

Задачи расчета техногенных вибраций в условиях городской среды с использованием сеточно-характеристического метода

М. К. Горковец^{1,а}, А. В. Фаворская^{1,2,б}, И. Б. Петров^{1,2,с}

¹Московский физико-технический институт,
Россия, 141700, Московская область, г. Долгопрудный, Институтский переулок, д. 9

²Университет Иннополис,
Россия, 420500, г. Иннополис, ул. Университетская, д. 1

E-mail: ^а gorkovets.mk@phystech.edu, ^б aleanera@yandex.ru, ^с petrov@mipt.ru

Получено 21.07.2025, после доработки – 02.11.2025.
Принято к публикации 11.11.2025.

В условиях интенсивного развития мегаполисов и крупных городов во всех странах мира растет воздействие техногенных вибраций на жилые сооружения и инфраструктуру. Эксплуатация метро, строительство свайным и буровым оборудованием, движение тяжелого транспорта становятся активными источниками волновых возмущений, которые могут являться решающим фактором снижения устойчивости зданий и, соответственно, длительности надежной эксплуатации. В статье приведены результаты численных расчетов с использованием сеточно-характеристического метода для моделирования проходящих через грунтовые породы и несущие конструкции упругих волн от источников различной природы. С помощью полученных решений прямой задачи численного моделирования импульса и варьированием его местонахождения получены значения компонент вектора скорости и тензора напряжений Коши в каждый момент времени. В работе рассматривались две постановки: первая моделирует воздействие вибраций, возникающих в результате строительных работ или движения по транспортным магистралям, располагающимся рядом с постройкой; вторая показывает, как вибрации от движения поездов метрополитена в подземном тоннеле действуют на многоквартирные дома. Были получены визуализации распространения волн от различных источников, благодаря которым можно быстро и удобно проводить комплексное исследование задачи. Анализ полученных данных позволяет скорректировать сроки и виды ремонтных работ, выявить слабые места в конструкции, разработать улучшенные методики сохранения исторических зданий, являющихся объектами культурного наследия, в том числе даст возможность наиболее экономически оптимальным способом производить строительство современных сооружений в окружении архитектурных памятников, представить эффективный и безопасный порядок действий в случае возникновения чрезвычайных ситуаций, а также модернизировать существующие строительные технологии для повышения уровня комфорта жилых зданий, офисных построек и других социально-значимых объектов, выбирать наиболее подходящие локации для строительства современных высокоточных производств.

Ключевые слова: численное моделирование, сеточно-характеристический метод, вибрации городских территорий, техногенное воздействие, строительство, устойчивость

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-11-00035 (<https://rscf.ru/project/23-11-00035/>).

UDC: 519.6

Calculating technogenic vibrations in urban environments using grid-characteristic method

M. K. Gorkovets^{1,a}, A. V. Favorskaya^{1,2,b}, I. B. Petrov^{1,2,c}

¹Moscow Institute of Physics and Technology,
9 Institytsky pereulok, Dolgoprudny, Moscow Region, 141700, Russia

²Innopolis University,
1 Universitetskaya st., Innopolis, 420500, Russia

E-mail: ^a gorkovets.mk@phystech.edu, ^b aleanera@yandex.ru, ^c petrov@mipt.ru

Received 21.07.2025, after completion — 02.11.2025.

Accepted for publication 11.11.2025.

Amid the ongoing trend of rapid urbanization and the intensive development of megacities and large cities worldwide, the impact of man-made vibrations on residential structures and infrastructure is increasing. The operation of subway systems, construction using pile-driving and drilling equipment, and heavy traffic have become active sources of wave disturbances, which can be a decisive factor in reducing the structural stability of buildings and, consequently, their long-term reliability. This paper proposes a numerical calculation using the grid-characteristic method to model elastic waves propagating through soil layers and load-bearing structures from various sources. By solving the direct problem of numerical pulse simulation and varying its location, the values of velocity vector projections and components of the Cauchy stress tensor were obtained at each time step. Two scenarios were examined: the first simulates the impact of noise generated by construction work or nearby traffic, while the second demonstrates how a subway running through an underground tunnel affects multi-story residential buildings. Wave propagation patterns from these sources were visualized in terms of the parameters of interest, enabling a quick and convenient comprehensive analysis of the problem. The analysis of the obtained data will help adjust the timing and types of repair work, identify structural weak points, and develop innovative methods for preserving historical buildings that are cultural heritage sites. Additionally, it will allow for the most economically optimal construction of modern buildings near architectural landmarks, provide an efficient and safe action plan in emergencies, and modernize existing construction technologies to enhance the comfort of residential buildings, office structures, and other socially significant facilities. It will also aid in selecting the most suitable locations for modern high-precision manufacturing plants.

Keywords: numerical modeling, grid-characteristic method, urban vibrations, technogenic impact, construction, stability

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2025, vol. 17, no. 6, pp. 1119–1129 (Russian).

The research was supported by the Russian Science Foundation grant No. 23-11-00035 (<https://rscf.ru/project/23-11-00035/>).

Введение

Развитие современной городской инфраструктуры является серьезным вызовом в нынешних темпах урбанизации и создания крупных городских агломераций, таких как Москва или Санкт-Петербург. Условия плотной городской, зачастую исторической, застройки создают сложную среду для распространения упругих волн [Smith, Rose, 2006]. В связи с чем целесообразно использовать численные методы для изучения их распространения и анализа последствий для объектов инфраструктуры [Никитин и др., 2013].

Получаемые с помощью численного моделирования данные можно совмещать с испытаниями на вибростенде [Cheng et al., 2025], полученные данные отлично согласуются [Liu et al., 2020; Cheng et al., 2018], что позволяет этим способам исследований быть взаимозаменяемыми и существенно сокращать временные и экономические расходы на проведение разработок.

В настоящей работе рассматривается применение сеточно-характеристического метода (СХМ) [Куликовский и др., 2001; Магомедов, Холодов, 2006; Favorskaya, Petrov, 2018] к решению задач расчета техногенных вибраций как одного из наиболее эффективных подходов, который позволяет успешно решать системы гиперболических уравнений [Lax, 2006]. Спектр задач, к которым может быть применен СХМ, достаточно широк и не ограничивается геофизическими постановками. К примеру, сеточно-характеристический метод активно используется для исследования усталостного разрушения [Khalid et al., 2025] и гидродинамики [Симаков, Холодов, 2008; Vasilevskii et al., 2011], а его модификации — для разрешения отдельных вопросов гидродинамики [Kelly, Dodd, 2009].

Упругое волновое уравнение будет решаться в линейном приближении. Стоит отметить, что моделируемая задача в полной постановке механики сплошной деформируемой среды требует существенных затрат вычислительных ресурсов. Поэтому мы исследуем вопрос в двумерной постановке, а трехмерная постановка будет являться предметом дальнейших исследований. При этом, несмотря на то что рассеяние упругих волн в двумерном случае, безусловно, отличается от рассеяния упругих волн в трехмерном, характер волновых процессов и его качественные, но не количественные, характеристики во многом схожи. Таким образом, двумерные расчеты также представляют научный интерес не только как этап разработки численного метода, но и для анализа рассматриваемых физических явлений.

Существуют различные подходы к моделированию распространения волнового фронта. Метод спектральных элементов демонстрирует высокое качество аппроксимации и стал одним из основных инструментов в трехмерной сейсмологии, где требуется учет сложных эффектов, таких как вращение Земли, влияние океанов и кривизны среды [Komatitsch, Tromp 1999; Xing et al., 2021]. Его главное достоинство — удобство работы с произвольной геометрией и высоким порядком аппроксимации; вместе с тем на простых задачах он нередко уступает сеточно-характеристическому методу из-за дополнительных сложностей при реализации, таких как выбор степеней полинома, учет межэлементных связей и большей вычислительной нагрузки при невысокой геометрической сложности модели [Komatitsch et al., 2005]. Комбинация спектральных элементов с классическими конечными элементами частично снимает проблемы дискретизации и дает решения, сопоставимые с другими высокопорядковыми методами конечных элементов [Davoodi et al., 2018; Kolman et al., 2017; Dyczec et al., 2014], в том числе в гетерогенных средах [Joulaian et al., 2014]. Новые гибридные подходы, например гибридный безэлементный метод Галёркина (HEFG) и его модификации, показывают заметные преимущества по точности и скорости по сравнению с некоторыми безэлементными методами (IEFG) в трехмерных задачах [Cheng et al., 2022; Meng et al., 2019], а гибридные версии разрывного метода Галёркина расширяют арсенал мощных схем для решения волновых задач [Wang et al., 2014; Fernandez et al., 2018; Uphoff et al., 2023]. Вместе с тем ряд работ по сеточно-характеристическому методу

подчеркивает его практическую эффективность для типичных задач сейсморазведки и инженерной сейсмологии: на структурированных сетках этот метод обеспечивает простую и стабильную реализацию, хорошую обработку характерных особенностей волнового поля и экономию вычислительных ресурсов по сравнению с высокопорядковыми или гибридными схемами [Петров и др., 2015; Favorskaya, Petrov, 2018]. Аналогично: комбинированные и разрывные схемы повышают устойчивость и гибкость дискретизации, но могут требовать более сложной настройки по сравнению с сеточно-характеристическим подходом [Ладонкина и др., 2021; Петров и др., 2013]. Метод конечных сфер (method of finite spheres) и другие нетипичные подходы расширяют возможности моделирования в специальных постановках [Ham et al., 2014], однако при выборе метода для практических инженерных задач целесообразно соотнести достоинства спектральных, гибридных и дискретных высокопорядковых схем с проверенной простотой, надежностью и эффективностью сеточно-характеристического метода, позволяющего решать задачи численного моделирования даже в условиях ограниченности вычислительных ресурсов [Фаворская, Петров, 2020; Стогний, Петров, 2020].

За последние годы с помощью СХМ были проведены исследования по направлениям, связанным с последствиями, возникающими при воздействии землетрясений на сооружения. Разработанные способы расчета на основе системы вложенных иерархических сеток [Петров и др., 2017] позволили получить картину разрушений в зданиях и исследовать их зависимость от глубины залегания очага, а расчеты на основе структурированных сеток — исследовать зависимость от высоты сооружения [Фаворская, Петров, 2020]. Возможность комбинирования классических декартовых сеток и сеток других форм значительно расширяет спектр решаемых задач. Например, совмещение с криволинейными структурированными сетками позволяет моделировать актуальные проблемы освоения Арктики и сейсморазведки [Петров и др., 2015; Голубев, Хохлов, 2018].

Постановки задач

Для описания распространения волн в таких средах, как грунт, дорожное покрытие и бетонная конструкция здания, использовались локальное уравнение движения и закон Гука:

$$\rho \partial_t \mathbf{v} = (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma})^T, \quad (1)$$

$$\partial_t \boldsymbol{\sigma} = \lambda (\nabla \cdot \mathbf{v}) \mathbf{I} + \mu (\nabla \otimes \mathbf{v} + (\nabla \otimes \mathbf{v})^T), \quad (2)$$

где ρ — плотность среды, \mathbf{v} — ее локальная скорость движения, $\boldsymbol{\sigma}$ — тензор напряжений Коши, λ и μ — параметры Ламе, ∇ — вектор-градиент, $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ — тензорное произведение векторов.

Рассматривались две постановки. Первая моделирует вибрации от располагающихся рядом с многоэтажным домом мест проведения строительных и ремонтных работ, транспортных потоков (трамвайных или железнодорожных путей, автодорог). Вторая позволяет оценить распространение волн от поездов, проезжающих в расположенной в грунте инфраструктуре метро. Принципиальные схемы расположения расчетных декартовых сеток приведены на рис. 1.

Сплошной линией a на рис. 1 обозначена свободная граница (условие равенства нулю произведения тензора напряжений на вектор внешней нормали к поверхности):

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = 0; \quad (3)$$

пунктиром c — контактное условие полного слипания (равенство скоростей и произведений тензоров напряжения на соответствующий вектор нормали к поверхности на границе):

$$\mathbf{v}^1 = \mathbf{v}^2, \quad (4)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^1 \cdot \mathbf{n} = \boldsymbol{\sigma}^2 \cdot \mathbf{n}; \quad (5)$$

b — неотражающее граничное условие.

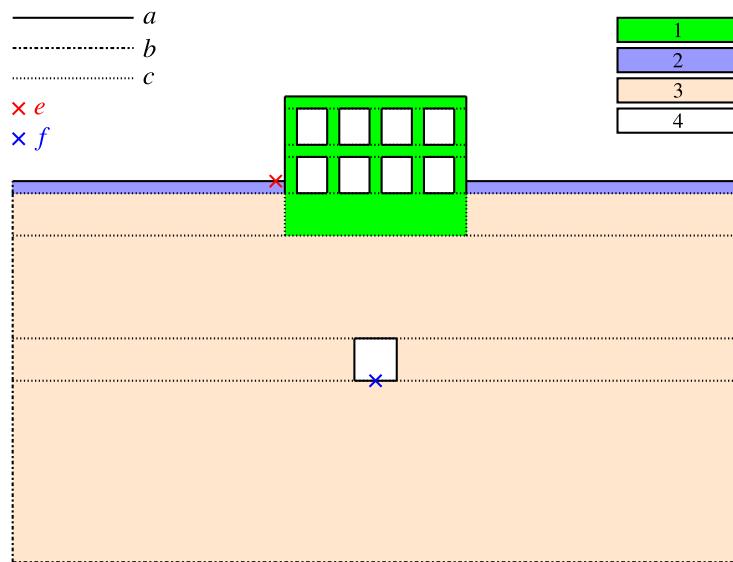


Рис. 1. Схема расположения отдельных декартовых расчетных сеток в постановках задач. Крестами обозначены источники импульса: e — красным цветом в первой постановке (с распространением вибраций от строительных работ), f — синим цветом во второй постановке (с распространением вибраций от поездов метрополитена). Цвета 1, 2, 3, 4 соответствуют следующим средам: бетон здания (1), дорожное покрытие (2), грунт (3), воздух (4). Воздух напрямую не моделируется. На границах расчетной области заданы следующие условия: a — свободная граница, b — неотражающее граничное условие, c — контактное условие полного слипания

Здание расположено в середине области интегрирования, его фундамент уходит в грунт, с обеих сторон с ним граничит дорожное покрытие. В глубине располагается инфраструктура метро, не граничащая ни с чем, кроме грунта.

Источник e расположен на границе раздела «дорога–воздух» и рассматривается в первой постановке. Источник f расположен на границе раздела «воздух–грунт» и рассматривается во второй постановке.

Расчетные параметры

Геометрические размеры моделируемых объектов представлены в табл. 1 (n — количество помещений в здании по горизонтали). Размеры инфраструктуры метро приняты на основе качественных соображений о размерах станций с кросс-платформенной пересадкой или рассчитанных на большой поток пассажиров (станция «Партизанская» Московского метрополитена).

Таблица 1. Геометрические параметры моделируемых объектов

Моделируемый объект	Ширина, м	Высота, м
Грунт	$100 + 5,0 \cdot n$	62,0
Сечение инфраструктуры метро	8,0	8,0
Дорожное покрытие	50,0	0,5
Помещение	5,0	3,0
Вертикальное перекрытие	1,0	3,0
Горизонтальное перекрытие	5,0	1,0

Параметры материалов и источников представлены в табл. 2 и 3 соответственно. Начальный импульс в обоих случаях направлен по горизонтальной оси.

Таблица 2. Упругие параметры моделируемых сред

Среда	Плотность, кг/м ³	Скорость S-волн, м/с	Скорость P-волн, м/с	Модуль Юнга, ГПа	Коэффициент Пуассона
Бетон	2500	2258	3688	30,60	0,20
Грунт	1900	527	1420	1,49	0,42
Дорожное покрытие	150	2258	3260	0,15	0,50

Таблица 3. Параметры источников

Источник	Частота, Гц	Радиус региона, м
Строительные и автомобильные вибрации	110	0,5
Поезда метро	50,0	0,5

При выбранном числе Куранта [Courant et al., 1952] $C = 0,4$ и шаге интегрирования по координате $h = 0,1$ м соответственно шаг интегрирования по времени составил

$$\tau = \frac{C}{\max \{c_p^{\text{бетон}}, c_p^{\text{дорога}}, c_p^{\text{грунт}}\}} \gtrsim 1,085 \cdot 10^{-5} \text{ с.} \quad (6)$$

Численный метод

В двумерном случае уравнения (1) и (2) можно представить в виде системы

$$\mathbf{q}_t + \mathbf{A}_1 \mathbf{q}_x + \mathbf{A}_2 \mathbf{q}_y = 0, \quad (7)$$

где компонентами вектора $\mathbf{q} = [v_x, v_y, \sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}]$ являются искомые параметры, а матрицы \mathbf{A}_1 и \mathbf{A}_2 имеют вид

$$\mathbf{A}_1 = - \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\rho} \\ \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\rho} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\rho} & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ \mu & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Тогда, переходя к инвариантам Римана [LeVeque, 2002], после разделения системы по направлениям численно проинтегрируем полученную систему с помощью конечно-разностной схемы Рusanова 3-го порядка [Rusanov, 1970; Gottlieb, 1974].

Результаты моделирования

На рис. 2 показаны результаты расчетов, соответствующих первой и второй постановкам для 9-этажного здания с 4 подъездами. Каждое изображение соответствует одному из параметров: модулю скорости или одной из компонент тензора напряжений. На основе полученной картины распространения волн для первой постановки (рис. 2) можно сделать вывод о местах расположения в здании частей, подвергающихся наибольшему влиянию со стороны источника вибраций (наибольшие значения механических напряжений). Видно, что самыми защищенными оказываются жители высоких этажей дальнего от точки распространения возмущений угла здания, в то время как те, кто оказывается с ближней к источнику стороне, подвергаются вибрационному воздействию практически равномерно по высоте. Механическое воздействие в большей части оказывает влияние на первые этажи.

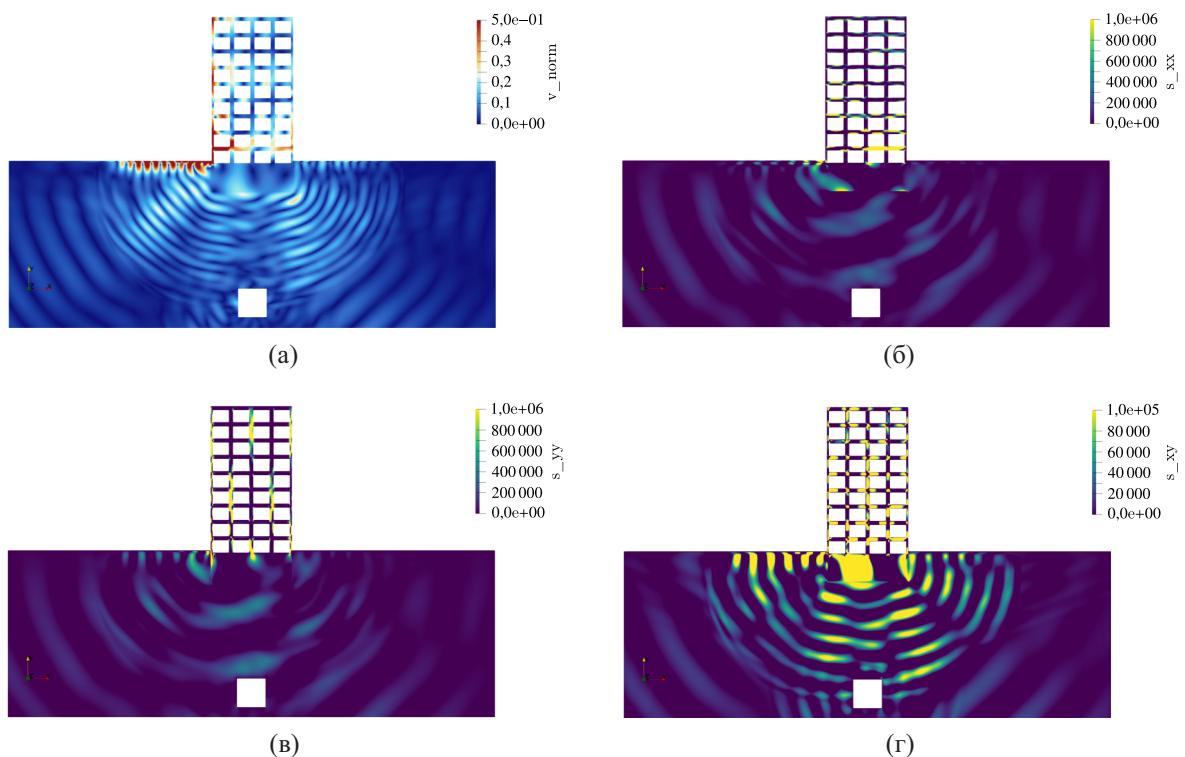


Рис. 2. Распространение волн от источника вибраций у основания многоквартирного дома в первой постановке через 0,06 с после первого импульса: а) модуль скорости; б) yy -компоненты тензора напряжений; в) xx -компоненты тензора напряжений; г) xy -компоненты тензора напряжений

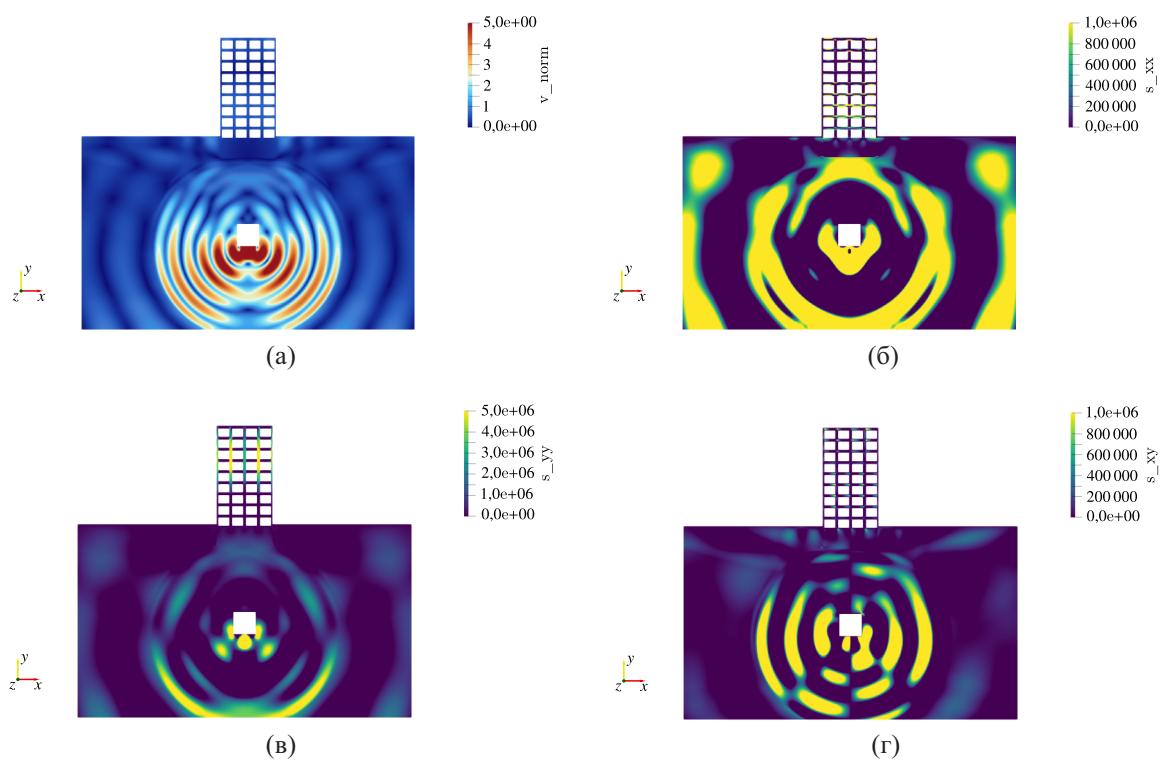


Рис. 3. Распространение волн от прохождения поездов по инфраструктуре метро, располагающейся под многоквартирным домом, через 0,07 с после первого импульса: а) модуль скорости; б) yy -компоненты тензора напряжений; в) xx -компоненты тензора напряжений; г) xy -компоненты тензора напряжений

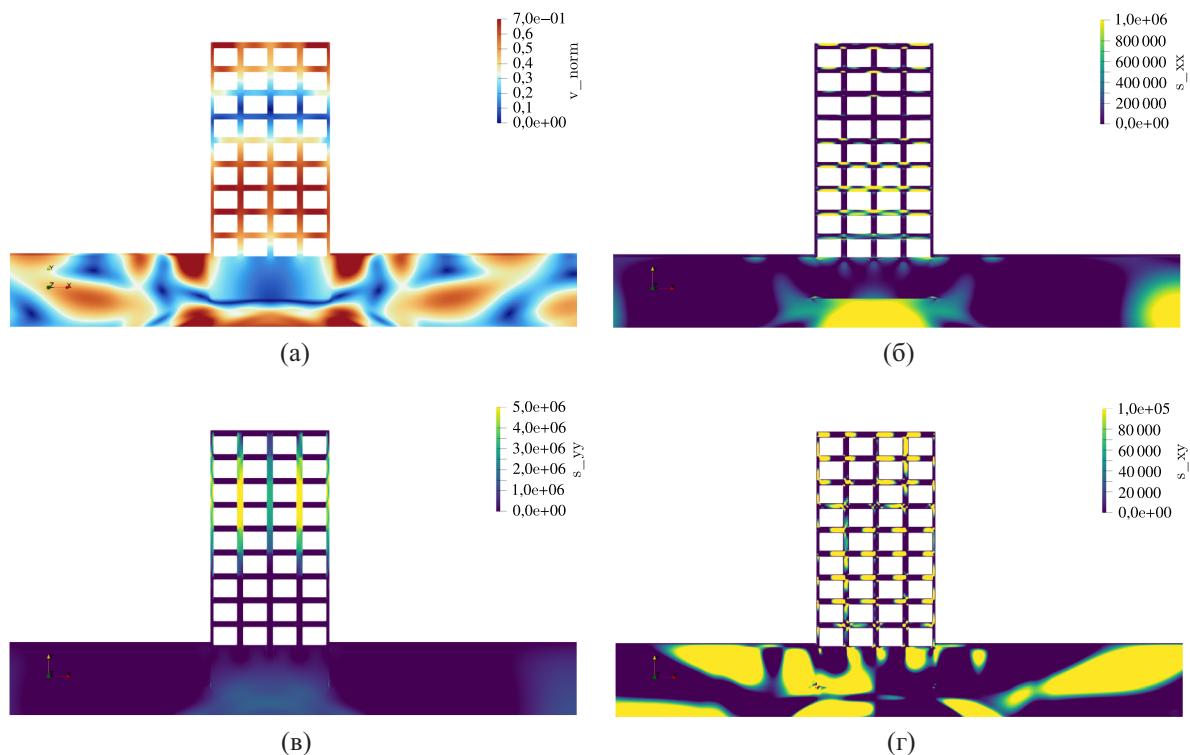


Рис. 4. Распространение волн внутри многоквартирного дома от источника, расположенного в тоннеле в толще грунта, через 0,07 с после первого импульса: а) модуль скорости; б) uu -компоненты тензора напряжений; в) xx -компоненты тензора напряжений; г) xy -компоненты тензора напряжений

На рис. 3, 4 показаны визуализированные результаты расчетов, соответствующие второй постановке для 9-этажного здания с 4 подъездами. На рис. 3 изображен общий план, позволяющий подробнее рассмотреть распространение волн в грунте. Становится понятно, что основное вибрационное воздействие рассеивается в грунте, и к моменту достижения здания скорость волн падает ниже 20 % от начальной, однако механическое воздействие практически в полной мере достигает здания. Визуализации, представленные на рис. 4, позволяют убедиться в том, что как вибрационному, так и механическому воздействию оказывается подвержено все здание целиком и заметной разницы между первыми и последними этажами здания нет.

Заключение

Проведенные вычисления подтверждают потенциал для тщательного изучения эффектов городских вибраций от разных источников на соседние строения, включая высотные здания. Полученная информация помогла идентифицировать наиболее чувствительные зоны в структурах, оценить интенсивность вибраций от подземного транспорта, строительных операций и трафика на дорогах, а также открыла возможность для оптимизации планирования восстановительных процедур для большей продуктивности. Обработка этих данных подчеркнула преимущества сеточно-характеристического подхода в подобных исследованиях. В итоге такие работы могут содействовать созданию продвинутых стратегий по поддержанию старинных построек как элементов культурного достояния, обеспечивают рациональные с финансовой точки зрения методы возведения новых объектов рядом с историческими монументами, предлагают надежные и защищенные схемы реагирования на аварийные события, а также способствуют обновлению строительных практик для улучшения удобства в домах, административных комплексах и прочих важных для общества сооружениях. Помимо этого, они облегчают подбор оптимальных мест

для организации передовых точных производственных линий, снижая потенциальные опасности от вибраций.

Список литературы (References)

- Голубев В. И., Хохлов Н. И. Оценка анизотропии сейсмического отклика от трещиноватых геологических объектов // Компьютерные исследования и моделирование. — 2018. — Т. 10, № 2. — С. 231–240.*
Golubev V.I., Khokhlov N.I. Otsenka anizotropii seysmicheskogo otklika ot treshchinovatnykh geologicheskikh ob"ektov [Estimation of anisotropy of seismic response from fractured geological objects] // Computer Research and Modeling. — 2018. — Vol. 10, No. 2. — P. 231–240 (in Russian).
- Куликовский А. Г., Погорелов Н. В., Семенов А. Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. — М.: Физматлит, 2001. — 608 с.*
Kulikovskii A.G., Pogorelov N.V., Semenov A.Yu. Matematicheskie voprosi chislennogo resheniya giperbolicheskikh sistem uravnenii [Mathematical questions of numerical solution of hyperbolic system of equations]. — Moscow: Fizmatlit, 2001. — 608 p. (in Russian).
- Ладонкина М. Е., Неклюдова О. А., Остапенко В. В., Тишкун В. Ф. О повышении устойчивости комбинированной схемы разрывного метода Галёркина // Математическое моделирование. — 2021. — Т. 33, № 3. — С. 98–108.*
*Ladonkina M.E., Nekliudova O.A., Ostapenko V.V., Tishkin V.F. On Increasing the stability of the combined scheme of the discontinuous Galerkin method // Matem. Model. — 2021. — Vol. 13. — P. 979–985. — DOI: 10.1134/S2070048221060119 (Original Russian paper: *Ladonkina M.E., Nekliudova O.A., Ostapenko V.V., Tishkin V.F. O povyshenii ustochivosti kombinirovannoi skhemy razryvnogo metoda Galerkina // Matematicheskoe modelirovanie. — 2021. — Vol. 33, No. 3. — P. 98–108.*)*
- Магомедов К. М., Холодов А. С. О построении разностных схем для уравнений гиперболического типа на основе характеристических соотношений // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1969. — Т. 9, № 2. — С. 373–386.*
*Magomedov K.M., Kholodov A.S. The construction of difference schemes for hyperbolic equations based on characteristic relations // USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 1969. — Vol. 9, No. 2. — P. 158–176. — DOI: doi.org/10.1016/0041-5553(69)90099-8. (Original Russian paper: *Magomedov K.M., Kholodov A.S. O postroenii raznostnyh skhem dlya uravnenij giperbolicheskogo tipa na osnove harakteristicheskikh sootnoshenij // Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki. — 1969. — Vol. 9, No. 2. — P. 373–386.*)*
- Никитин И. С., Филимонов А. В., Якушев В. Л. Распространение волн Рэлея при косом ударе метеорита о поверхность земли и их воздействие на здания и сооружения // Компьютерные исследования и моделирование. — 2013. — Т. 5, № 6. — С. 981–992.*
Nikitin I.S., Filimonov A.V., Yakushev V.L. Rasprostranenie voln Releya pri kosom udare meteorita o poverkhnost' zemli i ikh vozdeistvie na zdaniya i sooruzheniya [Propagation of Rayleigh waves at oblique impact of the meteorite about the earth's surface and their effects on buildings and structures] // Computer Research and Modeling. — 2013. — Vol. 5, No. 6. — P. 981–992 (in Russian).
- Петров И. Б., Мириаха В. А., Санников А. В., Шевцов А. В. Численное моделирование начальной стадии разрушения метеорита в плотных слоях атмосферы в упругопластическом приближении // Компьютерные исследования и моделирование. — 2013. — Т. 5, № 6. — С. 957–967.*
Petrov I.B., Miryaha V.A., Sannikov A.V., Shevtsov A.V. Chislennoe modelirovanie nachal'noi stadii razrusheniya meteorita v plotnykh sloyakh atmosfery v uprugoplasticheskem priblizhenii [Computational modeling of a meteor entering atmosphere dense layers using elastoplastic approximation] // Computer Research and Modeling. — 2013. — Vol. 5, No. 6. — P. 957–967 (in Russian).
- Петров И. Б., Муратов М. В., Фаворская А. В., Бирюков В. А., Санников А. В. Численное моделирование прямых трехмерных задач сейсморазведки с применением сеточно-характеристического метода на неструктурированных тетраэдralьных сетках // Компьютерные исследования и моделирование. — 2015. — Т. 7, № 4. — С. 875–887.*
Petrov I.B., Muratov M.V., Favorskaya A.V., Biryukov V.A., Sannikov A.V. Chislennoe modelirovanie pryamykh trekhmernykh zadach seysmorazvedki s primeneniem setочно-kharakteristicheskogo metoda na nestrukturirovannykh tetraedral'nykh setkakh [Numerical modeling of straight 3D exploration seismology problems with use of grid-characteristic method on unstructured tetrahedral meshes] // Computer Research and Modeling. — 2015. — Vol. 7, No. 4. — P. 875–887 (in Russian).
- Петров И. Б., Фаворская А. В., Хохлов Н. И. Сеточно-характеристический метод на системах вложенных иерархических сеток и его применение для исследования сейсмических волн // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2017. — Т. 57, № 11. — С. 1804–1811.*

- Petrov I. B., Favorskaya A. V., Khokhlov N. I.* Grid-characteristic method on embedded hierarchical grids and its application in the study of seismic waves // Computational mathematics and Mathematical physics. — 2017. — Vol. 57. — P. 1771–1777. — DOI: 10.1134/S0965542517110112 (Original Russian paper: *Petrov I. B., Favorskaya A. V., Khokhlov N. I.* // Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki. — 2017. — Vol. 57, No. 11. — P. 1804–1811.)
- Симаков С. С., Холодов А. С.* Численный анализ воздействия акустических возмущений на функцию легких и гемодинамику малого круга кровообращения // Медицина в зеркале информатики: сборник. — М.: Наука, 2008. — С. 124–144.
- Simakov S. S., Kholodov A. S.* Chislennii analiz vozdeistvijya akusticheskikh vozmuschenii na funktsiu legikh i gemodinamiku malogo kruga krovoobrascheniya [Computational analysis of acoustical impacts to the lungs function and pulmonary circulation] // Meditcina v zerkale informatiki [Medicine in the mirror of informatics]: sbornik. — Moscow: Nauka, 2001. — P. 124–144 (in Russian).
- Стогний П. В., Петров И. Б.* Численное моделирование распространения сейсмических волн в моделях с ледовым полем в зоне арктического шельфа // Компьютерные исследования и моделирование. — 2020. — Т. 12, № 1. — С. 73–82.
- Stognii P. V., Petrov I. B.* Chislennoe modelirovanie rasprostraneniya seysmicheskikh voln v modelyakh s ledovym polem v zone arkticheskogo shel'fa [Numerical modelling of seismic waves spread in models with an ice field in the arctic shelf] // Computer Research and Modeling. — 2020. — Vol. 12, No. 1. — P. 73–82 (in Russian).
- Фаворская А. В., Петров И. Б.* Расчет сеточно-характеристическим методом разрушения многоэтажных зданий // Математическое моделирование. — 2020. — Т. 32, № 3. — С. 102–114.
- Favorskaya A. V., Petrov I. B.* Calculating the destruction of multistory buildings by the grid-characteristic method // Math. Models Comput. Simul. — 2020. — Vol. 12. — P. 897–906. — DOI: 10.1134/S207004822006006X (Original Russian paper: *Favorskaya A. V., Petrov I. B.* Chislennyi raschet razrusheniya mnogoetazhnykh zdaniy s ispol'zovaniyem setochno-kharakteristicheskogo metoda // Matematicheskoe modelirovanie. — 2020. — Vol. 32, No. 3. — P. 102–114.)
- Cheng H., Zhang J., Xing Z.* The hybrid element-free Galerkin method for 3D Helmholtz equations // International Journal of Applied Mathematics. — 2022. — Vol. 14, No. 9. — 2250084.
- Cheng X., Cui C., Sun Z., Xia J., Wang G.* Shaking table test and numerical verification for free ground seismic response of saturated soft soil // Mathematical problems in engineering. — 2018. — Vol. 2018, No. 1. — 3416315.
- Cheng X., Li Q., Hai R.* Seismic response of subway stations in saturated soft soil: experimental and numerical investigation // Geotechnical and geological engineering. — 2025. — Vol. 43, No. 157.
- Courant R., Isaacson E., Rees M.* On the solution of nonlinear hyperbolic differential equations by finite differences // Communications on pure and applied mathematics. — 1952. — Vol. 5, No. 3. — P. 243–255.
- Davoodi M., Pourdeilami A., Jahankhah H., Jafari M. K.* Application of perfectly matched layer to soil-foundation interaction analysis // Journal of Rock Mechanics and Geotechnical Engineering. — 2018. — Vol. 10, No. 4. — P. 753–768.
- Duczec S., Joulaian M., Duster A., Gabbert U.* Numerical analysis of Lamb waves using the finite and spectral cell methods // Numerical methods in engineering. — 2014. — Vol. 9, No. 1. — P. 26–53.
- Favorskaya A. V., Petrov I. B.* Calculation of seismic stability of buildings in the far north using the grid-characteristic method // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2024. — Vol. 45, No. 1. — P. 213–222.
- Favorskaya A. V., Petrov I. B.* Grid-characteristic method // Innovations in Wave Processes Modelling and Decision Making. Smart Innovation, Systems and Technologies. — 2018. — Vol. 90. — P. 117–160.
- Favorskaya A. V., Petrov I. B.* Inverse problem of determining the strength characteristics of multi-story buildings on piles // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2025. — Vol. 46, No. 1. — P. 202–213.
- Fernandez P., Christophe A., Terrana S., Nguyen N. C., Peraire J.* Hybridized discontinuous Galerkin methods for wave propagation // Journal of scientific computing. — 2018. — Vol. 77. — P. 1566–1604.

- Gottlieb D.* On the stability of Rusanov's third-order scheme // Journal of computational physics. — 1974. — Vol. 15, No. 3. — P. 421–426.
- Ham S., Lai B., Bathe K. J.* The method of finite spheres for wave propagation problems // Computers & Structures. — 2014. — Vol. 142. — P. 1–14.
- Joulaian M., Duczec S., Gabbert U., Duster A.* Finite and spectral cell method for wave propagation in heterogeneous materials // Computational Mechanics. — 2014. — Vol. 54. — P. 661–675.
- Kelly D. M., Dodd N.* Floating grid characteristics method for unsteady flow over a mobile bed // Computers & Fluids. — 2009. — Vol. 34, No. 4. — P. 899–909.
- Khalid W., Golubev V. I., Khokhlov N. I.* Full-wave simulation of the plate fatigue fracturing // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2025. — Vol. 46. — P. 234–242.
- Kolman R., Okrouhlik M., Berezovski A., Gabriel D., Kopacka J., Plesek J.* B-spline based finite element method in one-dimensional discontinuous elastic wave propagation // Applied Mathematical Modelling. — 2017. — Vol. 46. — P. 382–395.
- Komatitsch D., Tromp J.* Introduction to the spectral element method for three-dimensional seismic wave propagation // Geophysical journal international. — 1999. — Vol. 39, No. 3. — P. 806–822.
- Komatitsch D., Tsuboi S., Tromp J.* The spectral-element method in seismology // Seismic Earth: Array Analysis of Broadband Seismograms. — 2005. — Vol. 157. — P. 205–227.
- Lax P. D.* Hyperbolic partial differential equations. — American Mathematical Society, 2006.
- LeVeque R. J.* Finite-volume methods for non-linear elasticity in heterogeneous media // International journal for numerical methods in fluids. — 2002. — Vol. 40, No. 1–2. — P. 93–104.
- Liu S., Li P., Zhang W., Lu Z.* Experimental study and numerical simulation on dynamic soil-structure interaction under earthquake excitations // Soil Dynamics and Earthquake Engineering. — 2020. — Vol. 138. — 106333.
- Meng Z. J., Cheng H., Ma L. D., Cheng Y. M.* The hybrid element-free Galerkin method for three-dimensional wave propagation problems // Numerical methods in engineering. — 2019. — Vol. 117, No. 1. — P. 15–37.
- Rusanov V. V.* On difference schemes of third order accuracy for nonlinear hyperbolic systems // Journal of computational physics. — 1970. — Vol. 5, No. 3. — P. 507–516.
- Smith P. D., Rose T. A.* Blast wave propagation in city streets — an overview // Progress in Structural Engineering and Materials. — 2006. — Vol. 8, No. 1. — P. 16–28.
- Uphoff C., May D., Gabriel A.-A.* A discontinuous Galerkin method for sequences of earthquakes and aseismic slip on multiple faults using unstructured curvilinear grids // Geophysical Journal International. — 2023. — Vol. 233, No. 1. — P. 586–626.
- Vassilevskii Yu., Simakov S., Salamatova V., Ivanov Yu., Dobroserdova T.* Numerical issues of modelling blood flow in networks of vessels with pathologies // Russian journal of numerical analysis and mathematical modelling. — 2011. — Vol. 26, No. 6. — P. 605–622.
- Wang D., Tezaur R., Farhat C.* A hybrid discontinuous in space and time Galerkin method for wave propagation problems // Numerical methods in engineering. — 2014. — Vol. 99, No. 4. — P. 263–289.
- Xing H., Li X., Li H., Aiwen L.* Spectral-element formulation of multi-transmitting formula and its accuracy and stability in 1D and 2D seismic wave modeling // Soil Dynamics and Earthquake Engineering. — 2021. — Vol. 140. — 106218.