

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И ОСНОВЫ ИХ РЕАЛИЗАЦИИ

УДК: 519.8

## Исследование точности метода решеточных уравнений Больцмана при расчете распространения акустических волн

К. К. Забелло<sup>a</sup>, А. В. Гарбарук

Санкт-Петербургский политехнический университет,  
Россия, 195251, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., д. 29

E-mail: <sup>a</sup> kosnay@mail.ru

Получено 24.10.2025, после доработки — 23.11.2025.  
Принято к публикации 25.11.2025.

В статье проводится систематическое исследование возможностей метода решеточных уравнений Больцмана (lattice Boltzmann method, LBM или РУБ) для описания распространения акустических волн. Рассмотрена задача о распространении возмущений от точечного гармонического источника акустических возмущений в неограниченном пространстве как в неподвижной среде (число Маха  $M = 0$ ), так и при наличии набегающего потока (число Маха  $M = 0,2$ ). Обе рассмотренные задачи имеют аналитическое решение в приближении линейной акустики, что позволяет количественно оценить точность численного метода.

Численная реализация осуществлена с использованием двумерной модели скоростей D2Q9 и оператора столкновений Бхатнагара – Гросса – Крука (BGK). Источник колебаний задавался согласно схеме Gou, а возникающий от источника паразитный шум в моментах старших порядков убирался за счет использования процедуры регуляризации функций распределения. Для минимизации отражений от границ расчетной области использовался гибридный подход, основанный на совместном использовании характеристических граничных условий на основе инвариантов Римана и поглащающих PML-слоев (perfectly matched layer) с параболическим профилем затухания.

В ходе работы проведен детальный анализ влияния вычислительных параметров метода на точность расчета. Исследована зависимость погрешности от толщины PML-слоя ( $L_{PML}$ ) и максимального коэффициента демпфирования ( $\sigma_{max}$ ), безразмерной амплитуды источника ( $Q'_0$ ) и шага расчетной сетки. Показано, что метод РУБ применим для моделирования распространения акустических волн и обладает вторым порядком точности. Установлено, что для достижения высокой точности расчета (относительная погрешность давления — не более 1%) достаточно пространственного разрешения в 20 точек на длину волны ( $\lambda$ ). Определены минимальные эффективные параметры PML-слоя:  $\sigma_{max} > 0,02$  и  $L_{PML} \geq 2\lambda$ , обеспечивающие отсутствие отражения от границ расчетной области. Также продемонстрировано, что при амплитудах источника  $Q'_0 \geq 0,1$  влияние нелинейных эффектов становится существенным по сравнению с другими источниками погрешности.

**Ключевые слова:** решеточные уравнения Больцмана (РУБ), аэроакустика, численное моделирование, регуляризация, PML-слой, характеристические граничные условия

Исследование выполнено в рамках научной программы Национального центра физики и математики, направление № 2 «Математическое моделирование на супер-ЭВМ экса- и зетта-производительности. Этап 2023–2025» с использованием вычислительных ресурсов суперкомпьютерного центра СПбПУ «Политехнический».

UDC: 519.8

# Investigation of the accuracy of the lattice Boltzmann method in calculating acoustic wave propagation

K. K. Zabello<sup>a</sup>, A. V. Garbaruk

Saint-Petersburg Polytechnic University,  
29 Polytechnic st., Saint-Petersburg, 195251, Russia

E-mail: <sup>a</sup> kosnay@mail.ru

*Received 24.10.2025, after completion – 23.11.2025.*

*Accepted for publication 25.11.2025.*

The article presents a systematic investigation of the capabilities of the lattice Boltzmann method (LBM) for modeling the propagation of acoustic waves. The study considers the problem of wave propagation from a point harmonic source in an unbounded domain, both in a quiescent medium ( $M = 0$ ) and in the presence of a uniform mean flow ( $M = 0.2$ ). Both scenarios admit analytical solutions within the framework of linear acoustics, allowing for a quantitative assessment of the accuracy of the numerical method.

The numerical implementation employs the two-dimensional D2Q9 velocity model and the Bhatnagar–Gross–Krook (BGK) collision operator. The oscillatory source is modeled using Gou's scheme, while spurious high-order moment noise generated by the source is suppressed via a regularization procedure applied to the distribution functions. To minimize wave reflections from the boundaries of the computational domain, a hybrid approach is used, combining characteristic boundary conditions based on Riemann invariants with perfectly matched layers (PML) featuring a parabolic damping profile.

A detailed analysis is conducted to assess the influence of computational parameters on the accuracy of the method. The dependence of the error on the PML thickness ( $L_{\text{PML}}$ ) and the maximum damping coefficient ( $\sigma_{\max}$ ), the dimensionless source amplitude ( $Q'_0$ ), and the grid resolution is thoroughly examined. The results demonstrate that the LBM is suitable for simulating acoustic wave propagation and exhibits second-order accuracy. It is shown that achieving high accuracy (relative pressure error below 1 %) requires a spatial resolution of at least 20 grid points per wavelength ( $\lambda$ ). The minimal effective PML parameters ensuring negligible boundary reflections are identified as  $\sigma_{\max} \geq 0.02$  and  $L_{\text{PML}} \geq 2\lambda$ . Additionally, it is shown that for source amplitudes  $Q'_0 \geq 0.1$ , nonlinear effects become significant compared to other sources of error.

**Keywords:** lattice Boltzmann method (LBM), aeroacoustics, numerical simulation, regularization, PML layer, characteristic boundary conditions

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2025, vol. 17, no. 6, pp. 1069–1081 (Russian).

The research was carried out within the framework of the scientific program of the National Center for Physics and Mathematics, direction No. 2 “Mathematical modeling on super-computers of exa- and zetta-productivity. Stage 2023–2025” using computing resources of the St. Petersburg Polytechnic University Supercomputing Center.

## Введение

Метод решеточных уравнений Больцмана (РУБ или LBM, lattice Boltzmann method) представляет собой альтернативный подход к решению уравнений Навье – Стокса и широко используется благодаря простоте реализации, высокой масштабируемости и способности моделировать сложные течения. В последние годы непрерывно возрастаает интерес к применению РУБ в задачах аэроакустики, где, по мнению ряда исследователей, он способен обеспечить более высокую эффективность по сравнению с традиционными численными методами [Marié et al., 2009; Suss et al., 2023].

На практике при решении задач аэроакустики часто используется двухэтапный метод расчета шума, предполагающий раздельное моделирование генерации и распространения звука. Это связано с тем, что расстояние до наблюдателя, как правило, многократно превосходит длину волны, поэтому прямой расчет распространения акустических волн до наблюдателя сопряжен с использованием огромных по размеру сеток и, как следствие, с неприемлемо высокими вычислительными затратами. На первом этапе двухэтапного метода производится гидродинамический расчет, в процессе которого информация о нестационарных характеристиках потока сохраняется на контрольных поверхностях. На втором этапе с использованием этой информации производится расчет распространения звука до положения наблюдателя с помощью соответствующих интегральных подходов, таких как метод Кирхгофа [Farassat, Myers, 1988] или Фокса Вильямса – Хокингса (FWH) [Ffowcs Williams, Hawking, 1961].

При использовании такого двухэтапного подхода необходимо на первом этапе описать распространение акустических волн от источника до контрольных поверхностей без потери точности. Проверка способности тех или иных численных методов обеспечить высокую точность при расчете распространения акустических волн традиционно проводится путем решения задачи о распространении шума, создаваемого точечным гармоническим источником, находящимся в однородном дозвуковом потоке.

Это и определило цель настоящей работы, которая состоит в исследовании возможностей метода решеточных уравнений Больцмана для описания передачи акустических возмущений на примере канонической задачи о распространении однотонного сигнала в неограниченном пространстве.

Для достижения этой цели в работе решены две задачи. Во-первых, были проведены методические исследования, в ходе которых были определены параметры метода РУБ и постановки рассматриваемой задачи, обеспечивающие требуемую точность расчета. Во-вторых, было проведено исследование влияния расчетной сетки на погрешность расчета.

## Постановка задачи

Рассматривается задача о двумерном гармоническом источнике колебаний в неограниченном однородном потоке с числом Маха  $(M = \frac{U_0}{c_s})$ , построенным по скорости набегающего потока ( $U_0$ ) и скорости звука ( $c_s$ ). Точечный гармонический источник  $Q = Q_0 \sin(\omega t)$  создает акустическую волну длиной  $\lambda = \frac{2\pi c_s}{\omega}$ .

Эта задача имеет аналитическое решение в рамках приближения линейной акустики. В этом приближении система уравнений Навье – Стокса с изотермическим уравнением состояния ( $\alpha, \beta, \gamma \in \{x, y\}$ ) –

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_\alpha (\rho u_\alpha) = Q \delta(\vec{r}), \\ \partial_t (\rho u_\alpha) + \partial_\beta (\rho u_\beta u_\alpha) = -\partial_\alpha p + \partial_\beta \left( \mu \left( \partial_\beta u_\alpha + \partial_\alpha u_\beta - \frac{2}{3} \delta_{\alpha\beta} \partial_\gamma u_\gamma \right) + \mu_b \delta_{\alpha\beta} \partial_\gamma u_\gamma \right) + Q u_\alpha \delta(\vec{r}), \\ p = \rho c_s^2 \end{cases} \quad (1)$$

— сводится к вязкому волновому уравнению:

$$\left( \frac{1}{c_s^2} \partial_t^2 - (1 + \tau_{vi} \partial_t) \partial_\alpha \partial_\alpha \right) p' = \partial_t Q \delta(\vec{r}), \quad (2)$$

где  $\mu$  и  $\mu_b = \frac{2}{3}\mu$  — коэффициенты динамической и объемной вязкости соответственно,  $p' = p - p_0$  — возмущения давления,  $\tau_{vi} = \frac{1}{c_s^2} \left( \frac{4}{3}\nu + \nu_b \right)$  — вязкое время релаксации, а источник  $Q u_\alpha \delta(\vec{r})$  в уравнении баланса импульса обеспечивает отсутствие источника импульса при наличии источника массы в потоке.

Аналитическое решение уравнения (2) в невязком случае ( $\tau_{vi} = 0$ ) имеет вид

$$p'_a = Re \left[ \left( \frac{1}{\psi} \Theta_0^{(2)} \left( \frac{k}{\psi} r_\psi \right) + i \frac{Mx}{r_\psi} \Theta_1^{(2)} \left( \frac{k}{\psi} r_\psi \right) \right) \frac{\omega Q_0}{4i\psi^2} e^{i(\omega t + M k x / \psi^2)} \right], \quad (3)$$

где  $\psi = \sqrt{1 - M^2}$ ,  $r_\psi = \sqrt{x^2 + \psi^2 y^2}$ ,  $k = \frac{\omega}{c_s}$ ,  $\Theta_0^{(2)}$  и  $\Theta_1^{(2)}$  — функции Ганкеля второго рода 0-го и 1-го порядков соответственно.

Рассматриваемая задача характеризуется тремя критериями подобия: числом Рейнольдса  $Re = \frac{1}{\tau_{vi} \omega}$ , числом Maxa  $M$  и безразмерной амплитудой источника  $Q'_0 = \frac{Q_0 \delta(\vec{r})}{\rho_0 \omega}$ .

Число Рейнольдса во всех расчетах было одинаковым и настолько большим (порядка  $10^8$ ), чтобы влияние вязкости на распространение акустических волн для выбранных параметров было пренебрежимо мало. Задача была рассмотрена при отсутствии потока ( $M = 0$ ) и при его наличии ( $M = 0,2$ ). Наконец, были рассмотрены три амплитуды источника  $Q'_0 = 1; 0,1; 0,01$ .

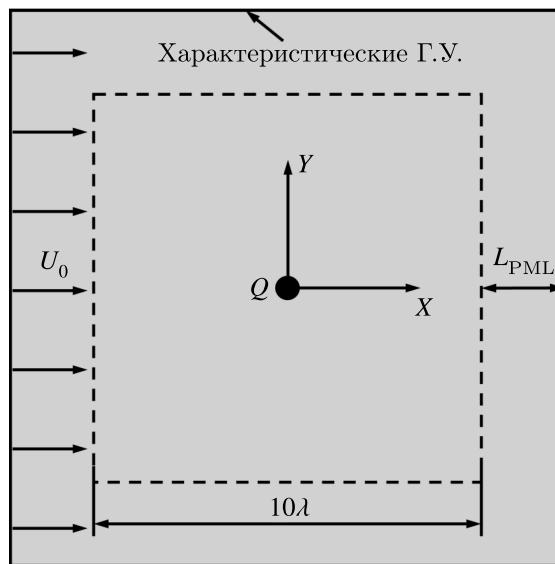


Рис. 1. Схема расчетной области:  $Q$  — источник акустических волн,  $\lambda$  — длина волны при отсутствии потока,  $U_0$  — скорость набегающего потока,  $L_{PML}$  — толщина демпфирующего слоя

Численная реализация гармонического источника осуществляется путем задания его в одном узле в центре расчетной области (рис. 1). Сама расчетная область имеет форму квадрата со стороной  $10\lambda$  и покрыта равномерной декартовой сеткой с шагом  $\Delta x$ .

## Используемая реализация метода решеточных уравнений Больцмана

Традиционно решеточное уравнение Больцмана (РУБ) записывают в безразмерном виде, при этом для обезразмеривания используются так называемые масштабы решетки: шаг по врем-

мени  $\Delta t$ , шаг по пространству  $\Delta x$  и характерная плотность  $\rho_0$ . Для простоты записи в данном разделе все переменные полагаются безразмерными, если не указано иное.

Решеточное уравнение Больцмана (РУБ) получается путем дискретизации модельных кинетических уравнений Бхатнагара – Гросса – Крука. Дискретизация в фазовом пространстве скоростей выполняется путем разложения функций распределения  $(f(\vec{r}, \vec{u}, t))$  по полиномам Эрми-та  $(H^{(n)})$  для заданного набора скоростей  $\vec{c}_i$  с весами  $w_i$ , обеспечивающего точное вычисление первых трех моментов.

Полученное таким образом дискретное по скоростям уравнение Больцмана дискретизируется по времени и пространству путем интегрирования вдоль характеристик методом трапеций. В результате, после замены переменной  $f_i \rightarrow f_i + \frac{\Omega_i + S_i}{2}$ , РУБ принимает вид

$$f_i(\vec{r} + \vec{c}_i, t + 1) - f_i(\vec{r}, t) = \Omega_i(\vec{r}, t) + S_i(\vec{r}, t). \quad (4)$$

Данное уравнение описывает процесс переноса функций распределения, которые были модифицированы оператором столкновений  $\Omega_i(\vec{r}, t)$  и источником  $S_i(\vec{r}, t)$ , в соседние узлы расчетной сетки вдоль соответствующих дискретных скоростей. Обычно этот процесс эволюции функций распределений реализуется в два шага:

$$\begin{aligned} \text{шаг столкновения: } & f_i^*(\vec{r}, t) = f_i(\vec{r}, t) + \Omega_i(\vec{r}, t) + S_i(\vec{r}, t); \\ \text{шаг переноса: } & f_i(\vec{r} + \vec{c}_i, t + 1) = f_i^*(\vec{r}, t). \end{aligned}$$

Переход к макроскопическим величинам может быть осуществлен путем взятия соответствующих моментов от функции распределения с учетом замены переменной:

$$\begin{aligned} \rho &= \sum_i f_i + \frac{1}{2} \sum_i S_i, \\ \rho \vec{u} &= \sum_i f_i \vec{c}_i + \frac{1}{2} \sum_i S_i \vec{c}_i, \\ \Pi &= \sum_i f_i \vec{c}_i \vec{c}_i + \frac{1}{2} \sum_i \frac{\Omega_i + S_i}{2} \vec{c}_i \vec{c}_i. \end{aligned}$$

Здесь  $\Pi$  – второй момент функции распределения, связанный с конвективным слагаемым и тензором напряжений в уравнение баланса импульса (1).

Следует отметить, что используемая традиционная формулировка метода решеточных уравнений Больцмана (4) предполагает, что за один шаг по времени функция распределения передается в соседний узел сетки. Это приводит к необходимости использовать равномерную по пространству сетку и целочисленные значения дискретных скоростей:

$$|c_i|_\alpha \in \mathbb{Z}. \quad (5)$$

Кроме того, безразмерная скорость звука ( $c'_s$ ) в LBM является постоянной величиной, конкретное значение которой зависит от выбранного набора скоростей. Откуда следует еще одно условие на шаги по времени и пространству, которое в размерном виде может быть записано следующим образом:

$$\Delta t = \frac{c'_s \Delta x}{c_s}. \quad (6)$$

Таким образом, шаги по времени и пространству должны выбираться такими, чтобы удовлетворять условиям (5) и (6).

### Модель скоростей

Выбор модели скоростей в РУБ во многом определяет точность описания моделируемых процессов, а также устойчивость метода. В настоящей работе используется наиболее часто применяемый для двумерных задач набор скоростей D2Q9, характеристики которого (набор  $\vec{c}_i$  и  $w_i$ ) представлены в таблице 1 [Kruger et al., 2017]. Данный набор со вторым порядком точности восстанавливает систему уравнений Навье – Стокса для слабосжимаемых течений.

Таблица 1. Набор скоростей D2Q9.  $\vec{c}_i$  — вектор скорости,  $w_i$  — весовой коэффициент

$i$	$\vec{c}_i$	$w_i$
1	(0, 0)	$\frac{4}{9}$
$2 \div 5$	$(0, \pm 1), (\pm 1, 0)$	$\frac{1}{9}$
$6 \div 9$	$(\pm 1, \pm 1)$	$\frac{1}{36}$

Безразмерная величина скорости звука для данной решетки равна  $c_s = \frac{1}{\sqrt{3}}$ , в результате выражение (6) примет вид

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{\sqrt{3}c_s}. \quad (7)$$

### Оператор столкновений

В кинетической теории оператор столкновений имеет сложную форму, зависящую от типа столкновений и других факторов, что вынуждает использовать упрощенные модели. В настоящей работе используется наиболее популярная модель оператора столкновений Бхатнагара – Гросса – Крука (BGK) [Коган, 1967]:

$$\Omega_i(\vec{r}, t) = -\frac{f_i(\vec{r}, t) - f_i^{\text{eq}}(\vec{r}, t)}{\tau}.$$

Данный оператор был приближенно получен в предположении, согласно которому функция распределения приходит к своему равновесному состоянию  $f_i^{\text{eq}}$  за время релаксации  $\tau$ . Здесь равновесное распределение определяется как

$$f^{\text{eq}} = w_i \rho \left( 1 + \frac{c_{i\alpha} u_\alpha}{c_s^2} + \frac{u_\alpha u_\beta (c_{i\alpha} c_{i\beta} - c_s^2 \delta_{\alpha\beta})}{2c_s^4} \right), \quad (8)$$

где  $\delta_{\alpha\beta}$  — символ Кронекера.

### Модель источника

Существует большое количество вариантов задания источников для РУБ, однако, как было показано в работе [Huang et al., 2011], все они с точностью порядка  $O(u^3)$  или  $O(Q^2 u_\alpha^2)$  одинаковы. В рамках настоящего исследования была использована наиболее популярная схема Gou [Guo et al., 2002]:

$$S_i = \left( 1 - \frac{1}{2\tau} \right) F_i,$$

$$F_i = w_i \left( Q \delta(\vec{r}) + \left( \frac{c_{i\alpha} c_{i\beta} - c_s^2 \delta_{\alpha\beta}}{c_s^2} + \frac{c_{i\alpha} c_{i\beta} - c_s^2 \delta_{\alpha\beta}}{c_s^4} u_\beta \right) Q u_\alpha \delta(\vec{r}) \right).$$

## Регуляризация

Наличие источника приводит к паразитным возмущениям в моментах старших порядков, что приводит к появлению осцилляций в решении [Viggen, 2013]. Для того чтобы убрать данный шум, используется процедура регуляризации. Ее идея заключается в корректировке функций распределений, так чтобы они точно восстанавливали макроскопические уравнения. В традиционной регуляризации этого добиваются путем зануления моментов старше второго порядка [Latt, Chopard, 2006]. Альтернативный подход — рекурсивная регуляризация [Malaspinas, Chopard, 2015], в которой моменты разных порядков связываются через рекуррентное соотношение. Повышенная устойчивость данной регуляризации была показана в последующих исследованиях [Wissocq et al., 2020; Iljin, 2022]. В настоящей работе используется рекурсивная регуляризация, для которого рекуррентное соотношение в изотермическом случае имеет вид

$$\begin{aligned} a_{0,\alpha_1,\dots,\alpha_n}^{(n)} &= a_{0,\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1}}^{(n-1)} u_{\alpha_n}, \quad a_0^{(0)} = \rho, \\ a_{1,\alpha_1,\dots,\alpha_n}^{(n)} &= a_{1,\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1}}^{(n-1)} u_{\alpha_n} + \left( u_{\alpha_1} \dots u_{\alpha_{n-2}} a_{1,\alpha_{n-1}\alpha_n}^{(2)} + \text{perm}(a_{\alpha_n}) \right), \quad n \geq 3. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь  $a_{0,\alpha_1,\dots,\alpha_n}^{(n)}$  и  $a_{1,\alpha_1,\dots,\alpha_n}^{(n)}$  — моменты  $n$ -го порядка, соответствующие равновесной и неравновесной частям функции распределения ( $f_i^{\text{neq}} = f_i - f_i^{\text{eq}}$ ).

Из соотношения (9) для набора скоростей D2Q9 можно вывести следующую функцию распределения:

$$\begin{aligned} f_i^{\text{eq}} &= w_i \rho \left( 1 + \frac{\vec{c}_i \cdot \vec{u}}{c_s^2} + \frac{1}{2c_s^4} H_i^{(2)} : \vec{u}\vec{u} + \frac{1}{2c_s^6} (H_{ixxy}^{(3)} u_x^2 u_y + H_{ixyy}^{(3)} u_x u_y^2) + \frac{1}{4c_s^8} H_{ixxyy}^{(4)} u_x^2 u_y^2 \right), \\ f_i^{\text{neq}} &= w_i \left( \frac{1}{2c_s^4} H_i^{(2)} : a_1^{(2)} + \frac{1}{2c_s^6} (H_{ixxy}^{(3)} a_{1,xx}^{(3)} + H_{ixyy}^{(3)} a_{1,xy}^{(3)}) + \frac{1}{4c_s^8} H_{ixxyy}^{(4)} a_{1,xxy}^{(4)} \right). \end{aligned} \quad (10)$$

Как видно, в отличие от функции распределения (8) в функции распределения (10), полученной с использованием рекурсивной регуляризации, сохраняются несколько моментов высокого порядка, которые могут быть описаны решеточной моделью. Это позволяет обеспечить выполнение рекуррентного соотношения для всех моментов, разрешаемых решеткой.

В используемом численном алгоритме регуляризация выполняется перед шагом столкновения во всех узлах, кроме источника.

Определив формулировку метода решеточных уравнений Больцмана, важно убедиться, что она верно воспроизводит рассматриваемые уравнения в макроскопическом пределе, для чего применяется анализ Чепмена — Энгскога. Из данного анализа следует, что представленные выше решеточные уравнения (4) соответствуют (1) при малых числах Маха и  $\tau \rightarrow 0,5$ . Из этого анализа также следует прямая связь между коэффициентом кинематической вязкости и временем релаксации:

$$\nu = c_s^2 \left( \tau - \frac{1}{2} \right).$$

## Реализация неотражающих граничных условий

Одной из проблем, возникающих при решении рассматриваемой задачи, является отражение распространяющихся возмущений от границ расчетной области. Одним из возможных вариантов решения этой проблемы является завершение расчета до достижения волновой границы расчетной области (см., например, [Viggen, 2013; Zhuo, Sagaut, 2017]). В данной работе используется более строгий подход, опирающийся на характеристические граничные условия в совокупности с поглощающими слоями и предусматривающий расчет до получения периодического по времени решения.

### **Характеристические граничные условия**

Характеристические граничные условия основаны на существовании так называемых инвариантов  $I_k$ , которые сохраняются вдоль определенных линий в четырехмерном пространстве-времени, называемых характеристиками. В зависимости от того, с какой стороны характеристики пресекают свободные границы расчетной области с течением времени, на каждой из этих границ инварианты делятся на уходящие и приходящие. Идея характеристических условий заключается в том, что на свободных границах приходящие инварианты задаются, а уходящие экстраполируются из расчетной области.

Применяемые в работе условия основаны на инвариантах Римана для одномерного течения в направлении по нормали к границе области и являются адаптацией характеристических граничных условий, используемых для конечно-объемных методов [Hirsch, 1991]. Не умаляя общности, можно считать, что внешняя нормаль границы направлена вдоль оси  $X$ . В этом случае инварианты определяются формулами

$$\begin{aligned} I_1 &= c_s \ln \rho - u_x, \\ I_2 &= u_y, \\ I_3 &= c_s \ln \rho + u_x, \end{aligned}$$

а тип инварианта определяется знаком соответствующей каждому инварианту величины  $\lambda$  (положительный знак соответствует уходящим инвариантам, а отрицательный — приходящим):

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= u_x - c_s, \\ \lambda_2 &= u_x, \\ \lambda_3 &= u_x + c_s. \end{aligned}$$

Таким образом, на каждой границе определяется все три инварианта. Обратное восстановление макроскопических величин из инвариантов осуществляется по формулам

$$\begin{aligned} \rho &= \exp\left(\frac{I_1 + I_3}{c_s}\right), \\ u_x &= \frac{I_3 - I_1}{2}, \\ u_y &= I_2. \end{aligned}$$

Переход от макроскопических величин к функциям распределений производится с использованием нерегуляризованной равновесной функции распределения (8).

### **PML-слой**

К сожалению, использование характеристических граничных условий недостаточно для полного предотвращения отражения акустических волн от границ расчетной области. Чтобы полностью исключить это отражение, в работе использовался демпфирующий PML-слой, который реализуется путем добавления источника  $\Omega_{PML,i}(\vec{r}, t)$  в уравнение (4) [Najafi-Yazdi, Mongeau, 2012]:

$$\Omega_{PML,i} = -\left(\sigma c_{i\alpha} \partial_\alpha \Phi_i + 2\sigma \bar{f}_i^{\text{eq}} + \sigma^2 \Phi_i\right),$$

где  $\bar{f}_i^{\text{eq}}$  — равновесная часть возмущенного течения ( $f_i = \bar{f}_i^{\text{eq}} + \tilde{f}_i^{\text{eq}} + f_i^{\text{neq}}$ ), а  $\Phi_i$  вычисляется по формуле

$$\Phi_i(\vec{r}, t_0 + 1) = \tilde{f}_i^{\text{eq}}(\vec{r}, t_0).$$

Это выражение получается путем интегрирования выражения

$$\partial_t \Phi_i = \tilde{f}_i^{\text{eq}}$$

по времени на интервале  $[t_0, t_0 + 1]$  с первым порядком точности, полагая  $\Phi_i(\vec{r}, t_0) = 0$ .

Величина демпфирующего коэффициента  $\sigma > 0$  зависит от координаты: его значение отлично от 0 в том случае, когда расстояние от рассматриваемой точки до границы  $d$  меньше параметра  $L_{\text{PML}}$  и равно в этом случае  $\sigma = \sigma_{\max} \left(1 - \frac{d}{L_{\text{PML}}}\right)^2$ . Величины  $L_{\text{PML}}$  и  $\sigma_{\max}$  являются параметрами демпфирующего слоя, и их влияние исследовано ниже.

## Результаты расчетов

Рассмотрим решение при  $\frac{\lambda}{\Delta x} = 28,9$ ,  $Q'_0 = 0,1$ . Поскольку шаг по времени определяется выражением (7), при выбранной сетке на период волны приходится 50 шагов по времени. Параметры демпфирующего слоя задавались равными  $\sigma_{\max} = 0,05$ ,  $L_{\text{PML}} = 4\lambda$ .

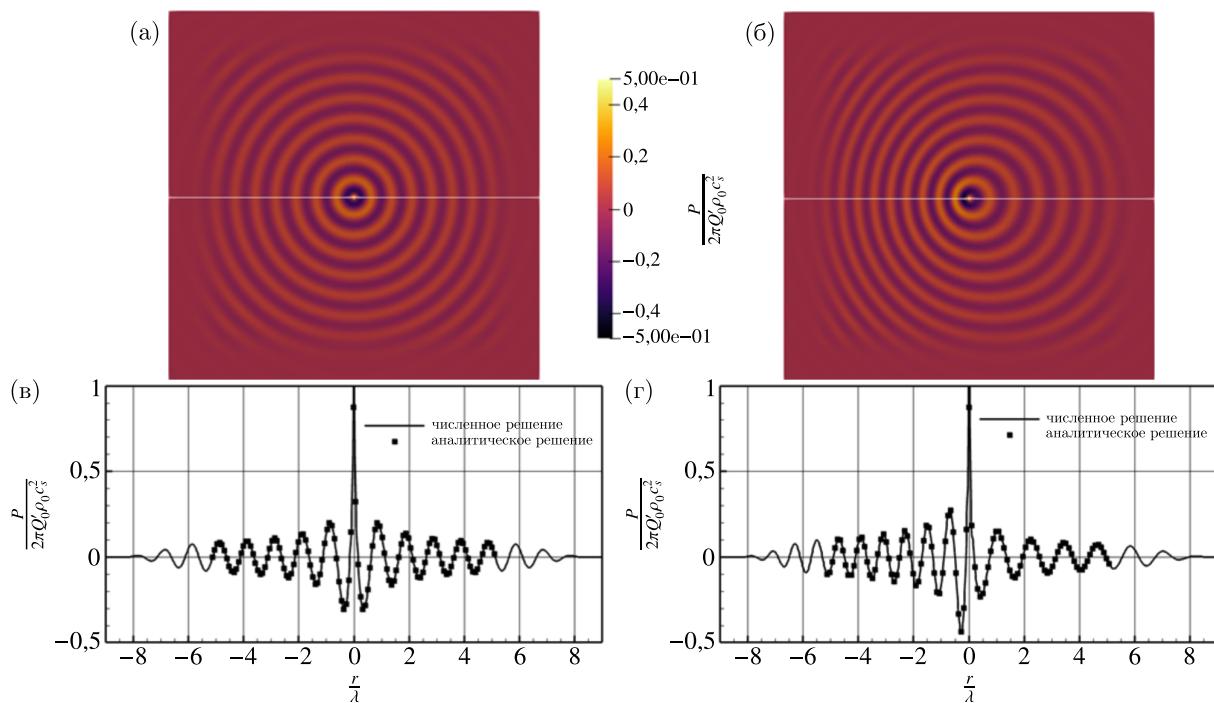


Рис. 2. Пример поля безразмерного давления при  $M = 0$  (а),  $M = 0,2$  (б) и профиля безразмерного давления при  $M = 0$  (в),  $M = 0,2$  (г)

Полученное решение для обоих чисел Маха представлено на рис. 2. На мгновенных полях безразмерного давления  $\left(\frac{p}{2\pi Q'_0 \rho_0 c_s^2}\right)$  отчетливо видна волновая картина в виде окружностей, расходящихся от источника. Как и следовало ожидать, однородный поток вызывает смещение окружностей в направлении течения (рис. 2, б). Это приводит к увеличению длины волны вниз по потоку от источника и ее уменьшению вверх по потоку, что хорошо видно на рис. 2, г.

Видно, что полученное решение хорошо совпадает с аналитическим для обоих расчетов, а погрешность вычисляется как среднее значение отклонения от аналитического решения на

интервале  $2\lambda$ , отстоящего по обе стороны от источника на расстоянии  $\lambda$ , что соответствует следующей формуле:

$$\text{Error} = \frac{1}{4\lambda} \sum_{|x|=\lambda}^{3\lambda} \frac{|p' - p'_a|}{|p'_a|}. \quad (11)$$

Погрешность для  $M = 0,2$  и 0 равна соответственно 0,47 % и 0,53 %.

Ниже представлены результаты исследования влияния параметров PML-слоя  $L_{\text{PML}}$  и  $\sigma_{\max}$ , величины амплитуды источника  $Q'_0$  и шага сетки  $\Delta x$  на получаемое решение для обоих чисел Маха.

### **Влияние параметров PML-слоя**

Выбор параметров PML-слоя весьма важен для эффективного подавления отражения возмущений и определяется следующими соображениями. При недостаточной величине коэффициента демпфирования PML-слой оказывается неэффективным. С другой стороны, излишне быстрый рост коэффициента демпфирования внутри поглощающего слоя приводит к отражению возмущений от самого PML-слоя [Najafi-Yazdi, Mongeau, 2012]. Наконец, увеличение толщины слоя, позволяющее уменьшить градиент коэффициента демпфирования, ведет к увеличению расчетной области и, как следствие, к увеличению вычислительных затрат.

Зависимость ошибки, определенной по формуле (11), от коэффициента демпфирования при  $L_{\text{PML}} = 4\lambda$  и от толщины PML-слоя для  $\sigma = 0,05$  представлена на рис. 3, а и 3, б соответственно. Видно, что характер зависимости на обоих рисунках не зависит от числа Маха, и при достижении определенных значений параметров оба графика выходят на постоянное значение. Так, при  $\sigma_{\max} \geq 0,02$  и  $L_{\text{PML}} \geq 2\lambda$  решение перестает зависеть от обоих рассмотренных параметров, что и определяет условия, которым должны удовлетворять параметры PML-слоя.

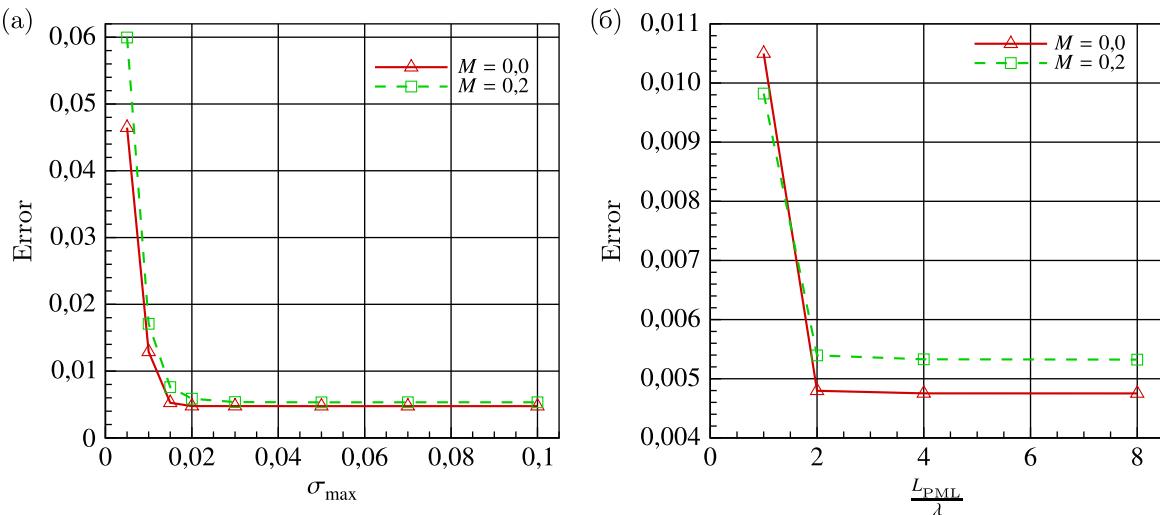


Рис. 3. Влияние величины максимального коэффициента демпфирования (а) и толщины демпфируемого слоя на ошибку расчета (б)

### **Влияние амплитуды источника**

Как было показано на рис. 3, даже при использовании достаточных PML-слоев величина ошибки не падает ниже 0,47 % и 0,53 % для  $M = 0$  и  $0,2$  соответственно. Одной из возможных причин различия численного и аналитического решений может быть влияние нелинейных эффектов из-за большой амплитуды источника.

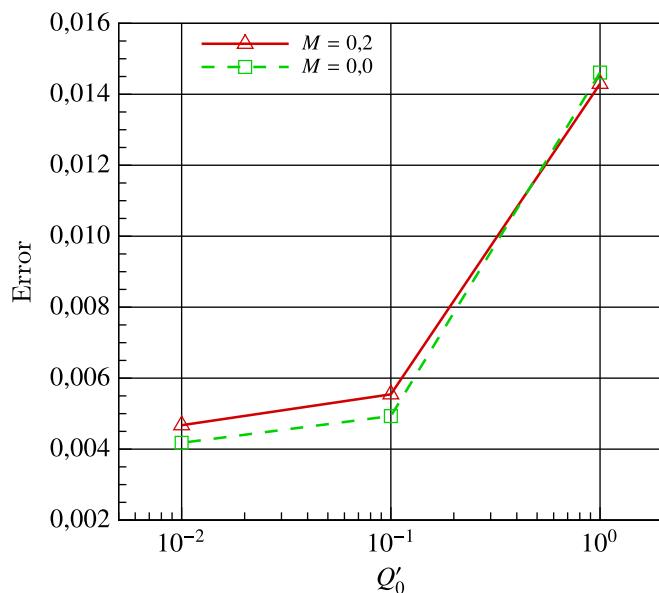


Рис. 4. Влияние амплитуды источника на ошибку расчета

Из рис. 4 видно, что зависимость ошибки от амплитуды источника практически не зависит от числа Маха. Также при  $Q'_0 \leq 0,1$  величина ошибки перестает зависеть от амплитуды, и, соответственно, влияние нелинейных эффектов можно считать малым по сравнению с другими источниками ошибки.

Полученный результат согласуется с оценкой величины нелинейных эффектов, использовавшихся при получении аналитического решения (3). Согласно этим оценкам порядок величины этого вклада достигает  $\frac{\omega Q_0}{\rho_0 c_s^2}$ , что составляет примерно 5 % для  $Q'_0 = 1$  и 0,5 % для  $Q'_0 = 0,1$ .

### Влияние шага расчетной сетки

Исследование влияния шага расчетной сетки проводилось при параметрах PML-слоя  $\sigma_{\max} = 0,05$  и  $L_{\text{PML}} = 4\lambda$  и при амплитуде источника  $Q'_0 = 0,1$ . Как и в предыдущих случаях, величина ошибки слабо зависит от числа Маха (см. рис. 5). Видно, что ошибка пропорциональна квадрату шага сетки, то есть используемый метод имеет второй порядок точности.

Другой важной характеристикой метода является количество точек расчетной сетки, необходимое для разрешения одной волны колебаний, поскольку именно этот параметр определяет вычислительные затраты. Видно, что при использовании метода РУБ высокая точность (погрешность — менее 1 %) обеспечивается при использовании 20 точек на длину волны.

## Заключение

Проведено систематическое исследование возможностей метода решеточных уравнений Больцмана для описания распространения акустических волн на примере решения задачи о распространении волны от точечного гармонического источника акустических возмущений в неограниченном пространстве при числе Рейнольдса  $O(10^8)$ .

Установлено, что параметры PML-слоя оказывают существенное влияние на уровень отраженных волн, и определены минимальные допустимые значения коэффициента демпфирования ( $\sigma_{\max} \geq 0,02$ ) и толщины слоя ( $L_{\text{PML}} \geq 2\lambda$ ).

Исследование зависимости ошибки от амплитуды источника показало, что при  $Q'_0 > 0,1$  нелинейные эффекты становятся заметными, что согласуется с аналитической оценкой.

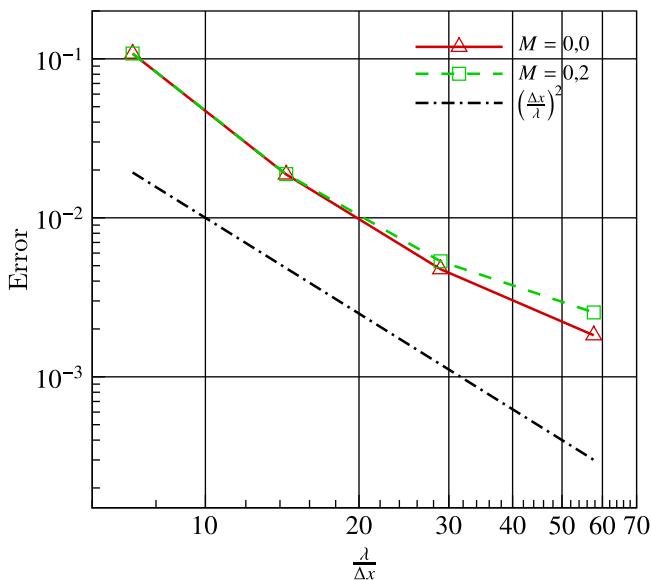


Рис. 5. Влияние шага расчетной сетки на ошибку расчета

Показано, что используемый метод имеет второй порядок точности. При описании распространяющихся в пространстве волн для обеспечения относительной погрешности менее 1 % необходимо использовать сетку с шагом, составляющим не менее  $\frac{1}{20}$  длины рассматриваемой волны.

Полученные результаты свидетельствуют о возможности использования метода РУБ на первом этапе двухэтапного подхода для решения задач аэроакустики. Определены параметры метода, обеспечивающие высокую точность расчета распространения аэроакустических волн. Дальнейшая работа будет направлена на определение параметров метода РУБ, обеспечивающих высокую точность расчета акустического источника.

## Список литературы (References)

- Kogan M. N.* Динамика разреженного газа. — М.: Наука, 1967. — 440 с.  
*Kogan M. N.* Rarefied gas dynamics: kinetic theory. — New York: Plenum Press, 1969. — 515 p. (Russ. ed.: *Kogan M. N.* Dinamika razrezhennogo gaza: kineticheskaya teoriya. — Moscow: Nauka, 1967. — 440 p.)
- Farassat F., Myers M. K.* Extension of Kirchho's formula to radiation from moving surfaces // Journal of Sound and Vibration. — 1988. — Vol. 123, No. 3. — P. 451–460. — DOI: 10.1016/S0022-460X(88)80162-7
- Ffowcs Williams J. E., Hawking D. L.* Sound generated by turbulence and surfaces in arbitrary motion // Philosophical Transactions of the Royal Society. — 1961. — Vol. A264, No. 1151. — P. 321–342. — DOI: 10.1098/rsta.1969.0031
- Guo Z., Chuguang Z., Baochang S.* Discrete lattice effects on the forcing term in the lattice Boltzmann method // Phys. Rev. E. — 2002. — Vol. 65. — P. 46308. — DOI: 10.1103/PhysRevE.65.046308
- Hirsch C.* Numerical computation of internal and external flows. — Vol. 2. Computational methods for inviscid and viscous flows. — Chichester: John Wiley & Sons, 1991. — 672 p.
- Huang H., Krafczyk M., Lu X.* Forcing term in single-phase and Shan–Chen-type multiphase lattice Boltzmann models // Phys. Rev. E. — 2011. — Vol. 84, No. 4. — P. 046710. — DOI: 10.1103/PhysRevE.84.046710
- Ilyin O.* Discrete-velocity Boltzmann model: Regularization and linear stability // Phys. Rev. E. — 2022. — Vol. 105. — P. 045312. — DOI: 10.1103/PhysRevE.105.045312

- Kruger T., Kusumaatmaja H., Kuzmin A., Shardt O., Silva G., Viggen E.* The lattice Boltzmann method. Principles and practice. — Cham: Springer, 2017. — 403 p.
- Latt J., Chopard C.* Lattice Boltzmann method with regularized pre-collision distribution functions // Mathematics and Computers in Simulation. — 2006. — Vol. 72. — P. 165–168. — DOI: 10.1016/j.matcom.2006.05.017
- Malaspinas O., Chopard C.* Increasing stability and accuracy of the lattice Boltzmann scheme: recursivity and regularization // arXiv: Fluid Dynamics. — 2015. — DOI: 10.48550/arXiv.1505.06900
- Marié S., Ricot D., Sagaut P.* Comparison between lattice Boltzmann method and Navier–Stokes high order schemes for computational aeroacoustics // J. Comput. Phys. — 2009. — Vol. 228. — P. 1056–1070. — DOI: 10.1016/j.jcp.2008.10.021
- Najafi-Yazdi A., Mongeau L.* An absorbing boundary condition for the lattice Boltzmann method based on the perfectly matched layer // Computers & Fluids. — 2012. — Vol. 68. — P. 203–218. — DOI: 10.1016/j.compfluid.2012.07.017
- Suss A., Mary I., Garrec T., Marié S.* Comprehensive comparison between the lattice Boltzmann and Navier–Stokes methods for aerodynamic and aeroacoustic applications // Computers & Fluids. — 2023. — Vol. 257. — P. 105881. — DOI: 10.1016/j.compfluid.2023.105881
- Viggen E. M.* Acoustic multipole sources for the lattice Boltzmann method // Phys. Rev. E. — 2013. — Vol. 87. — P. 023306. — DOI: 10.1103/PhysRevE.87.023306
- Wissocq G., Coreixas C., Boussuge J.-F.* Linear stability and isotropy properties of athermal regularized lattice Boltzmann methods // Phys. Rev. E. — 2020. — Vol. 102. — P. 053305. — DOI: 10.1103/PhysRevE.102.053305
- Zhuo C., Sagaut P.* Acoustic multipole sources for the regularized lattice Boltzmann method: Comparison with multiple-relaxation-time models in the inviscid limit // Phys. Rev. E. — 2017. — Vol. 95. — P. 063301. — DOI: 10.1103/PhysRevE.95.063301