c^2 - 2c\gamma_2 - \gamma_1^2)}{\gamma_1} \end{pmatrix},$$

$$a_{31} = cr_\xi \left( cR + 2b(\gamma_1 - \gamma_2) - 2a\gamma_2 + \frac{\gamma_1^2}{R} \right), \quad a_{32} = cr_\eta \left( cR - 2a(\gamma_1 + \gamma_2) - 2b\gamma_2 - \frac{\gamma_1^2}{R} \right),$$

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} -2r_\xi R \left( b(c^3 - c^2(\gamma_1 + \gamma_2) + c(\gamma_2^2 - (\gamma_1 - \gamma_2)^2) - \gamma_1^2(\gamma_1 - \gamma_2)) + a(c - \gamma_2)(c - \gamma_1)^2 \right), \\ 2r_\eta R \left( a(c^3 + c^2(\gamma_1 - \gamma_2) + c(\gamma_2^2 - (\gamma_1 + \gamma_2)^2) + \gamma_1^2(\gamma_1 + \gamma_2)) + b(c - \gamma_2)(c + \gamma_1)^2 \right), \\ cr_\xi r_\eta \left( 2Rb(5c^2 - 6c\gamma_2 + \gamma_1^2) + 2c(\gamma_1 - \gamma_2)(3c - \gamma_1) + c^2(5c - 9\gamma_1) + \gamma_1^2(3c + \gamma_1) \right) \end{pmatrix}^T.$$

Для описания движения эллиптического профиля с вихрем в неподвижной системе координат уравнения (3) необходимо дополнить кинематическими соотношениями

$$\dot{x} = u_1 \cos \varphi - u_2 \sin \varphi, \quad \dot{y} = u_1 \sin \varphi + u_2 \cos \varphi, \quad \dot{\varphi} = \omega, \quad (4)$$

где  $x, y$  — координаты центра масс профиля в системе координат  $Oxy$ ,  $\varphi$  — угол поворота эллипса. Система уравнений (3), (4) полностью описывает движение рассматриваемой системы.

**ЗАМЕЧАНИЕ 1.** Полученные уравнения носят в некоторой степени формальный характер. Как мы увидим далее, они приводят к асимптотическим режимам движения профиля, что нетипично для модели идеальной жидкости. По-видимому, при рассмотрении задач о движении твердого тела с присоединенным вихрем более физической является модель точечных массовых вихрей [Рамоданов, 2006], так как за счет «присоединения» к телу вихри приобретают инерционные характеристики.

В работе [Kilin et al., 2024] было показано, что если вихрь располагается на продолжении одной из полуосей эллипса, то есть  $r'_x = 0$  или  $r'_y = 0$  (или, что то же самое,  $r_\xi = 0$ ,  $r_\eta = 0$ , см. рис. 1, а), то в системе возникают дополнительный первый интеграл и инвариантная мера и система является интегрируемой по Эйлера – Якоби. В [Kilin et al., 2024] был проведен полный качественный анализ интегрируемого случая уравнений движения (3).

В настоящей работе мы рассматриваем динамику системы при произвольном положении присоединенного вихря относительно эллипса, то есть  $r_\xi \neq 0$ ,  $r_\eta \neq 0$ .

**Упрощение системы.** Выполним замену  $\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{D}\mathbf{U}$ , где матрица  $\mathbf{D} = \text{diag}(d_1, d_2, d_3)$  выбрана таким образом, чтобы коэффициенты при квадратичных слагаемых в уравнениях (3) стали равны единице:

$$d_1 = \sqrt{\frac{m + \lambda_2}{\rho\pi c(m + \lambda_1)}}, \quad d_2 = \sqrt{\frac{m + \lambda_1}{\rho\pi c(m + \lambda_2)}}, \quad d_3 = \sqrt{\frac{\rho\pi c}{(m + \lambda_1)(m + \lambda_2)}}. \quad (5)$$

Тогда уравнения движения (3) в новых переменных  $\mathbf{U} = (U_1, U_2, \Omega)^T$  примут вид

$$\mathbf{L}\dot{\mathbf{U}} = \begin{pmatrix} U_2\Omega \\ -U_1\Omega \\ -U_1U_2 \end{pmatrix} - \mathbf{B}\mathbf{U} - \mathbf{k}, \quad (6)$$

$$\mathbf{B} = \frac{\rho\Gamma R}{(c^2 - 2c\gamma_2 + \gamma_1^2)\gamma_1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{D}, \quad \mathbf{k} = \frac{\rho\Gamma^2}{\pi(R^2 - \gamma_1)(c^2 - 2c\gamma_2 + \gamma_1^2)^2} \cdot \mathbf{s},$$

$$\mathbf{L} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{D} = \text{diag}\left(\mathcal{L}, \mathcal{L}, \frac{I + \lambda_3}{\mathcal{L}}\right), \quad \mathcal{L} = \sqrt{\frac{(m + \lambda_1)(m + \lambda_2)}{\rho\pi c}}.$$

Далее в системе (6) будем полагать  $\Gamma = 1$  и  $\rho = 1$ . Этого всегда можно добиться с помощью замены скоростей  $\mathbf{U} \rightarrow \Gamma\mathbf{U}$  и времени  $t \rightarrow \Gamma^{-1}t$ , а также массы  $m \rightarrow \rho m$  и момента инерции  $I \rightarrow \rho I$ .

Таким образом, в рассматриваемой системе остается шесть параметров:  $a, b, m, I, r_\xi$  и  $r_\eta$ . При этом на значения этих параметров существуют следующие геометрические ограничения:

$$a > b, \quad m > 0, \quad I < ma^2, \quad \gamma_1 = r_\xi^2 + r_\eta^2 > R^2.$$

**ЗАМЕЧАНИЕ 2.** Один из оставшихся шести параметров (например,  $b$ ) можно также приравнять к единице. Это соответствует выбору этого параметра в качестве единицы измерения расстояния. Таким образом, рассматриваемая система зависит от пяти независимых параметров.

Далее перейдем к изучению системы (6) и рассмотрим ее частные решения.

## 2. Частные решения

**Неподвижные точки.** Для нахождения неподвижных точек в уравнениях (6) приравняем производные по времени к нулю:  $\dot{\mathbf{U}} = 0$ . Из первых двух уравнений выразим компоненты скорости  $U_1$  и  $U_2$ , соответствующие неподвижной точке, через  $\Omega$ :

$$U_1 = \frac{-\Omega^2 b_{23} + (b_{12}b_{23} - b_{13}b_{22} - k_2)\Omega - b_{22}k_1 + b_{12}k_2}{\Omega^2 + (-b_{12} + b_{21})\Omega + b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}},$$

$$U_2 = \frac{\Omega^2 b_{13} + (-b_{11}b_{23} + b_{13}b_{21} + k_1)\Omega + b_{21}k_1 - b_{11}k_2}{\Omega^2 + (-b_{12} + b_{21})\Omega + b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}}.$$

Здесь  $b_{ij}$  — компоненты матрицы  $\mathbf{B}$ , а  $k_i$  — компоненты вектора  $\mathbf{k}$ . Подставив полученные выражения для  $U_1$  и  $U_2$  в последнее уравнение  $\dot{\Omega} = 0$ , получим

$$p_5\Omega^5 + p_4\Omega^4 + p_3\Omega^3 + p_2\Omega^2 + p_1\Omega + p_0 = 0, \quad (7)$$

где  $p_i$  — коэффициенты, зависящие от параметров системы (6) и имеющие громоздкий вид. Таким образом, в зависимости от значений параметров рассматриваемая система может иметь от одной до пяти неподвижных точек.



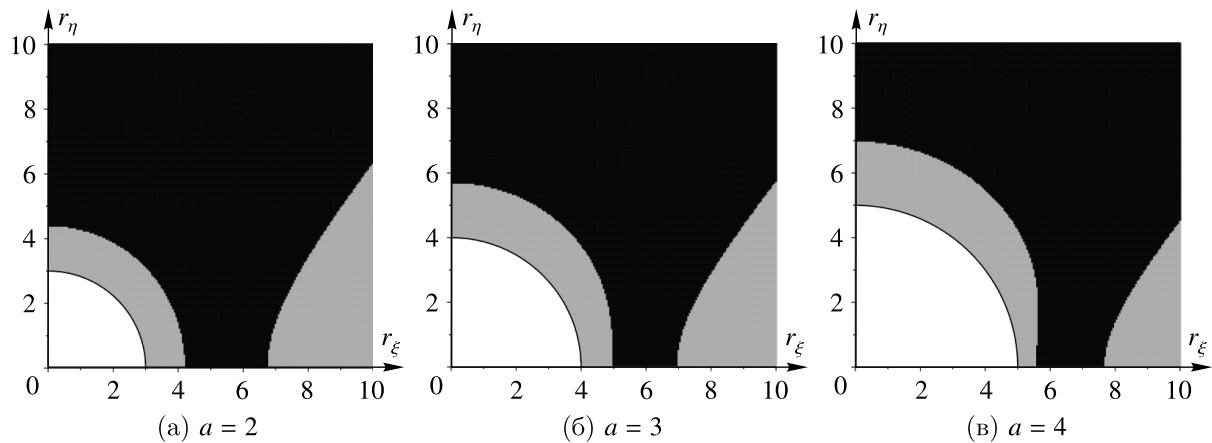


Рис. 2. Количество корней от значений  $(r_\xi, r_\eta)$  при (а)  $a = 2$ , (б)  $a = 3$ , (в)  $a = 4$ . Серая область соответствует тому, что уравнение (7) имеет три корня, черная — пять корней, белая — попадание вихря внутрь профиля (не рассматриваемые решения)

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Так как уравнение (7) всегда имеет хотя бы один вещественный корень, то с помощью сдвига по переменным  $U$  можно добиться обнуления вектора  $s$ . При этом соответствующая неподвижная точка системы (6) перейдет в точку  $(0, 0, 0)$ .

Как было указано выше, в зависимости от значений параметров системы уравнение (7) может иметь разное количество вещественных корней. На рис. 2 приведены области на плоскости параметров  $(r_\xi, r_\eta)$ , соответствующие разным количества решений уравнения (7) для разных значений  $a$  при

$$b = 1, \quad \rho = 1, \quad m = 1, \quad I = 1. \quad (8)$$

Здесь и далее в численных экспериментах мы будем использовать указанные значения параметров. Напомним, что параметры  $r_\xi, r_\eta$  определены на плоскости  $O\xi\eta$ , а их связь с  $r'_x, r'_y$  задается формулой (2). На рис. 2 серым цветом обозначены области параметров  $r_\xi, r_\eta$ , таких, что при этих параметрах уравнение (7) имеет три действительных корня, черным — пять корней, а белая область соответствует попаданию вихря внутрь профиля.

Далее мы остановимся на вопросе существования в рассматриваемой системе притягивающих (отталкивающих) множеств (аттракторов (репеллеров)) и изучении их бифуркаций. Начнем с самых простых притягивающих множеств — асимптотически устойчивых неподвижных точек.

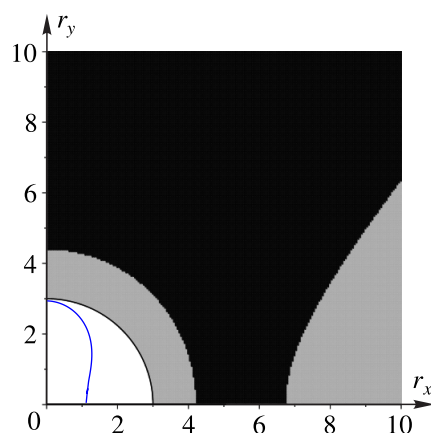
Существование аттракторов (или репеллеров) существенным образом связано со сжимаемостью фазового потока, которая определяется его дивергенцией. Из структуры уравнений (6) следует, что дивергенция фазового потока не зависит от фазовых переменных:

$$\operatorname{div} \dot{U} = -\operatorname{trace} (\mathbf{L}^{-1} \mathbf{B}).$$

Таким образом, при фиксированных параметрах системы дивергенция одинакова для всех точек фазового пространства, в том числе для неподвижных точек уравнений (6). Отсюда следует, что необходимым условием существования притягивающих неподвижных точек является выполнение неравенства

$$\operatorname{trace} (\mathbf{L}^{-1} \mathbf{B}) > 0.$$

Отметим, что это условие не является достаточным для существования притягивающих неподвижных точек. Кроме того, эта кривая может лежать вне области допустимых значений параметров. На рис. 3 синим цветом изображена кривая нулевой дивергенции на плоскости  $(r_\xi, r_\eta)$

Рис. 3. Кривая нулевой дивергенции системы (6) при  $a = 2$ 

при  $a = 2$ . Как видно на рисунке, эта кривая полностью лежит вне области допустимых значений параметров  $r_\xi, r_\eta$  ( $r_\xi^2 + r_\eta^2 > R^2$ ). Таким образом, при параметрах (8),  $a = 2$  и  $r_\xi, r_\eta < 10$  система (6) не допускает притягивающих неподвижных точек.

Полный анализ зависимости дивергенции от параметров системы, а также поиск областей существования притягивающих неподвижных точек достаточно сложны и выходят за рамки данной статьи.

**ЗАМЕЧАНИЕ 4.** Из нулевой (в общем случае) и постоянной дивергенции следует, что рассматриваемая система не допускает инвариантную меру с гладкой положительно определенной плотностью. Исключение представляет собой случай  $r_\xi = 0$  ( $r_\eta = 0$ ), для которого в работе [Kilin et al., 2024] указана инвариантная мера. Еще одним исключением может быть множество параметров, удовлетворяющих уравнению  $\text{trace}(\mathbf{L}^{-1}\mathbf{B}) = 0$ .

Остановимся далее более подробно на случае  $a = 2$ . Как следует из рис. 4, в этом случае дивергенция является положительной, а следовательно, притягивающих неподвижных точек не может существовать. Как показали результаты численных исследований, при почти всех начальных условиях после некоторого переходного процесса траектории системы (6) уходят на бесконечность по одной из фазовых переменных. Асимптотический анализ системы (6) показал, что уход на бесконечность происходит экспоненциально быстро. При этом оставшиеся переменные периодически меняются вблизи некоторых средних значений с экспоненциально растущей частотой. Подобное асимптотическое поведение приводит к тому, что результаты численного моделирования на больших временах зависят от выбора метода и шага интегрирования. Иллюстрации подобного асимптотического поведения и зависимости динамики от выбора метода и шага интегрирования приведены в приложении А.

В рассматриваемом случае ( $a = 2$ ), в силу положительности дивергенции потока (6), могут существовать простые репеллеры — отталкивающие неподвижные точки. Для их поиска и анализа перейдем далее к исследованию системы (6) в обратном времени. При этом всем репеллерам системы (6) будут соответствовать аттракторы системы с обращенным временем.

Зафиксируем значения параметров (8) и  $a = 2$ ,  $r_\xi = 3$ ,  $r_\eta = 5$ . Из рис. 2 следует, что в этом случае в системе (2) существует пять неподвижных точек, четыре из которых седлофокусы:

- $U = (0,2912471137, -0,2662375764, -0,1146736347)$ ,  $\lambda_1 \approx -0,118$ ,  $\lambda_{2,3} \approx 0,034 \pm 0,053i$ ;
- $U = (0,02071581037, -0,08746599290, -0,06792138064)$ ,  $\lambda_1 \approx -0,094$ ,  $\lambda_{2,3} \approx 0,022 \pm 0,048i$ ;
- $U = (0,1957884396, -0,07856631367, 0,1162054189)$ ,  $\lambda_1 \approx -0,075$ ,  $\lambda_{2,3} \approx 0,012 \pm 0,066i$ ;



- $U = (0,1220803737, -0,1886273457, -0,003102254899)$ ,  $\lambda_1 \approx 0,04$ ,  $\lambda_{2,3} \approx -0,046 \pm 0,012i$ ,

а одна — устойчивый узлофокус:

- $U^* = U = (0,04240011801, -0,4215075020, 0,05504480702)$ ,  $\lambda_1 \approx -0,044$ ,  $\lambda_{2,3} \approx -0,0034 \pm 0,098i$ .

Здесь  $\lambda_i$  — собственные числа матрицы линеаризации системы (6) вблизи соответствующих неподвижных точек. Таким образом, при выбранных параметрах в рассматриваемой системе существует притягивающая (в обратном времени) неподвижная точка  $U^*$ .

Траектории центра эллипса в абсолютном пространстве, соответствующие неподвижным точкам системы (6), представляют собой окружности.

**Предельные циклы.** Исследуем бифуркации устойчивой неподвижной точки  $U^*$  при  $a = 2$ ,  $r_\eta = 5$  и изменении параметра  $r_\xi \in [3, 5]$ . Для этого линеаризуем систему (2) в окрестности точки  $U^*$ . У полученной матрицы линеаризации вычислим собственные числа и обозначим их как  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ . На рис. 4 приведены зависимости собственных чисел  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  от  $r_\xi$ .

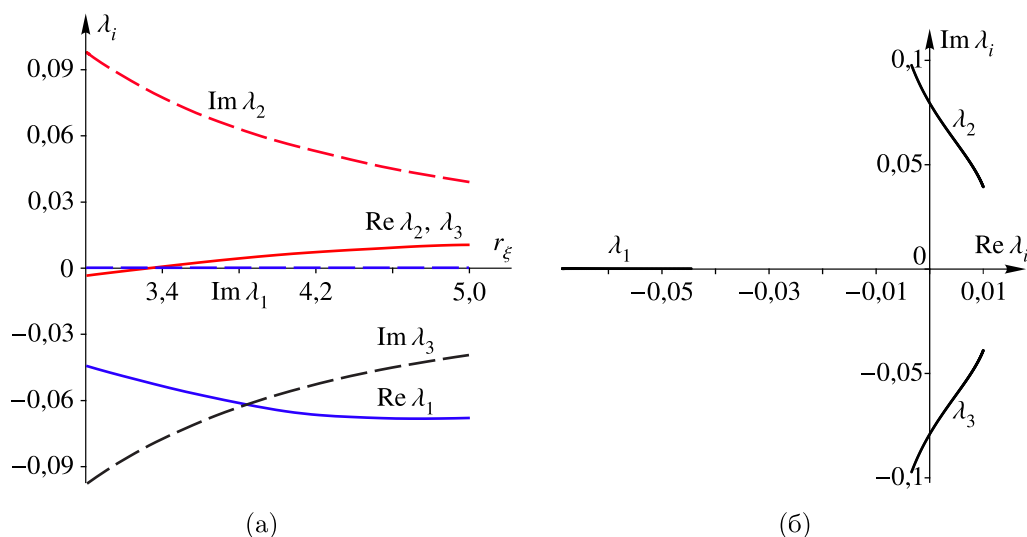


Рис. 4. Зависимость собственных чисел  $\lambda_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , от  $r_\xi$  (а) на плоскости  $(r_\xi, \lambda_i)$ , (б) на комплексной плоскости  $(\text{Re } \lambda_i, \text{Im } \lambda_i)$

Из рис. 4 видно, что при изменении  $r_\xi$  устойчивая точка  $U^*$  проходит через бифуркацию Андронова–Хопфа [Арнольд и др., 1986], то есть  $\text{Re } \lambda_{2,3}$  проходят через ноль. В результате указанная точка теряет устойчивость при  $r_\xi = 3,36$ ,  $\lambda_1 \approx -0,053$ ,  $\lambda_{2,3} \approx 0,00008 \pm 0,079i$ , и вблизи нее рождается устойчивый предельный цикл.

**ЗАМЕЧАНИЕ 5.** В системе (6) бифуркация Андронова–Хопфа происходит и при других значениях параметров  $a$  и  $r_\eta$ . При фиксированном значении  $a$  можно построить на плоскости  $(r_\xi, r_\eta)$  кривую, соответствующую этой бифуркации, однако это выходит за рамки данной работы.

Для иллюстрации рождения предельного цикла построим двумерное отображение Пуанкаре. В качестве секущей выберем плоскость  $\Omega = \Omega^*$ , где  $\Omega^*$  есть решение уравнения (7), соответствующее неподвижной точке  $U^*$ . Тогда неподвижная точка  $U^*$  будет лежать на плоскости сечения, а предельному циклу будет соответствовать неподвижная точка отображения. Здесь мы будем строить все пересечения траекторий с плоскостью сечения и в положительном ( $\dot{\Omega} > 0$ ), и в отрицательном ( $\dot{\Omega} < 0$ ) направлениях. Поэтому предельному циклу будут соответствовать неподвижные точки четного порядка. На рис. 5 приведены примеры отображения Пуанкаре при

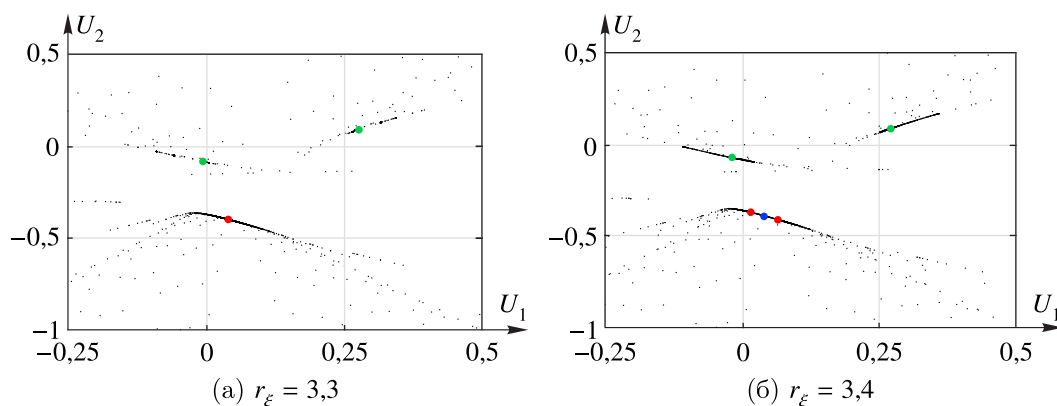


Рис. 5. Отображение Пуанкаре при  $a = 2$ ,  $r_\eta = 5$ , параметрах (8) и (а)  $r_\xi = 3,3$  и секущей  $\Omega = \Omega^* = 0,05211499154$ , (б)  $r_\xi = 3,4$  и секущей  $\Omega = \Omega^* = 0,05116446435$ . Зелеными точками обозначен предельный цикл, (а) красной точкой обозначена устойчивая неподвижная точка, (б) синяя точка — неустойчивая неподвижная точка, красные точки — предельный цикл, родившийся в результате бифуркации Андронова–Хопфа

разных значениях  $r_\xi$  до и после бифуркации. На рисунке простыми точками изображаются траектории отображения (с разными начальными условиями), а жирными — неподвижные точки отображения. На рис. 5, а красной точкой отмечен устойчивый узлофокус  $U^*$ . На рис. 5, б красными точками отмечен предельный цикл, появившийся в результате бифуркации Андронова–Хопфа, а синей точкой — ставшая неустойчивой неподвижная точка  $U^*$ .

Помимо указанных притягивающих решений (устойчивый узлофокус и родившийся из него предельный цикл) на рис. 5, виден еще один притягивающий цикл (отмеченный на рис. 5 зелеными точками). Это решение предположительно рождается из периодических решений интегрируемого случая ( $r_\xi = 0$ ). Детальное исследование возникновения данного притягивающего решения остается открытым вопросом. Еще одним предметом дальнейшего изучения рассматриваемой системы является исследование мультистабильности, связанной с сосуществованием нескольких аттракторов.

В неособом случае предельным циклом системы (6) соответствуют ограниченные квазипериодические траектории центра эллипса в абсолютном пространстве.

### 3. Странный репеллер

Рассмотрим далее вопрос о том, как изменяется притягивающее решение (предельный цикл), возникающее после бифуркации Андронова–Хопфа. Для исследования будем строить двумерное отображение Пуанкаре. В качестве секущей выберем плоскость  $\Omega = 0,0512742433$ . Значение секущей выбрано так, чтобы предельный цикл пересекал плоскость сечения и были видны все происходящие в системе бифуркации. На рис. 6 приведено отображение Пуанкаре при  $a = 2$ ,  $r_\xi = 3,4$ ,  $r_\eta = 5$  и параметрах (8). На рис. 6 красными точками отмечен предельный цикл, родившийся через бифуркацию Андронова–Хопфа, и зелеными — существовавший ранее.

Все траектории отображения, приведенного на рис. 6, притягиваются к одному из указанных предельных циклов. Рассмотрим далее бифуркации предельного цикла, родившегося через бифуркацию Андронова–Хопфа при изменении параметра  $r_\xi$ .

На рис. 7 приведены однопараметрические бифуркационные диаграммы при изменении  $r_\xi \in [3,5, 6,5]$ . Диаграмма приведена для сечения  $\Omega = 0,0512742433$  и значений параметров (8),  $a = 2$ ,  $r_\eta = 5$ . При построении диаграммы для каждого значения  $r_\xi$  в выбранном интер-

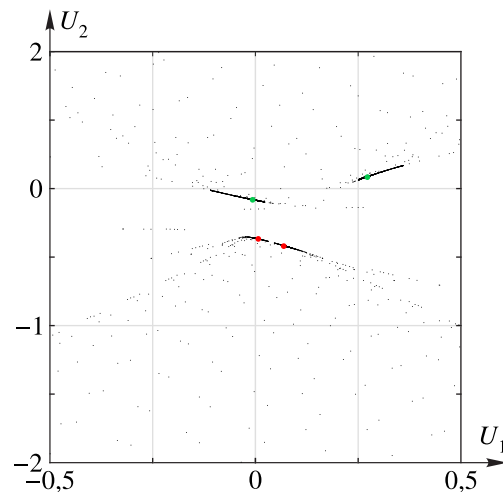


Рис. 6. Отображение Пуанкаре при  $a = 2$ ,  $r_\xi = 3,4$ ,  $r_\eta = 5$ , параметрах (8) и секущей  $\Omega = 0,0512742433$ . Красными точками обозначен предельный цикл, родившийся в результате бифуркации Андронова – Хопфа, зелеными — предельный цикл, ранее существовавший в системе

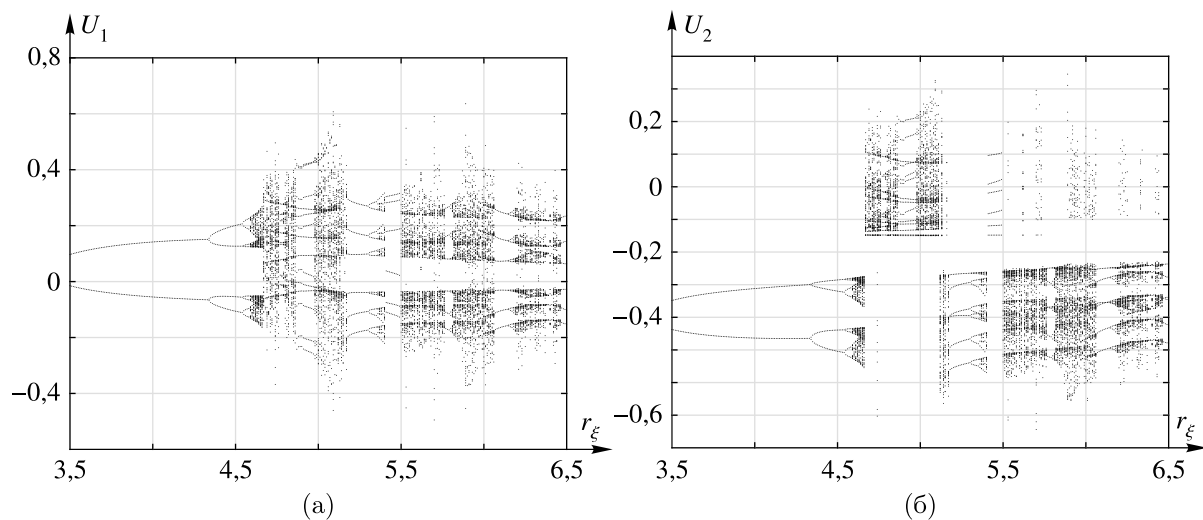


Рис. 7. Однопараметрическая бифуркационная диаграмма для (а)  $U_1$  и (б)  $U_2$  при  $r_\xi \in [3,5, 6,5]$  и значениях параметров (8),  $a = 2$ ,  $r_\eta = 5$

вале запускалась траектория отображения с начальными условиями, равными установившемуся решению при предыдущем значении  $r_\xi$ . Первые 10 000 точек траектории, соответствующие переходным процессам, опускались. Следующие 100 точек, характеризующие установившееся решение, выводились на плоскости  $(r_\xi, U_1)$  и  $(r_\xi, U_2)$ .

На рис. 7 видно, что при изменении параметра  $r_\xi$  в системе происходит каскад бифуркаций удвоения периода. Увеличенные фрагменты бифуркационных диаграмм при  $r_\xi \in [4,25, 4,75]$  приведены на рис. 8 сверху. Соответствующее этим диаграммам изменение показателей Ляпунова приведено на рис. 8 снизу. Пунктирными вертикальными прямыми на рис. 8 отмечены значения  $r_\xi$ , при которых происходят бифуркации удвоения периода.

Аттрактор (репеллер в прямом времени), возникающий непосредственно после каскада бифуркаций удвоения периода, имеет «тонкую» структуру и показан на рис. 9, а и 10, а. Начальные

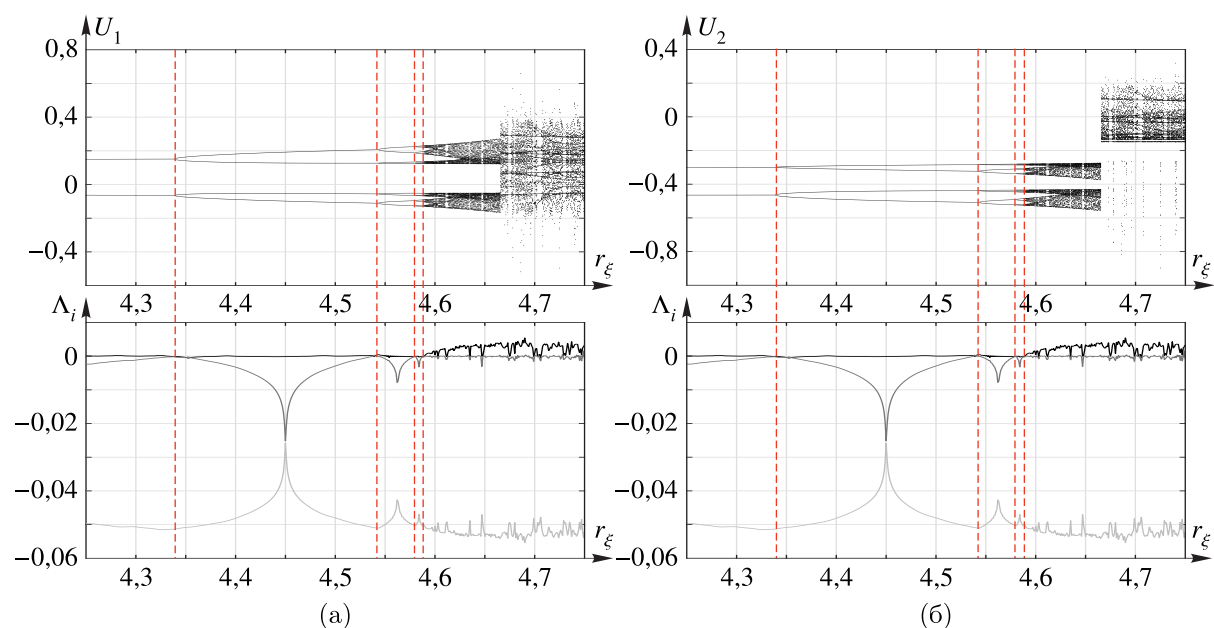


Рис. 8. Однопараметрическая бифуркационная диаграмма для (а)  $U_1$ , (б)  $U_2$  и показатели Ляпунова при  $r_\xi \in [4,25, 4,75]$  при значениях параметров (8),  $a = 2$ ,  $r_\eta = 5$

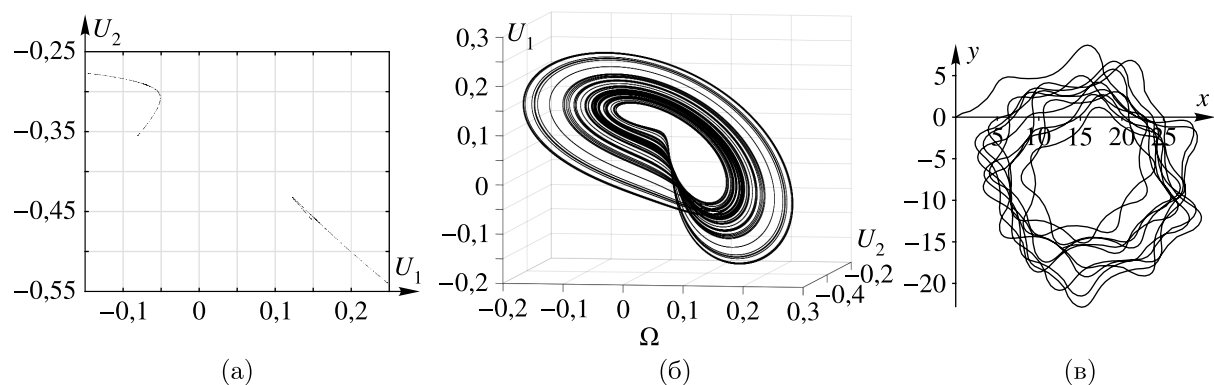


Рис. 9. (а) Отображение Пуанкаре, (б) траектория в фазовом пространстве, (в) траектория центра масс эллипса при  $r_\xi = 4,628$ , параметрах (8),  $a = 2$ ,  $r_\eta = 5$

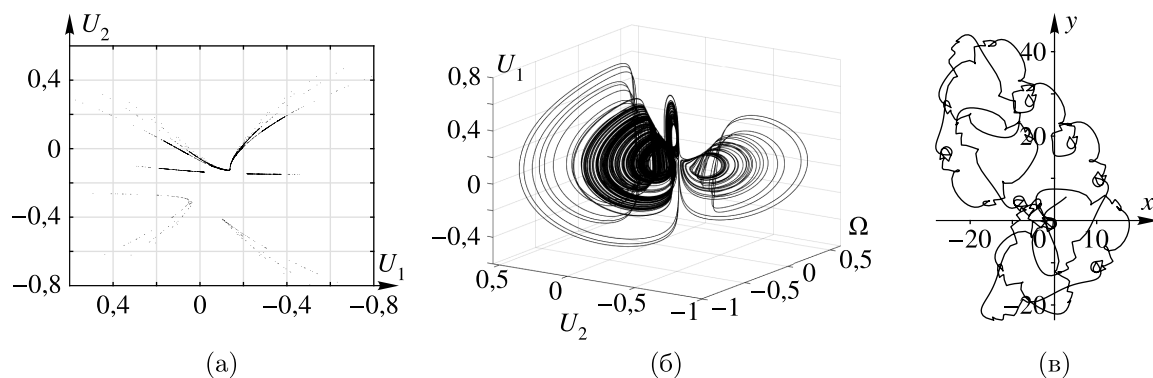


Рис. 10. (а) Отображение Пуанкаре, (б) траектория в фазовом пространстве, (в) траектория центра масс эллипса при  $r_\xi = 4,695$ , параметрах (8),  $a = 2$ ,  $r_\eta = 5$

условия для аттрактора на рис. 9,  $a$ :

$$U_1(0) = -0,101962200901288, \quad U_2(0) = -0,283421129099299, \quad \Omega(0) = 0,0512742433.$$

Начальные условия для аттрактора на рис. 10,  $a$ :

$$U_1(0) = 0,227531997908823, \quad U_2(0) = -0,147256282360437, \quad \Omega(0) = 0,0512742433.$$

На рис. 9 и 10, помимо отображений Пуанкаре, на которых изображены сечения аттракторов, приведены соответствующие им траектории в фазовом пространстве  $(U_1, U_2, \Omega)$  (рис. 9,  $b$ , 10,  $b$ ). Также на рис. 9,  $в$ , 10,  $в$  приведены соответствующие траектории центра масс эллиптического профиля. Из значений показателей Ляпунова на рис. 8 снизу следует, что данные аттракторы могут быть классифицированы как странные аттракторы. Отметим, что подобного рода аттракторы приведены, например, в книге [Sprott, 2010] для систем, схожих по форме с уравнениями (6). Более точная классификация, а также изучение возможных сценариев рождения найденного аттрактора, при использовании, например, методов, изложенных в работах [Karatetskaia et al., 2025; Karatetskaia et al., 2024; Kazakov et al., 2024; Shykhmamedov et al., 2023; Kuptsov, Kuznetsov, 2018], требуют отдельного исследования.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Также на рис. 7,  $b$  видно, что на диаграмме существуют области «перескока», такое поведение может быть связано с сосуществованием нескольких аттракторов (например, рождающегося из второго предельного цикла на рис. 6).

## Заключение

В данной работе рассмотрено движение эллиптического профиля с присоединенным к нему вихрем. Причем вихрь не располагается на продолжении одной из полуосей эллипса. Показано, что редуцированная система в неособом случае в зависимости от параметров может иметь одну, три или пять неподвижных точек. При изменении положения вихря относительно профиля в системе происходит бифуркация Андронова – Хопфа, в результате которой рождается неустойчивый предельный цикл. Данный цикл при дальнейшем изменении параметров системы претерпевает каскад удвоений периода, в результате которого рождается хаотический репеллер. Следовательно, рассматриваемая система является неинтегрируемой.

Интересными открытыми вопросами остаются исследование бифуркаций хаотических аттракторов (репеллеров), анализ мультистабильности системы, а также поиск других сценариев возникновения хаоса в рассматриваемой системе. Еще одним интересным направлением исследований является аналитический и численный анализ зависимости дивергенции и асимптотического поведения системы от ее параметров. Это, например, может помочь в определении областей параметров, в которых существуют аттракторы в прямом времени.

## Приложение А

При численном интегрировании системы (3) (аналогичные результаты получаются и для системы (6)) в прямом времени существует зависимость от выбора метода и шага интегрирования. Подобное поведение системы возникало в задаче о движении твердого тела в жидкости, например в работе [Borisov et al., 2020]. На рис. 11–13 приведены примеры типичных зависимостей фазовых переменных  $(u_1, u_2, \omega)$  от времени при различных методах интегрирования и максимального шага интегрирования  $\delta t$ . Зафиксируем следующие значения параметров:

$$a = 2, \quad b = 1, \quad \Gamma = 1, \quad r_\xi = 2, \quad r_\eta = 6, \quad m = 1, \quad I = 1, \quad \rho = 1.$$

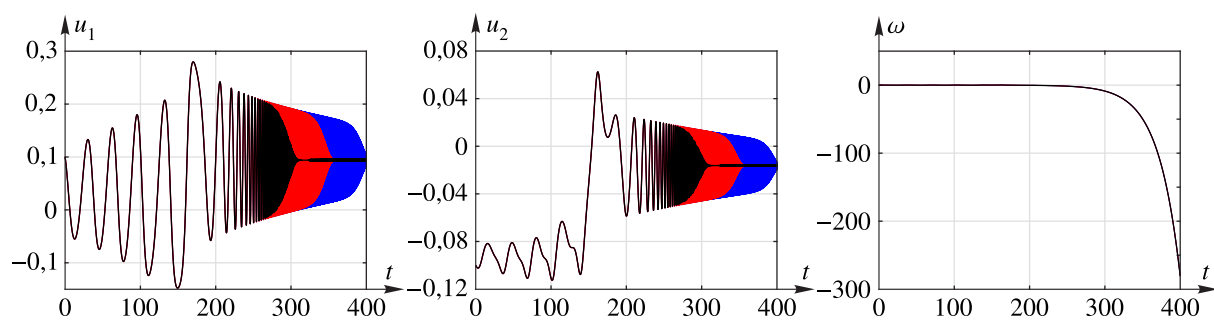


Рис. 11. Зависимости фазовых переменных от времени при интегрировании методом ode23

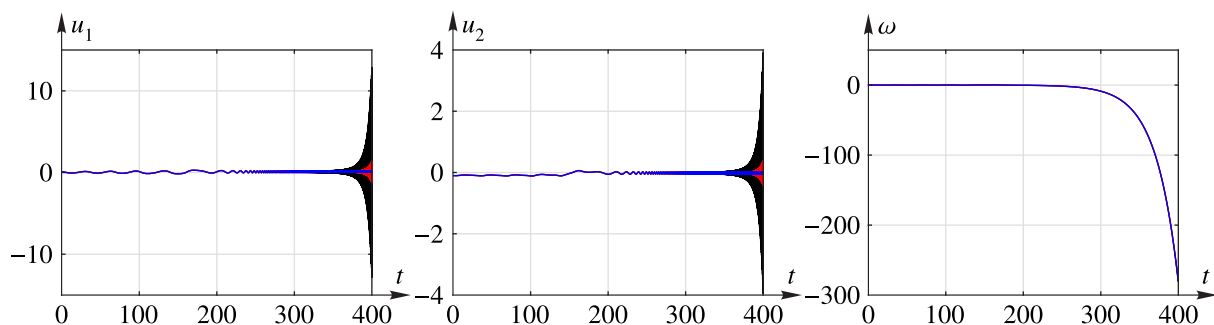


Рис. 12. Зависимости фазовых переменных от времени при интегрировании методом ode45

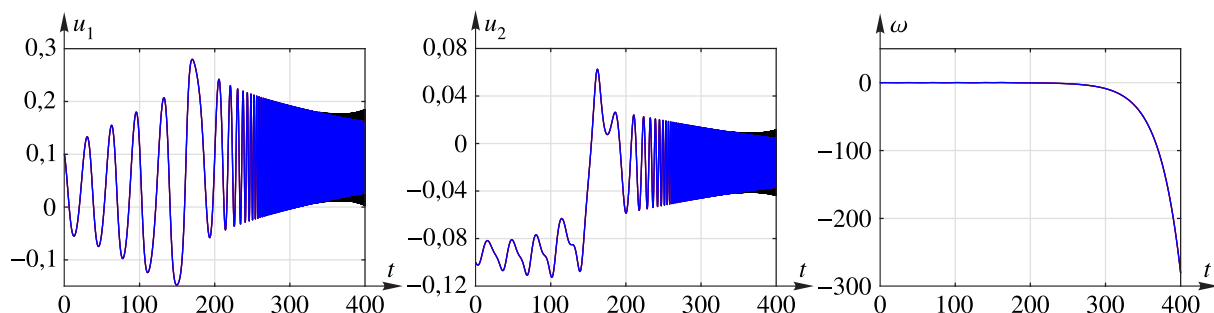


Рис. 13. Зависимости фазовых переменных от времени при интегрировании методом ode78

Интегрирование проводилось в среде MatLAB с использованием встроенных методов ode23, ode45, ode78 и следующих настроек:

$$\text{odeset('RelTol', 1e-2, 'AbsTol', 1e-4, 'MaxStep', \delta t)}.$$

Начальные условия:  $u_1(0) = 0,1$ ,  $u_2(0) = -0,1$ ,  $\omega(0) = 0,05$ .

На рис. 11–13 черным цветом обозначены зависимости фазовых переменных от времени при максимальном шаге интегрирования  $\delta t = 0,1$ , красным — при  $\delta t = 0,01$ , синим — при  $\delta t = 0,001$ . Из рисунков видно, что на начальном промежутке времени примерно до 250–350 зависимости совпадают. Однако при  $t > 250$  для ode23 ( $t > 350$  для ode25 и ode78) траектории в зависимости от значения шага и метода интегрирования начинают расходиться. Причиной такого поведения является экспоненциальный рост частоты колебаний переменных  $U_1$ ,  $U_2$ , хорошо заметный, например, на рис. 11, а, б. Указанное поведение системы не позволяет использовать известные численные методы исследования динамических систем, такие как оценка показателей Ляпунова или построение отображения Пуанкаре [Кузнецов, 2006] в прямом времени.



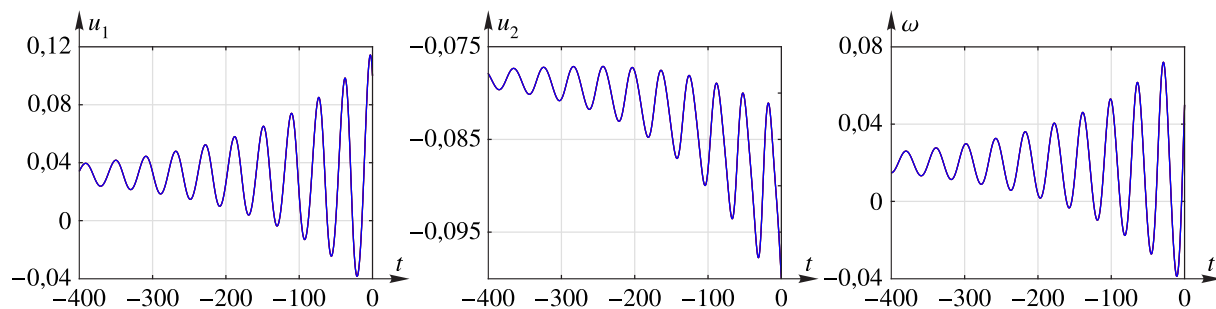


Рис. 14. Зависимости фазовых переменных от времени при интегрировании методом ode23

Такого рода зависимость от шага и метода интегрирования не возникает при интегрировании системы (3) в обратном времени. На рис. 14 приведены зависимости фазовых переменных ( $u_1$ ,  $u_2$ ,  $\omega$ ) от времени для разного максимального шага интегрирования  $\delta t$  (метод интегрирования ode23).

Из рис. 14 видно, что независимо от максимального шага  $\delta t$  зависимости ( $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$ ,  $\omega(t)$ ) совпадают. Такие же зависимости получаются и при интегрировании другими методами (ode45 и ode 78). Таким образом, систему (3) возможно исследовать известными методами в обратном времени.

## Список литературы (References)

- Арнольд В. И., Афраймович В. С., Ильашенко Ю. С., Шильников Л. П. Теория бифуркаций, динамические системы 5. — М.: ВИНТИ, 1986. — С. 5–218.
- Arnol'd V.I., Afraimovich V.S., Il'yashenko Yu.S., Shil'nikov L.P. Teoriya bifurkatsii, dinamicheskie sistemy 5 [Bifurcation theory, dynamic systems 5]. — Moscow: VINITI, 1986. — P. 5–218 (in Russian).
- Ветчанин Е. В., Килин А. А. Управляемое движение твердого тела с внутренними механизмами в идеальной несжимаемой жидкости // Труды МИАН. — 2016. — Т. 295. — С. 321–351.
- Vetchanin E. V., Kilin A. A. Controlled motion of a rigid body with internal mechanisms in an ideal incompressible fluid // Proc. Steklov Inst. Math. — 2016. — Vol. 295. — P. 302–332. — DOI: 10.1134/S037196851604018X (Original Russian paper: Vetchanin E. V., Kilin A. A. Upravlyаемoe dvizhenie tverdogo tela s vnutrennimi mekhanizmami v ideal'noi neshzhimaemoi zhidkosti // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. — 2016. — Vol. 295. — P. 321–351.)
- Козлов В. В. К теории интегрирования уравнений неголономной механики // Успехи механики. — 1985. — Т. 8, № 3. — С. 85–107.
- Kozlov V. V. On the integration theory of equations of nonholonomic mechanics // Regul. Chaotic Dyn. — 2002. — Vol. 7. — No. 2. — P. 191–176. — DOI: 10.48550/arXiv.nlin/0503027 (Original Russian paper: Kozlov V. V. K teorii integrirvaniya uravnenii negolonomnoi mekhaniki // Uspekhi mekhaniki. — 1985. — Vol. 8. — No. 3. — P. 85–107.)
- Козлов В. В., Рамоданов С. М. О движении в идеальной жидкости тела с жесткой оболочкой и меняющейся геометрией масс // ДАН. — 2002. — Т. 382, № 4. — С. 478–481.
- Kozlov V. V., Ramodanov S. M. On the motion of a body with a rigid shell and variable mass geometry in a perfect fluid // Dokl. Phys. — 2002. — Vol. 47, No. 2. — P. 132–135. — DOI: 10.1134/1.1462085 (Original Russian paper: Kozlov V. V., Ramodanov S. M. O dvizhenii v ideal'noi zhidkosti tela s zhestkoi obolochkoi i menyayushcheisya geometriei mass // Doklady Mathematics. — 2002. — Vol. 382, No. 4. — P. 478–481.)
- Козлов В. В., Рамоданов С. М. О движении изменяемого тела в идеальной жидкости // ПММ. — 2001. — № 4. — С. 592–601.
- Kozlov V. V., Ramodanov S. M. The motion of a variable body in an ideal fluid // J. Appl. Math. Mech. — 2001. — Vol. 65, No. 4. — P. 579–587. (Original Russian paper: Kozlov V. V., Ramodanov S. M. O dvizhenii izmenyaемого tela v ideal'noi zhidkosti // PMM. — 2001. — No. 4. — P. 592–601.)
- Кузнецов С. П. Динамический хаос. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Физматлит, 2006.
- Kuznetsov S. P., Dinamicheskii khaos [Dynamic chaos]. — 2-е изд., pererab. i dop. — Moscow: Fizmatlit, 2006 (in Russian).
- Рамоданов С. М. К задаче о движении двух массовых вихрей в идеальной жидкости // Нелинейная динамика. — 2006. — Т. 2, № 4. — С. 435–443.

- Ramodanov S. M.* K zadache o dvizhenii dvukh massovykh vikhrei v ideal'noi zhidkosti [On the motion of two mass vortices in an ideal fluid] // *Nonlinear Dynamics*. — 2006. — Vol. 2, No. 4. — P. 435–443. — DOI:10.20537/nd0604005 (in Russian).
- Седов Л. И.* Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. — 2-е изд., исп. — М.: Машиностроение, 1964.
- Sedov L. I.* Ploskie zadachi gidroinamiki i aehroinamiki [Flat problems in hydrodynamics and aerodynamics]. — 2-e izd., isp. — Moscow: Mashinostroenie, 1964 (in Russian).
- Artemova E., Vetchanin E.* The motion of a circular foil in the field of a fixed point singularity: integrability and asymptotic behavior // *Phys. Fluids*. — 2024. — Vol. 36, No. 2. — DOI: 10.1063/5.0185865
- Artemova E., Vetchanin E.* The motion of an unbalanced circular disk in the field of a point source // *Regul. Chaotic Dyn.* — 2022. — Vol. 27, No. 1. — P. 24–42. — DOI: 10.1134/S1560354722010051
- Artemova E. M., Lagunov D. A., Vetchanin E. V.* The motion of an elliptic foil in the field of a fixed vortex source // *Russian J. Nonlinear Dyn.* — 2025. — Vol. 21, No. 2. — P. 135–155. — DOI: 10.20537/nd241203
- Bizyaev I. A., Borisov A. V., Kazakov A. O.* Dynamics of the Suslov problem in a gravitational field: reversal and strange attractors // *Regul. Chaotic Dyn.* — 2015. — Vol. 20, No. 5. — P. 605–626. — DOI: 10.1134/S1560354715050056
- Bizyaev I. A., Mamaev I. S.* Roller racer with varying gyrostatic momentum: acceleration criterion and strange attractors // *Regul. Chaotic Dyn.* — 2023. — Vol. 28, No. 1. — P. 107–130. — DOI: 10.1134/S1560354723010070
- Borisov A. V., Mamaev I. S.* An integrability of the problem on motion of cylinder and vortex in the ideal fluid // *Regul. Chaotic Dyn.* — 2003. — Vol. 8, No. 2. — P. 163–166. — DOI: 10.1070/RD2003v008n02ABEH000235
- Borisov A. V., Mamaev I. S.* Rigid body dynamics // *Ser. De Gruyter Studies in Mathematical Physics*. — Vol. 52. — Berlin/Boston: Higher Education Press and de Gruyter GmbH, 2018. — 526 p.
- Borisov A. V., Vetchanin E. V., Mamaev I. S.* Motion of a smooth foil in a fluid under the action of external periodic forces: 2 // *Russ. J. Math. Phys.* — 2020. — Vol. 27, No. 1. — P. 1–17. — DOI: 10.1134/S106192082001001X
- Karatetskaia E., Koryakin V., Soldatkin K., Kazakov A.* Routes to chaos in a three-dimensional cancer model // *Regul. Chaotic Dyn.* — 2024. — Vol. 29, No. 5. — P. 777–793. — DOI:10.1134/S1560354724050010
- Karatetskaia E., Shykhmamedov A., Soldatkin K., Kazakov A.* Scenarios for the creation of hyperchaotic attractors with three positive Lyapunov exponents // *Regul. Chaotic Dyn.* — 2025. — Vol. 30, No. 2. — P. 306–324. — DOI: 10.1134/S156035472502008X
- Kazakov A. O., Borisov A. V., Pivovarova E. N.* Regular and chaotic dynamics in the “rubber” model of Chaplygin top // *Regul. Chaotic Dyn.* — 2016. — Vol. 21, No. 7–8. — P. 885–901. — DOI:10.20537/nd1702009
- Kazakov A. O., Murillo A., Vieiro A., Zaichikov K.* Numerical study of discrete Lorenz-like attractors // *Regul. Chaotic Dyn.* — 2024. — Vol. 29, No. 1. — P. 78–99. — DOI: 10.1134/S1560354724010064
- Kilin A. A.* First integral in the problem of motion of a circular cylinder and a point vortex in unbounded ideal fluid // *Regul. Chaotic Dyn.* — 2001. — Vol. 6, No. 2. — P. 233–234. — DOI: 10.1070/RD2001v006n02ABEH000174
- Kilin A. A., Gavrilova A. M., Artemova E. M.* Dynamics of an elliptic foil with an attached vortex in an ideal fluid: the integrable case // *Regul. Chaotic Dyn.* — 2025. — Vol. 30, No. 6. — P. 931–951. — DOI: 10.1134/S1560354724590015
- Kirchhoff G.*, Vorlesungen über mathematische Physik: Vol. 1. Mechanik. — Leipzig: Teubner, 1876.
- Klekovkin A. V., Karavaev Yu. L., Mamaev I. S.*, The control of an aquatic robot by a periodic rotation of the internal flywheel // *Russian J. Nonlinear Dyn.* — 2023. — Vol. 19, No. 2. — P. 265–279. — DOI: 10.20537/nd230301

- Kozlov V. V., Onishchenko D. A.* Motion of a body with undeformable shell and variable mass geometry in an unbounded perfect fluid // *J. Dynam. Differential Equations*. — 2003. — Vol. 15, No. 2–3. — P. 553–570. — DOI: 10.1023/B:JODY.0000009748.39033.86
- Kuptsov P. V., Kuznetsov S. P.* Lyapunov analysis of strange pseudohyperbolic attractors: angles between tangent subspaces, local volume expansion and contraction // *Regul. Chaotic Dyn.* — 2018. — Vol. 23, No. 7–8. — P. 908–932. — DOI: 10.1134/S1560354718070079
- Mamaev I. S., Bizyaev I. A.* Dynamics of an unbalanced circular foil and point vortices in an ideal fluid // *Phys. Fluids*. — 2021. — Vol. 33, No. 8. — 087119. — 18 p. — DOI: 10.1063/5.0058536
- Pollard B., Tallapragada P.* An aquatic robot propelled by an internal rotor // *IEEE/ASME Trans. Mechatronics*. — 2016. — Vol. 22, No. 2. — P. 931–939. — DOI: 10.1109/TMECH.2016.2630998
- Ramodanov S. M.*, Motion of a circular cylinder and a vortex in an ideal fluid // *Regul. Chaotic Dyn.* — 2001. — Vol. 6, No. 1. — P. 33–38. — DOI: 10.1070/rd2001v006n01ABEH000163
- Ramodanov S. M.* Motion of a circular cylinder and  $N$  point vortices in a perfect fluid // *Regul. Chaotic Dyn.* — 2002. — Vol. 7, No. 3. — P. 291–298. — DOI: 10.1070/RD2002v007n03ABEH000211
- Shashikanth B. N., Marsden J. E., Burdick J. W., Kelly S. D.* The Hamiltonian structure of a 2D Rigid circular cylinder interacting dynamically with  $N$  point vortices // *Phys. Fluids*. — 2002. — Vol. 14, No. 3. — P. 1214–1227. — DOI: 10.1063/1.1445183
- Shykhmamedov A., Karatetskaia E., Kazakov A., Stankevich N.* Scenarios for the creation of hyperchaotic attractors in 3D maps // *Nonlinearity*. — 2023. — Vol. 36, No. 7. — P. 3501–3541. — DOI: 10.1088/1361-6544/acd044
- Sprott J. C.* *Elegant chaos: algebraically simple chaotic flows*. — Singapore: World Sci., 2010.
- Tallapragada P.* A swimming robot with an internal rotor as a nonholonomic system // *Proc. of the American Control Conf. (ACC, Chicago, Ill., Jul 2015)*. — P. 657–662. — DOI: 10.1109/ACC.2015.7170810
- Vetchanin E. V., Kilin A. A.* Control of body motion in an ideal fluid using the internal mass and the rotor in the presence of circulation around the body // *J. Dyn. Control Syst.* — 2017. — Vol. 23, No. 2. — P. 435–458. — DOI: 10.1142/S0218127416500632
- Vetchanin E. V., Mamaev I. S.* Numerical analysis of a drop-shaped aquatic robot // *Mathematics*. — 2024. — Vol. 12, No. 2. — Art. 312. — 17 p. — DOI:10.3390/math12020312