**КОМПЬЮТЕРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ
И МОДЕЛИРОВАНИЕ 2025 Т. 17 № 6 С. 1237–1256**
DOI: 10.20537/2076-7633-2025-17-6-1237-1256

УДК: 330.4.51-77

Итерационные методы декомпозиции при моделировании развития олигополистических рынков

Л. Е. Варшавский

Центральный экономико-математический институт РАН,
Россия, 117418, г. Москва, Нахимовский пр-кт, д. 47

E-mail: hodvar@yandex.ru

Получено 13.05.2025.
Принято к публикации 15.11.2025.

Один из принципов формирования рыночной конкурентной среды состоит в создании условий для реализации экономическими агентами стратегий, оптимальных по Нэшу – Курно. При стандартном подходе к определению рыночных стратегий, оптимальных по Нэшу – Курно, экономические агенты должны обладать полной информацией о показателях и динамических характеристиках всех участников рынка. Что не соответствует действительности.

В связи с этим для отыскания оптимальных по Нэшу – Курно решений в динамических моделях необходимо наличие координатора, обладающего полной информацией об участниках. Однако в случае большого числа участников игры, даже при наличии у координатора необходимой информации, появляются вычислительные трудности, связанные с необходимостью решения большого числа связанных (coupled) уравнений (в случае линейных динамических игр с квадратическим критерием — матричных уравнений Риккати).

В связи с этим возникает необходимость в декомпозиции общей задачи определения оптимальных стратегий участников рынка на частные (локальные) задачи. Применительно к линейным динамическим играм с квадратическим критерием исследовались подходы, основанные на итерационной декомпозиции связанных матричных уравнений Риккати и решении локальных уравнений Риккати. В настоящей статье рассматривается более простой подход к итерационному определению равновесия по Нэшу – Курно в олигополии путем декомпозиции с использованием операционного исчисления (операторного метода).

Предлагаемый подход основан на следующей процедуре. Виртуальный координатор, обладающий информацией о параметрах обратной функции спроса, формирует цены на перспективный период. Олигополисты при заданной фиксированной динамике цен определяют свои стратегии в соответствии с несколько измененным критерием оптимальности. Оптимальные объемы продукции олигополистов поступают к координатору, который на основе итерационного алгоритма корректирует динамику цены на предыдущем шаге.

Предлагаемая процедура иллюстрируется на примере статической и динамической моделей рационального поведения участников олигополии, которые максимизируют чистую текущую стоимость (NPV).

При использовании методов операционного исчисления (и, в частности, обратного Z-преобразования) найдены условия, при которых итерационная процедура приводит к равновесным уровням цены и объемов производства в случае линейных динамических игр как с квадратичными, так и с нелинейными (вогнутыми) критериями оптимизации.

Рассмотренный подход использован применительно к примерам дуополии, триополии, дуополии на рынке с дифференцированным продуктом, дуополии с взаимодействующими олигополистами при линейной обратной функции спроса. Сопоставление результатов расчетов динамики цены и объемов производства олигополистов для рассмотренных примеров на основе связанных (coupled) уравнений матричных уравнений Риккати в Matlab, а также в соответствии с предложенным итерационным методом в широко доступной системе Excel показывает их практическую идентичность.

Кроме того, применение предложенной итерационной процедуры проиллюстрировано на примере дуополии с нелинейной функцией спроса.

Ключевые слова: итерационные методы, олигополия, динамические игры, операционное исчисление, равновесие по Нэшу – Курно

COMPUTER RESEARCH AND MODELING
2025 VOL. 17 NO. 6 P. 1237–1256
DOI: 10.20537/2076-7633-2025-17-6-1237-1256

Ки&М

MODELS OF ECONOMIC AND SOCIAL SYSTEMS

UDC: 330.4.51-77

Iterative decomposition methods in modelling the development of oligopolistic markets

L. E. Varshavsky

Central Economics and Mathematics Institute RAS,
47 Nahimovskii ave., Moscow, 117418, Russia

E-mail: hodvar@yandex.ru

Received 13.05.2025.
Accepted for publication 15.11.2025.

One of the principles of forming a competitive market environment is to create conditions for economic agents to implement Nash – Cournot optimal strategies. With the standard approach to determining Nash – Cournot optimal market strategies, economic agents must have complete information about the indicators and dynamic characteristics of all market participants. Which is not true.

In this regard, to find Nash – Cournot optimal solutions in dynamic models, it is necessary to have a coordinator who has complete information about the participants. However, in the case of a large number of game participants, even if the coordinator has the necessary information, computational difficulties arise associated with the need to solve a large number of coupled equations (in the case of linear dynamic games — Riccati matrix equations).

In this regard, there is a need to decompose the general problem of determining optimal strategies for market participants into private (local) problems. Approaches based on the iterative decomposition of coupled matrix Riccati equations and the solution of local Riccati equations were studied for linear dynamic games with a quadratic criterion. This article considers a simpler approach to the iterative determination of the Nash – Cournot equilibrium in an oligopoly, by decomposition using operational calculus (operator method).

The proposed approach is based on the following procedure. A virtual coordinator, which has information about the parameters of the inverse demand function, forms prices for the prospective period. Oligopolists, given fixed price dynamics, determine their strategies in accordance with a slightly modified optimality criterion. The optimal volumes of production of the oligopolists are sent to the coordinator, who, based on the iterative algorithm, adjusts the price dynamics at the previous step.

The proposed procedure is illustrated by the example of a static and dynamic model of rational behavior of oligopoly participants who maximize the net present value (NPV). Using the methods of operational calculus (and in particular, the inverse Z-transformation), conditions are found under which the iterative procedure leads to equilibrium levels of price and production volumes in the case of linear dynamic games with both quadratic and nonlinear (concave) optimization criteria.

The approach considered is used in relation to examples of duopoly, triopoly, duopoly on the market with a differentiated product, duopoly with interacting oligopolists with a linear inverse demand function. Comparison of the results of calculating the dynamics of price and production volumes of oligopolists for the considered examples based on coupled equations of the matrix Riccati equations in Matlab (in the table — Riccati), as well as in accordance with the proposed iterative method in the widely available Excel system shows their practical identity.

In addition, the application of the proposed iterative procedure is illustrated by the example of a duopoly with a nonlinear demand function.

Keywords: iterative methods, oligopoly, dynamic games, operational calculus, Nash – Cournot equilibrium

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2025, vol. 17, no. 6, pp. 1237–1256 (Russian).

1. Введение

Опыт развития ряда стран с рыночной экономикой показывает, что одним из важных факторов успеха является реализация индикативного планирования экономики [Полтерович, 2015; Устюжанина, Евсюков, 2015]. В основе успешного применения системы индикативного планирования лежит гибкое использование принципов конкурентной (соревновательной) экономики. Наличие конкурентной среды является важным условием достижения технологического суверенитета в современной России.

Один из принципов формирования рыночной конкурентной среды состоит в создании условий для реализации экономическими агентами стратегий, оптимальных по Нэшу – Курно. При стандартном подходе к определению рыночных стратегий, оптимальных по Нэшу – Курно, экономические агенты должны обладать полной информацией о показателях и динамических характеристиках всех участников рынка. В действительности экономические агенты такой информацией не обладают и не всегда склонны делиться даже частью собственных данных. В связи с этим для отыскания оптимальных по Нэшу – Курно решений необходимо наличие координатора, обладающего полной информацией об участниках. Как правило, такого координатора не существует. Однако в случае большого числа участников рынка, даже при наличии у координатора необходимой информации, возникают некоторые вычислительные трудности, связанные с необходимостью решения большого числа связанных (coupled) уравнений (в случае линейных динамических игр — матричных уравнений Риккати [Basar, Olsder, 1995; Dockner et al., 2000; Engwerda, 2006]).

В связи с этим возникает необходимость в декомпозиции общей задачи определения оптимальных стратегий участников рынка на частные (локальные) задачи. С этой целью рассматривались итерационные процедуры решения игр (см., например, [Итеративные методы. . . , 1974; Systems. . . , 1978; Nortmann et al., 2024]). Применительно к линейным динамическим играм с квадратическим критерием исследовались подходы, основанные на итерационном решении локальных уравнений Риккати [Nortmann et al., 2024]. В настоящей статье рассматривается более простой подход к итерационному определению равновесия по Нэшу – Курно в олигополии путем декомпозиции с использованием операционного исчисления (операторного метода).

2. Используемый итерационный подход и его обоснование

Предлагаемый подход основан на следующей процедуре. Виртуальный координатор, обладающий информацией лишь о параметрах обратной функции спроса, формирует цены на перспективный период (долгосрочную перспективу). Олигополисты при заданной фиксированной динамике цен определяют свои стратегии в соответствии с несколько измененным по указанию координатора критерием оптимальности, ориентируясь на конфиденциальную информацию о собственных производственных возможностях. Оптимальные объемы продукции олигополистов поступают к координатору, который на основе итерационного алгоритма корректирует динамику цены на предыдущем шаге.

Ниже предлагаемая процедура иллюстрируется на примере статической и динамической модели олигополии. Предполагается, что в олигополии состоят (функционируют) N компаний.

2.1. Статическая модель олигополии

Каждый i-й олигополист оптимизирует свою стратегию Q_i в соответствии с критерием прибыли:

$$J_i = (p - c_i)Q_i \to \max_{Q_i}, \tag{1}$$

где p — рыночная цена, связанная с суммарным объемом производства всех олигополистов $Q_\Sigma = \sum_{i=1}^{N} Q_i$ соотношением

$$p = a - bQ_\Sigma, \tag{2}$$

c_i — удельные затраты на производство продукции.

Оптимальный объем производства каждого олигополиста связан с ценой следующим образом:

$$Q_i = \frac{p(Q_\Sigma) - c_i}{b}. \tag{3}$$

Чтобы сохранились условия оптимизации по Нэшу – Курно при задаваемой извне цене p^*, олигополисты должны несколько изменить свои критерии. Измененные критерии имеют следующий вид:

$$J_i = \left(p^* - c_i - \frac{1}{2}bQ_i\right)Q_i \to \max_{Q_i}. \tag{4}$$

Таким образом, если p^ν — цена, сформированная координатором на ν-й итерации, после ответа олигополистов Q_i^ν ей будет соответствовать новая цена $p^{*\nu}$:

$$p^{*\nu} = a - b\sum_{i=1}^{N} Q_i^\nu = a + \sum_{i=1}^{N} c_i - Np^\nu. \tag{5}$$

Цена на новой итерации будет формироваться координатором в соответствии со следующим рекуррентным соотношением:

$$p^{\nu+1} = p^\nu + \lambda\left(p^{*\nu} - p^\nu\right) = p^\nu - \lambda(N+1)p^\nu + \lambda\left(a + \sum_{i=1}^{N} c_i\right), \tag{6}$$

где $0 < \lambda$. Сходимость цены p^ν к установившемуся уровню p_∞ будет обеспечена при $0 < \lambda < \frac{2}{N+1}$. При этом равновесный уровень цены составит

$$p_\infty = \frac{a + \sum_{i=1}^{N} c_i}{N+1}. \tag{7}$$

Таким образом, для определения оптимальных по Нэшу значений производительности компаний можно использовать двухстадийную итерационную процедуру. На первой стадии в соответствии с (6) формируется рыночная цена p^ν.

На второй стадии определяются объемы производства отдельных компаний $Q_i^\nu(p^\nu)$, $i = 1, 2, \ldots, N$, и соответствующая им промежуточная цена $p^{*\nu}$. С этой целью используется оптимизация в соответствии с несколько измененными критериями:

$$J_i = \left(p^\nu - c_i - \frac{1}{2}bQ_i^\nu\right), \quad Q_i^\nu \to \max_{Q_i^\nu}, \quad i = 1, 2, \ldots, N. \tag{8}$$

Далее происходит переход к первой стадии.

Аналогичный подход используется ниже и применительно к динамическим моделям.

2.2. Динамическая модель олигополии

Используемая ниже агрегированная динамическая модель рационального поведения участников олигополии состоит из двух блоков [Варшавский, 2014; Варшавский, 2019].

Центральным блоком модели является следующая зависимость, связывающая объемы производства Q_{it} со входной переменной u_{it} (в зависимости от решаемой задачи инвестициями в основной капитал или вводом мощностей), i — индекс фирмы, $i = 1, 2, \ldots, N$:

$$Q_{it} = W_i(z)u_{it} = \frac{B_i(z)}{A_i(z)}u_{it}, \tag{9}$$

где $W_i(z) = \frac{B_i(z)}{A_i(z)}$ — передаточная функция, причем $A_i(z)$, $B_i(z)$ — полиномы относительно переменной z, представляющей собой оператор сдвига ($zx_t = x_{t+1}$):

$$A_i(z) = \sum_{i=0}^{n} a_{ik}z^k, \quad B_i(z) = \sum_{j=0}^{m} b_{ij}z^j, \quad m \leqslant n, \tag{10}$$

Q_{0it} — слагаемое, характеризующее начальные условия.

Другой блок модели — обратная функция (оператор) спроса:

$$p = a - bQ_{\Sigma t} = a - b\sum_{i=1}^{N} Q_{it}. \tag{11}$$

Предполагается, что олигополисты максимизируют чистую текущую стоимость (NPV):

$$J_i = \sum_{t=0}^{T_p} \beta^t \left[(p_t - c_i)Q_{it} - q_i u_{it} - \frac{1}{2}\rho_i u_{it}^2 \right] \to \max_{u_{it}}, \tag{12}$$

где $\beta = \frac{1}{1+r}$ — дисконтирующий множитель, соответствующий ставке дисконтирования r; p_t — цена продукции; c_i — средние производственные издержки (без амортизации); q_i — стоимость единицы мощностей; $\frac{1}{2}\rho_i u_{it}^2$ — затраты регулирования (adjustment costs) (см., например, [Варшавский, 2014; Варшавский, 2019]), причем ρ_i — коэффициент, характеризующий инвестиционные возможности олигополистов, $i = 1, 2, \ldots, N$; T_p — период планирования (для упрощения записи формул ставки налогов приняты равными нулю). Управляющими переменными в модели являются инвестиции в основной капитал или вводы мощностей u_{it}, $i = 1, 2, \ldots, N$.

При $T_p \to \infty$, используя методы операционного исчисления (Z-преобразования), можно получить следующие соотношения, характеризующие оптимальные по Нэшу–Курно разомкнутые стратегии олигополистов:

$$\frac{\partial J_i}{\partial u_{it}} = W_i\left((\beta z)^{-1}\right)(p_t - PL_i) - bW_i\left((\beta z)^{-1}\right)W_i(z)u_{it} - \rho_i u_{it} = 0. \tag{13}$$

Откуда следует, что

$$Q_{it} = W_i(z)u_{it} = \frac{\Gamma_i\left(z, (\beta z)^{-1}\right)}{b}(p_t - PL_i), \tag{14}$$

где $PL_i = c_i + \frac{q_i}{W(1+r_i)}$ — приведенные затраты i-й фирмы:

$$\Gamma_i\left(z, (\beta z)^{-1}\right) = \frac{bW_i(z)W_i\left((\beta z)^{-1}\right)}{\rho_i + bW_i(z)W_i\left((\beta z)^{-1}\right)}, \quad i = 1, 2, \ldots, N. \tag{15}$$

Если p_t^ν — цены, сформированные координатором на ν-й итерации, $t = 1, 2, \ldots, T_p$, то для того, чтобы соотношение (13) оставалось справедливым при этих задаваемых извне ценах, олигополисты должны несколько изменить свой критерий. А именно, вместо (12) использовать критерий

$$J_i = \sum_{t=0}^{T_p} \beta^t \left[\left(p_t^\nu - PL_i\right) Q_{it}^\nu - \frac{1}{2} b \left(Q_{it}^\nu\right)^2 - \frac{1}{2} \rho_i \left(u_{it}^\nu\right)^2 \right] \to \max_{u_{it}^\nu}, \tag{16}$$

при ограничении

$$Q_{it}^\nu = W_i(z) u_{it}^\nu, \tag{17}$$

который при заданных p_t^ν приводит к (14) и (15).

После определения олигополистами стратегий Q_{it}^ν, соответствующих p_t^ν, координатором будут вычислены промежуточные цены $p_t^{*\nu}$:

$$p_t^{*\nu} = a - b \sum_{i=1}^{N} Q_{it}^\nu \tag{18}$$

и цены на следующей итерации $p_t^{\nu+1}$ в соответствии со следующим рекуррентным соотношением:

$$p_t^{\nu+1} = p_t^\nu + \lambda \left(p_t^{*\nu} - p_t^\nu\right), \tag{19}$$

где $\lambda > 0$, $t = 1, 2, \ldots, T_p$. В рассматриваемом случае будут иметь место следующие соотношения для этих показателей:

$$p_t^{*\nu} = a - b \sum_{i=1}^{N} Q_{it}^\nu = a + \sum_{i=1}^{N} \Gamma_i \left(z, (\beta z)^{-1}\right) PL_i - \sum_{i=1}^{N} \Gamma_i \left(z, (\beta z)^{-1}\right) p_t^\nu, \tag{20}$$

$$p_t^{\nu+1} = p_t^\nu + \lambda \left(p_t^{*\nu} - p_t^\nu\right) = p_t^\nu - \lambda \left(\sum_{i=1}^{N} \Gamma_i \left(z, (\beta z)^{-1}\right) + 1 \right) p_t^\nu + \lambda \left(\sum_{i=1}^{N} \Gamma_i \left(z, (\beta z)^{-1}\right) PL_i \right), \tag{21}$$

где $t = 1, 2, \ldots, T_p$.

Используя обратное Z-преобразование к (21) [Jury, 1964], нетрудно показать, что сходимость цен p_t^ν к установившимся уровням $p_{t\infty}$ будет обеспечена при

$$0 < \lambda < \frac{2}{1 + \max\limits_{|z|=1} \sum\limits_{i=1}^{N} \left| \Gamma_i \left(z, (\beta z)^{-1}\right) \right|}$$

(z в данном выражении — комплексная переменная). Так как в силу (15) оператор $\Gamma_i \left(z, (\beta z)^{-1}\right)$ положителен и его норма меньше 1, сходимость итерационной процедуры, как и в случае статической модели олигополии п. 2.1, может быть обеспечена при $0 < \lambda < \frac{2}{N+1}$. При этом равновесный уровень цен$p_{t\infty}$, $t = 1, 2, \ldots, T_p$, составит

$$p_{t\infty} = \frac{a + \sum\limits_{i=1}^{N} \Gamma_i \left(1, (\beta)^{-1}\right) PL_i}{\sum\limits_{i=1}^{N} \Gamma_i \left(1, (\beta)^{-1}\right) + 1}. \tag{22}$$

2.3. Рынок дифференцированной продукции

При рассмотрении такого рынка в данной работе предполагается, что объемы производства фирм-олигополистов также связаны с инвестициями в основной капитал передаточными функциями (43),

$$Q_{kit} = W_{ki}(z)u_{kit}, \tag{23}$$

но цены p_{kt} каждого продукта k зависят от суммарных объемов производства всех продуктов $Q_{k\Sigma t}$ ($k = 1, 2$ — ниже рассматриваются два продукта):

$$\begin{aligned} p_{1t} &= a_1 - b_1 Q_{1\Sigma t} - d_1 Q_{2\Sigma t}, \\ p_{2t} &= a_2 - d_2 Q_{1\Sigma t} - b_2 Q_{2\Sigma t}. \end{aligned} \tag{24}$$

В этом случае, по аналогии с рассмотренным выше в п. 2.2 подходом, можно показать, что выражения для итерационного расчета цен имеют следующий вид:

$$\begin{pmatrix} p_t^{\nu+1} \\ p_2^{\nu+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \lambda_1 \left(1 + d_1 D_2 + \sum\limits_{i=1}^{N_1} \Gamma_{1i}\left(z, (\beta z)^{-1}\right)\right) & \lambda_1 d_1 B_2 \\ \lambda_2 d_2 B_1 & 1 - \lambda_2 \left(1 + d_2 D_1 + \sum\limits_{i=1}^{N_2} \Gamma_{2i}\left(z, (\beta z)^{-1}\right)\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_t^{\nu} \\ p_2^{\nu} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_1 \Phi_1 \\ \lambda_2 \Phi_2 \end{pmatrix}, \tag{25}$$

где

$$\begin{gathered} \Gamma_{ki}\left(z, (\beta z)^{-1}\right) = \frac{b_k W_{ki}(z) W_{ki}\left((\beta z)^{-1}\right)}{\rho_{ki} + b_k W_{ki}(z) W_{ki}\left((\beta z)^{-1}\right)}, \\ \Phi_k = a_k - d_k A_j + \sum_{i=1}^{N_k} \Gamma_{ki}\left(z, (\beta z)^{-1}\right) PL_{ki}, \\ A_k = \frac{b_j a_k - d_k a_j}{\det}, \quad B_k = \frac{b_k}{\det}, \quad D_k = \frac{b_k}{\det}, \quad \det = b_1 b_2 - d_1 d_2, \quad k \neq j, \end{gathered} \tag{26}$$

N_k — число фирм, производящих продукт k, $k = 1, 2$.

Из (25) следует, что можно подобрать такие λ_k, $k = 1, 2$, чтобы сумма модулей элементов строк или столбцов была бы меньше 1, т. е. чтобы удовлетворялись условия теоремы Фробениуса, при которых модули собственных чисел матрицы в (25) не превышают 1 [Маркус, Минк, 1972, с. 190, 193]. Таким образом, и в случае рынка дифференцированной продукции рассмотренная итерационная процедура будет обеспечивать сходимость цен к равновесным уровням.

2.4. Динамическая модель олигополии с нелинейной обратной функцией спроса

При нелинейной обратной функции спроса:

$$p_t = f(Q_{\Sigma t}) = f\left(\sum_{i=1}^{N} Q_{it}\right), \tag{27}$$

где $f(Q_{\Sigma t})$ — вогнутая функция, причем $\frac{\partial f(Q_{\Sigma t})}{\partial Q_{\Sigma t}} \leqslant 0$, $\frac{\partial f^2(Q_{\Sigma t})}{\partial Q_{\Sigma t}^2} \geqslant 0$, максимизация критериев олигополистов (12) по u_{it} сводится к исследованию следующих соотношений:

$$\frac{\partial J_i}{\partial u_{it}} = W_i\left((\beta z)^{-1}\right)(p_t - PL_i) + W_i\left((\beta z)^{-1}\right) \frac{\partial f(Q_{\Sigma t})}{\partial Q_{\Sigma t}} W_i(z) u_{it} - \rho_i(u_{it}) = 0. \tag{28}$$

Отсюда следует, что при цене p_t^ν, сформированной координатором на ν-й итерации, $t = 1, 2, \ldots, T_p$, олигополисты, чтобы удовлетворялось вышеприведенное соотношение (28), должны использовать несколько измененный, по сравнению с (12), критерий:

$$J_i = \sum_{t=0}^{T_p} \beta^t \left[\left(p_t^\nu - PL_i\right) Q_{it}^\nu + \frac{1}{2} \frac{\partial f\left(Q_{\Sigma t}^\nu\right)}{\partial Q_{\Sigma t}^\nu} \left(Q_{it}^\nu\right)^2 - \frac{1}{2} \rho_i \left(u_{it}^\nu\right)^2 \right] \to \max_{u_{it}^\nu}, \tag{29}$$

где суммарный объем производства $Q_{\Sigma t}^\nu$ непосредственно связан с задаваемой на ν-й итерации ценой $Q_{\Sigma t}^\nu = f^{-1}\left(p_t^\nu\right)$. После определения $Q_{it}^\nu\left(p_t^\nu\right)$ в соответствии с критерием (29), рассчитывается промежуточная цена:

$$p_t^{*\nu} = f\left(\sum_{i=1}^{N} Q_{it}^\nu\left(p_t^\nu\right)\right), \tag{30}$$

далее по формуле (19) уточняется цена на следующей итерации $p_t^{\nu+1}$.

В частности, при логарифмической функции спроса

$$p_t = a - b\ln(Q_{\Sigma t}) \tag{31}$$

измененный критерий будет иметь следующий вид:

$$J_i = \sum_{t=0}^{T_p} \beta^t \left[\left(p_t^\nu - PL_i\right) - \frac{1}{2} \frac{b}{Q_{\Sigma t}^\nu} \left(Q_{it}^\nu\right)^2 - \frac{1}{2} \rho_i \left(u_{it}^\nu\right)^2 \right] \to \max_{u_{it}^\nu}. \tag{32}$$

Как следует из (28), справедливо следующее соотношение:

$$W_i(z) W_i\left((\beta z)^{-1}\right)(p_t - PL_i) + W_i(z) W_i\left((\beta z)^{-1}\right) \frac{\partial f(Q_{\Sigma t})}{\partial Q_{\Sigma t}} Q_{it} - \rho_i Q_{it} = 0. \tag{33}$$

Следовательно, при фиксированной динамике цены p_t увеличение модуля производной функции спроса

$$\left| f'_{Q_{\Sigma t}} \right| = \left| \frac{\partial f(Q_{\Sigma t})}{\partial Q_{\Sigma t}} \right|$$

приводит к уменьшению Q_{it}, и наоборот. Таким образом,

$$Q_{it} \leqslant \frac{W_i(z) W_i\left((\beta z)^{-1}\right)(p_t - PL_i)}{\rho_i + \min\limits_{0 \leqslant Q_{\Sigma t} \leqslant \max Q_\Sigma} \left| f'_{Q_{\Sigma t}} \right| W_i(z) W_i\left((\beta z)^{-1}\right)}, \tag{34}$$

где $\max Q_\Sigma$ — максимально допустимый уровень производства, при котором цена положительна.

Тогда сходимость итерационной процедуры (19) будет обеспечена при условии

$$\left| 1 - \lambda + \lambda \min_{0 \leqslant Q_{\Sigma t} \leqslant \max Q_\Sigma} \frac{\partial p_t^{*\nu}}{\partial p_t^\nu} \right| < 1$$

и тем более при

$$\left| 1 - \lambda - \lambda \max_{0 \leqslant Q_{\Sigma t} \leqslant \max Q_\Sigma} \left| f'_{Q_{\Sigma t}} \right| \cdot \max_{|z=1|} \left\{ \sum_{i=1}^{N} \left[\Phi_i(z) \Phi_i\left((\beta z)^{-1}\right) \right] \right\} \right| < 1, \tag{35}$$

где

$$\Phi_i(z)\Phi_i\left((\beta z)^{-1}\right) = \frac{W_i(z)W_i\left((\beta z)^{-1}\right)}{\rho_i + \min\limits_{0\leqslant Q_{\Sigma t}\leqslant \max Q_\Sigma} \left|f'_{Q_{\Sigma t}}\right| W_i(z)W_i\left((\beta z)^{-1}\right)}. \tag{36}$$

Из (35) можно получить следующее ограничение на λ:

$$0 < \lambda < \frac{2}{1 + \max\limits_{0\leqslant Q_{\Sigma t}\leqslant \max Q_\Sigma} \left|f'_{Q_{\Sigma t}}\right| \cdot \max\limits_{|z=1|} \left\{\sum\limits_{i=1}^{N} \left[\Phi_i(z)\Phi_i\left((\beta z)^{-1}\right)\right]\right\}}. \tag{37}$$

Так как в силу (36)

$$\min_{0\leqslant Q_{\Sigma t}\leqslant \max Q_\Sigma} \left|f'_{Q_{\Sigma t}}\right| \Phi_i(z)\Phi_i\left((\beta z)^{-1}\right) \leqslant 1,$$

то можно получить более консервативное и простое ограничение на λ:

$$0 < \lambda < \frac{2}{1 + \dfrac{\max\limits_{0\leqslant Q_{\Sigma t}\leqslant \max Q_\Sigma}\left|f'_{Q_{\Sigma t}}\right|}{\min\limits_{0\leqslant Q_{\Sigma t}\leqslant \max Q_\Sigma}\left|f'_{Q_{\Sigma t}}\right|} \cdot N}. \tag{38}$$

2.5. Динамическая модель олигополии при взаимодействии олигополистов

Рассмотренный выше подход, основанный на итерационном изменении цены, можно использовать и при взаимодействии олигополистов. Так, если, например, обратная функция спроса имеет вид

$$p = a - b\sum_{i=1}^{N} Q_{it} - bQ_{N+1,t}, \tag{39}$$

где объем производства $(N + 1)$-го участника зависит от объемов производства остальных олигополистов следующим образом:

$$Q_{N+1,t} = \sum_{i=1}^{N} W_{i(N+1)}(z)Q_{it}, \tag{40}$$

то максимизация критериев (12) олигополистов приводит к следующему соотношению:

$$\frac{\partial J_{\tau i}}{\partial u_{it}} = W_i\left((\beta z)^{-1}\right)(p_t - PL_i) - \left[1 + W_{iN+1}\left((\beta z)^{-1}\right)\right] W_i\left((\beta z)^{-1}\right) W_i(z)u_{it} - \rho_i u_{it} = 0, \tag{41}$$

где $i = 1, 2, \ldots, N$. Тогда, если p_t^ν — цены, сформированные координатором на ν-й итерации, $t = 1, 2, \ldots, T_p$, оптимизация критериев (12) при этих задаваемых извне ценах может быть осуществлена путем некоторого изменения олигополистами своих критериев. А именно, вместо (12) путем использования следующих критериев:

$$J_i = \sum_{t=0}^{T_p} \beta^t \left\{(p_t^\nu - PL_i)Q_{it}^\nu - b\left[\frac{1}{2}\left(Q_{it}^\nu\right)^2 + Q_{N+1t}^\nu Q_{it}^{\nu-1}\right] - \frac{1}{2}\rho_i\left(u_{it}^\nu\right)^2\right\} \to \max_{u_{it}^\nu}, \quad i = 1, 2, \ldots, N, \tag{42}$$

при ограничении (17), (40).

Таким образом, оптимальные стратегии (как разомкнутые, так и замкнутые) для достаточно широкого класса задач могут быть рассчитаны экономическими агентами независимо друг от друга при итерационно изменяемом уровне цен. Для расчета разомкнутых игровых стратегий при небольшом числе олигополистов могут быть использованы электронные таблицы типа Excel. Рассмотренная выше итерационная процедура может быть также использована при исследовании перспектив развития мультиагентных рыночных систем.

3. Результаты расчетов

3.1. Линейная обратная функция спроса

3.1.1. Дуополия

При проведении расчетов применительно к условной дуополии на основе соотношений (16), (18)–(19) предполагалось, что объемы производства фирм-олигополистов связаны с инвестициями в основной капитал u_{2t} передаточной функцией:

$$W_i(z) = \frac{\gamma_i z}{(z-\mu_i)^2}, \quad \gamma_i > 0, \quad 0 < \mu_i < 1, \quad i = 1, 2, \tag{43}$$

где z — оператор сдвига, т. е. $zx_t = x_{t+1}$.

Значения параметров (43) и использованных экономических показателей двух фирм-олигополистов для базового варианта приведены в табл. 1. В качестве обратной функции спроса использовалась линейная функция $p_t = 120 - 0{,}15(Q_{1t} + Q_{2t})$. Ставка дисконта r принята на уровне 0,05.

Таблица 1. Показатели фирм-олигополистов

μ_1	0,85	c_1	65
μ_2	0,80	c_2	75
γ_1	0,002	ρ_1	0,0003
γ_2	0,003	ρ_2	0,0001

Практика проведения расчетов в соответствии с итерационным методом показывает, что приемлемых результатов можно достичь при небольшом числе итераций, что, при относительно небольшом числе участников рынка, позволяет использовать электронные таблицы.

Для данного примера результаты расчетов в Excel с использованием процедуры «Поиск решения» объемов производства и цены, в соответствии с критериями (16) при $T_p = 35$ и ограничениями (43), или в эквивалентной форме:

$$Q_{it}^{\nu} = 2\mu_i Q_{it-1}^{\nu} + \mu_i^2 Q_{it-2}^{\nu} + \gamma_i u_{it-1}^{\nu}, \quad \gamma_i > 0, \quad 0 < \mu_i < 1, \quad i = 1, 2, \tag{44}$$

при $\lambda = 0{,}5$ в (19), представлены в табл. 2. Равновесные по Нэшу–Курно уровни показателей достигаются в данном примере за 3–4 итерации.

В табл. 2 приведены результаты расчетов динамики цены и объемов производства дуополистов для данного примера как на основе связанных (coupled) уравнений матричных уравнений Риккати в Matlab (здесь и далее в табл. — Риккати), так и в соответствии с рассмотренным выше итерационным методом (18)–(19) в системе Excel (после 4 итераций; на каждой итерации для оптимизации стратегий каждой из компаний использовалась процедура «Поиск решения»).

3.1.2. Триополия

При проведении расчетов применительно к условной триополии (на рынке присутствует три олигополиста) на основе соотношений (16), (18)–(19) также предполагалось, что объемы производства фирм-олигополистов связаны с инвестициями в основной капитал u_{it}, $i = 1, 2, 3$, соотношением (43).

Значения параметров (43) и использованных экономических показателей двух фирм-олигополистов для базового варианта приведены в табл. 3. В качестве обратной функции спроса использовалась линейная функция $p_t = 120 - 0{,}15(Q_{1t} + Q_{2t} + Q_{3t})$. Ставка дисконта r принята на уровне 0,05.

Таблица 2. Сопоставление расчетной динамики цены и объемов производства в системе Matlab (Риккати) и в соответствии с итерационным методом в системе Excel

Время	Риккати			4-я итерация		
	Цена	Объем производства		Цена	Объем производства	
		Q_{1t}	Q_{2t}		Q_{1t}	Q_{2t}
1	117,932	4,701	9,083	117,934	4,701	9,083
2	115,050	12,081	20,921	115,052	12,081	20,920
3	112,095	20,712	31,991	112,096	20,713	31,987
4	109,453	29,633	40,679	109,454	29,634	40,672
5	107,281	38,228	46,562	107,281	38,230	46,550
6	105,599	46,135	49,869	105,598	46,138	49,851
7	104,356	53,169	51,126	104,354	53,174	51,102
8	103,471	59,263	50,930	103,469	59,271	50,900
9	102,862	64,430	49,826	102,860	64,442	49,791
10	102,453	68,727	48,254	102,451	68,744	48,212
11	102,185	72,239	46,530	102,183	72,262	46,482
12	102,011	75,061	44,866	102,010	75,091	44,809
13	101,899	77,290	43,382	101,899	77,327	43,316
14	101,827	79,019	42,134	101,827	79,062	42,056
15	101,780	80,334	41,133	101,779	80,382	41,042
16	101,749	81,311	40,364	101,747	81,360	40,260
17	101,728	82,019	39,796	101,724	82,061	39,685
18	101,714	82,513	39,394	101,706	82,540	39,286
19	101,705	82,842	39,124	101,693	82,838	39,035
20	101,700	83,046	38,953	101,684	82,988	38,911

Таблица 3. Показатели фирм-олигополистов

μ_1	0,85	c_1	65
μ_2	0,80	c_2	75
μ_3	0,75	c_3	67
γ_1	0,002	ρ_1	0,0003
γ_2	0,003	ρ_2	0,0001
γ_3	0,005	ρ_3	0,00015

Результаты расчетов в системе Excel объемов производства и цены в соответствии с критериями (16) $T_p = 35$ и ограничениями (43), при $\lambda = 0{,}3$ в (19) представлены на рис. 1, 2. Равновесные по Нэшу–Курно уровни показателей достигаются в данном примере приблизительно за 9 итераций.

Так, в табл. 4 приведены результаты расчетов динамики цены и объемов производства дуополистов для данного примера на основе связанных (coupled) матричных уравнений Риккати в Matlab (в табл. — Риккати), а также в соответствии с рассмотренным итерационным методом (18)–(19) (после 9 итераций) в системе Excel.

3.1.3. Дуополия на рынке дифференцированной продукции

При проведении расчетов применительно к условной дуополии на рынке дифференцированной продукции с использованием на основе соотношений (16), (18)–(19) предполагалось, что объемы производства фирм-олигополистов связаны с инвестициями в основной капитал u_{2t} передаточной функцией (43). Значения параметров (43) и использованных экономических пока-

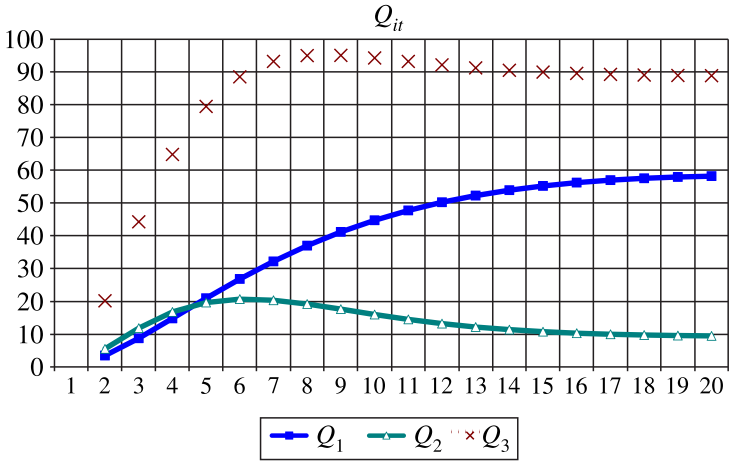

Рис. 1. Динамика расчетных объемов производства Q_{it}, $i = 1, 2, 3$, в триополии

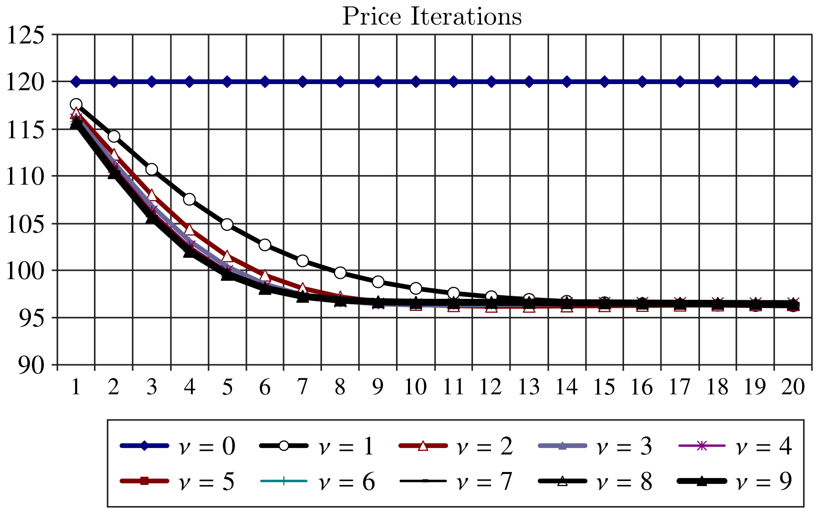

Рис. 2. Динамика расчетных уровней цены p_t в триополии при разных итерациях ν

зателей двух фирм-олигополистов для базового варианта приведены в табл. 5. Ставка дисконта r принята на уровне 0,05.

В качестве обратных функций спроса использовались линейные функции (11) (см. п. 2.3.), значения параметров которых представлены в табл. 6.

Результаты итерационных расчетов в системе Excel объемов производства и цен в соответствии с критериями (16) $T_p = 25$ и ограничениями (43) при $\lambda = 0{,}5$ в (19) представлены на рис. 3, 4. Равновесные по Нэшу – Курно уровни показателей достигаются в данном примере за 4–5 итераций.

В табл. 7, 8 приведены результаты расчетов динамики цены и объемов производства дуополистов для данного примера на основе связанных (coupled) уравнений матричных уравнений Риккати в Matlab (в табл. — Риккати), а также в соответствии с рассмотренным выше итерационным методом (18)–(19) (после 5 итераций) в системе Excel.

3.2. Логарифмическая обратная функция спроса

В данном разделе представлены результаты расчетов оптимальных по Нэшу – Курно стратегий с помощью рассмотренной выше итерационной процедуры применительно к линейным динамическим играм с логарифмической обратной функцией спроса в случае монополии и дуопо-

Таблица 4. Сопоставление расчетной динамики цены и объемов производства в системе Matlab (Риккати) и в соответствии с итерационным методом в системе Excel

Время	Риккати				9-я итерация			
	Цена	Объем производства			Цена	Объем производства		
		Q_{1t}	Q_{2t}	Q_{3t}		Q_{1t}	Q_{2t}	Q_{3t}
1	115,639	3,447	5,491	20,133	115,681	3,448	5,516	20,174
2	110,294	8,732	11,782	44,194	110,355	8,733	11,834	44,278
3	105,568	14,791	16,694	64,732	105,620	14,789	16,761	64,836
4	102,006	20,959	19,588	79,414	102,034	20,952	19,653	79,510
5	99,605	26,844	20,632	88,489	99,607	26,829	20,681	88,554
6	98,135	32,234	20,316	93,219	98,120	32,212	20,341	93,245
7	97,316	37,032	19,168	95,029	97,295	37,004	19,171	95,019
8	96,906	41,212	17,632	95,118	96,887	41,178	17,619	95,086
9	96,726	44,786	16,020	94,352	96,715	44,751	15,999	94,312
10	96,661	47,794	14,522	93,281	96,657	47,759	14,501	93,245
11	96,641	50,286	13,233	92,211	96,643	50,255	13,218	92,187
12	96,632	52,320	12,183	91,285	96,638	52,295	12,176	91,276
13	96,621	53,954	11,361	90,546	96,628	53,935	11,362	90,551
14	96,604	55,246	10,739	89,987	96,611	55,232	10,746	90,002
15	96,584	56,248	10,281	89,580	96,589	56,239	10,291	89,601
16	96,562	57,010	9,953	89,291	96,565	57,002	9,963	89,314
17	96,542	57,576	9,722	89,089	96,544	57,564	9,731	89,114
18	96,525	57,985	9,565	88,951	96,526	57,960	9,574	88,979
19	96,512	58,269	9,461	88,858	96,513	58,220	9,473	88,893
20	96,503	58,458	9,396	88,797	96,506	58,365	9,418	88,847

Таблица 5. Показатели фирм-олигополистов

μ_1	0,494	c_1	75
μ_2	0,801	c_2	55
γ_1	0,0156	ρ_1	0,13278
γ_2	0,0036	ρ_2	0,01178

Таблица 6. Значения параметров обратных функций спроса (11)

a_i	b_i	d_i
120	2,5	0,5
159,5	3,769	1

лии. В обоих рассмотренных примерах в качестве обратной функции спроса использовалась логарифмическая функция: $p_t = 4{,}313 - 0{,}749\ln(Q_{\Sigma t})$.

Ставка дисконтирования принята на уровне $r = 0{,}05$.

3.2.1. Монополия

Значения параметров (43) и использованных экономических показателей монополии приведены в табл. 9.

Проводилось сопоставление результатов использования: 1) прямого метода оптимизации с нелинейным критерием (29), включающим логарифмическую функцию спроса, в системе Excel; 2) метода оптимизации на основе предложенной выше итерационной процедуры с критерием (32) при $\lambda = 0{,}5$.

Таблица 7. Сопоставление расчетной динамики цен в системе Matlab (Риккати) и в соответствии с итерационным методом в системе Excel

Время	Риккати		5-я итерация	
	Цена 1-го продукта	Цена 2-го продукта	Цена 1-го продукта	Цена 2-го продукта
1	118,757	154,894	118,843	154,937
2	117,327	148,506	117,488	148,587
3	116,066	141,941	116,268	142,040
4	115,062	136,037	115,275	136,131
5	114,306	131,151	114,509	131,224
6	113,760	127,356	113,943	127,398
7	113,380	124,566	113,540	124,575
8	113,127	122,622	113,264	122,600
9	112,967	121,345	113,084	121,296
10	112,873	120,567	112,974	120,493
11	112,823	120,139	112,913	120,044
12	112,802	119,946	112,885	119,831
13	112,799	119,899	112,877	119,767
14	112,805	119,935	112,881	119,794
15	112,816	120,010	112,894	119,877
16	112,827	120,098	112,914	120,006
17	112,838	120,183	112,942	120,190
18	112,847	120,256	112,986	120,462
19	112,854	120,315	113,054	120,873
20	112,859	120,360	113,164	121,494

Таблица 8. Сопоставление расчетной динамики объемов производства в системе Matlab (Риккати) и в соответствии с итерационным методом в системе Excel

Время	Риккати		5-я итерация	
	Объем производства		Объем производства	
	Q_{1t}	Q_{2t}	Q_{1t}	Q_{2t}
1	0,267	1,151	0,269	1,154
2	0,513	2,781	0,517	2,788
3	0,678	4,479	0,684	4,490
4	0,771	6,021	0,778	6,035
5	0,817	7,305	0,824	7,321
6	0,835	8,307	0,842	8,324
7	0,839	9,046	0,845	9,063
8	0,837	9,563	0,843	9,579
9	0,833	9,902	0,838	9,918
10	0,829	10,110	0,834	10,126
11	0,826	10,224	0,830	10,242
12	0,824	10,276	0,828	10,297
13	0,823	10,289	0,827	10,313
14	0,822	10,279	0,826	10,306
15	0,822	10,259	0,826	10,285
16	0,822	10,236	0,826	10,253
17	0,822	10,214	0,826	10,206
18	0,823	10,194	0,825	10,137
19	0,823	10,178	0,822	10,032
20	0,823	10,166	0,813	9,872

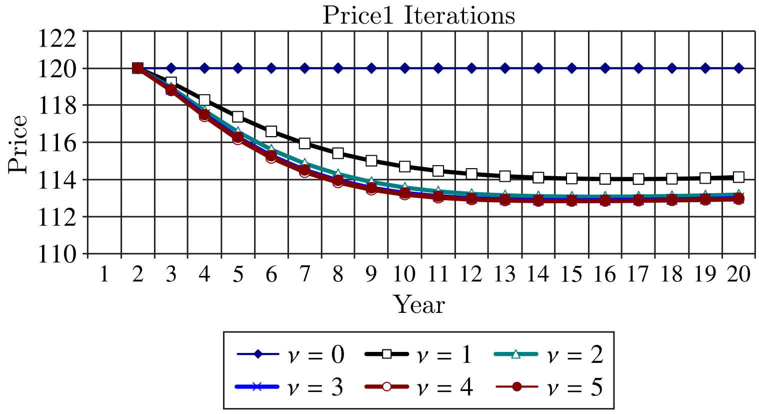

Рис. 3. Динамика расчетных уровней цены p_{1t} в дуополии при разных итерациях ν

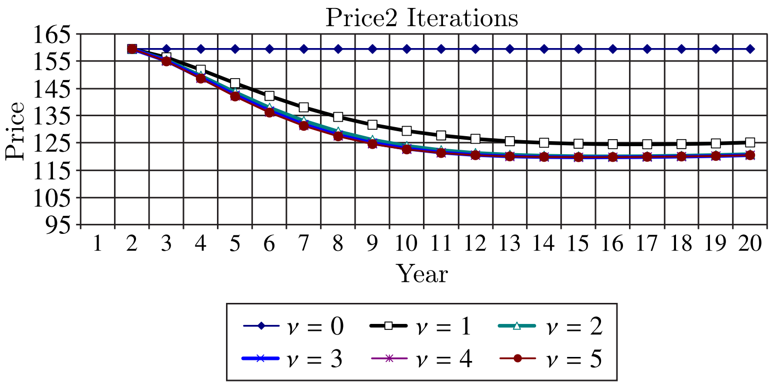

Рис. 4. Динамика расчетных уровней цены p_{2t} в дуополии при разных итерациях ν

Таблица 9. Показатели фирмы-монополиста

μ_1	0,65
γ_1	0,70
c_1	0,30
ρ_1	0,15

Результаты расчетов в системе Excel в соответствии с прямым методом и итерационным (после 9 итераций) $T_p = 25$ представлены в табл. 10.

3.2.2. Дуополия

Значения параметров (43) и использованных экономических показателей двух фирм-дуополистов для базового варианта приведены в табл. 11. В качестве обратной функции спроса использовалась такая же логарифмическая функция, как и в п. 3.2.1: $p_1 = 4{,}313 - 0{,}749\ln(Q_{1t})$. Ставка дисконтирования r принята на уровне 0,05 при $\lambda = 0{,}5$.

В рассмотренном примере сходимость к оптимальным уровням производства компаний и соответствующей им цены достигается за 7–9 итераций (рис. 5, 6).

Рассмотренная выше процедура может быть использована и при других нелинейных функциях спроса типа (27), например при функции с постоянной эластичностью: $p_0 = \varsigma Q_0^{\varepsilon}$. Она не требует обращения к специальным численным методам решения задач оптимального управления и теории игр (например, к методам квазилинеаризации [Хофер, Лундерштедт, 1981]) и может быть просто реализована в электронных таблицах типа Excel.

Таблица 10. Сопоставление расчетной динамики цены и объемов производства при использовании прямого и итерационного методов оптимизации

Время	Цена		Объем производства	
	Прямой метод	9-я итерация	Прямой метод	9-я итерация
1	4,313	4,313	1,000	1,000
2	2,454	2,457	11,949	11,948
3	1,961	1,965	23,064	23,063
4	1,730	1,735	31,376	31,375
5	1,612	1,617	36,732	36,730
6	1,552	1,557	39,824	39,821
7	1,522	1,528	41,426	41,422
8	1,509	1,516	42,149	42,145
9	1,505	1,511	42,407	42,402
10	1,504	1,511	42,447	42,442
11	1,505	1,512	42,405	42,399
12	1,506	1,513	42,347	42,341
13	1,506	1,513	42,300	42,295
14	1,507	1,514	42,274	42,268
15	1,507	1,514	42,267	42,261
16	1,507	1,514	42,271	42,266
17	1,507	1,514	42,273	42,267
18	1,508	1,514	42,239	42,234
19	1,510	1,517	42,104	42,099
20	1,516	1,523	41,747	41,743

Таблица 11. Показатели фирм-олигополистов

μ_1	0,650	c_1	0,300
μ_2	0,434	c_2	0,445
γ_1	0,700	ρ_1	0,15
γ_2	0,443	ρ_2	0,20

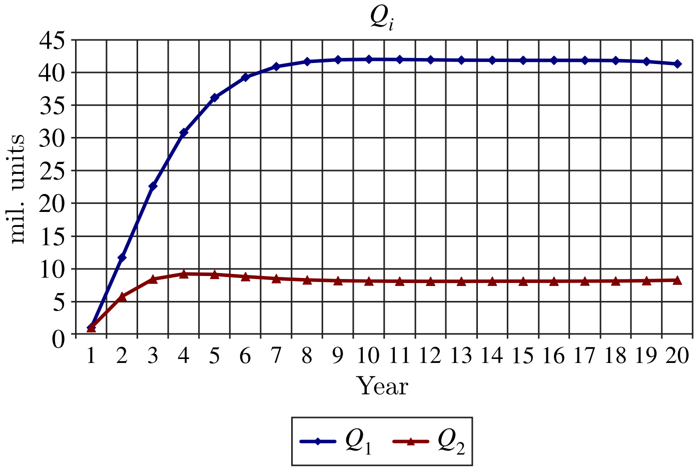

Рис. 5. Динамика расчетных объемов производства Q_{it}, $i = 1, 2$, в дуополии

3.3. Взаимодействие олигополистов

В рассматриваемом примере предполагается, что две компании – производители оборудования поставляют уникальное высокотехнологичное оборудование в объемах Q_{1t}, Q_{2t} в ком-

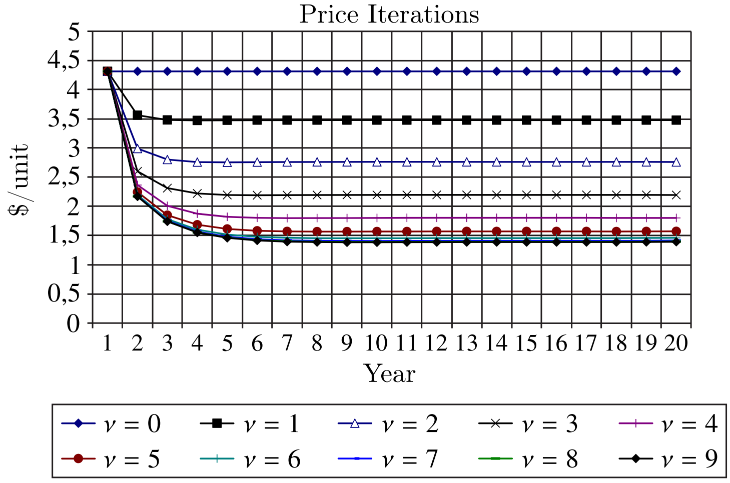

Рис. 6. Динамика расчетных уровней цены p_t в дуополии при разных итерациях ν

панию – производитель высокотехнологичной продукции (ВП). Компания – производитель ВП, опасаясь нарушения поставок оборудования из-за введения всевозможных ограничений и санкций, за счет отчислений от своей прибыли $m_3\gamma_3Q_{3t}$ инвестирует в развитие импортозамещающего производства оборудования в четвертой компании. Часть оборудования, производимого четвертой компанией, — ϖ — поставляется в третью компанию (ВП), а другая часть — $(1 - \varpi)$ — может также найти применение на внешнем рынке.

При этом компании – производители оборудования, ориентируясь на спрос компании – производителя ВП, максимизируют свои критерии (12) в соответствии со следующей обратной функцией спроса:

$$p_t = a - b(Q_{1t} + Q_{2t} + (1 - \varpi)Q_{4t}), \tag{45}$$

где p_t — стоимость единицы оборудования.

Таким образом, имеют место следующие соотношения:

$$Q_{it} = W_i(z)I_{it}, \quad i = 1, 2, \tag{46}$$

$$Q_{3t} = W_3(z)(Q_{1t} + Q_{2t} + \varpi Q_{4t}), \tag{47}$$

$$Q_{4t} = W_4(z)m_3\chi_3Q_{3t}. \tag{48}$$

Все передаточные функции имеют вид (43). Значения параметров модели (45)–(48) представлены в табл. 12. Коэффициенты обратной функции спроса имеют следующие значения: $a = 0{,}47657$, $b = 0{,}000786$.

Проводилось сопоставление результатов расчетов оптимальных стратегий олигополистов путем использования: 1) решений связанных (coupled) уравнений Риккати в системе Matlab; 2) итерационной процедуры (18)–(19) с измененным критерием (42) в системе Excel при $T_p = 35$.

Результаты расчетов в системе Excel в соответствии с прямым методом и итерационным, при $\lambda = 0{,}25$ (после 10 итераций), представлены в табл. 13 и на рис. 7.

4. Выводы

Рассмотренная итерационная процедура обеспечивает декомпозицию игровых задач на более простые задачи локальной оптимизации, что позволяет упростить определение оптимальных

Таблица 12. Показатели фирм-олигополистов

μ_1	0,753	c_1	0,1
μ_2	0,753	c_2	0,07
μ_3	0,721	m_3	0,5
μ_4	0,753	χ_3	0,0075
γ_1	14,338	ϖ	0,5
γ_2	14,338	ρ_1	15,336
γ_3	0,0899	ρ_2	15,336
γ_4	14,338	r	0,05

Таблица 13. Сопоставление расчетной динамики цены в системе Matlab и в соответствии с итерационным методом в системе Excel

Время	Цена	
	Matlab	10-я итерация
1	0,178	0,178
2	0,190	0,190
3	0,205	0,206
4	0,219	0,220
5	0,229	0,231
6	0,235	0,237
7	0,238	0,240
8	0,238	0,241
9	0,236	0,239
10	0,234	0,237
11	0,232	0,235
12	0,229	0,232
13	0,227	0,230
14	0,225	0,228
15	0,223	0,226
16	0,221	0,224
17	0,220	0,223
18	0,219	0,222
19	0,218	0,221
20	0,217	0,220

рыночных стратегий экономических агентов в условиях ограниченной информации и тем самым более эффективно реализовать принцип соревновательности при индикативном планировании.

Использование операционного исчисления упрощает формирование итерационных процедур определения оптимальных стратегий в динамических играх.

Предложенная итерационная процедура нахождения оптимальных рыночных стратегий не требует обращения к специальным численным методам решения задач оптимального управления и теории игр. Она может быть также использована при исследовании перспектив развития мультиагентных рыночных систем.

При небольшом числе участников рынка рассмотренная итерационная процедура может быть просто реализована в широко доступных электронных таблицах типа Excel.

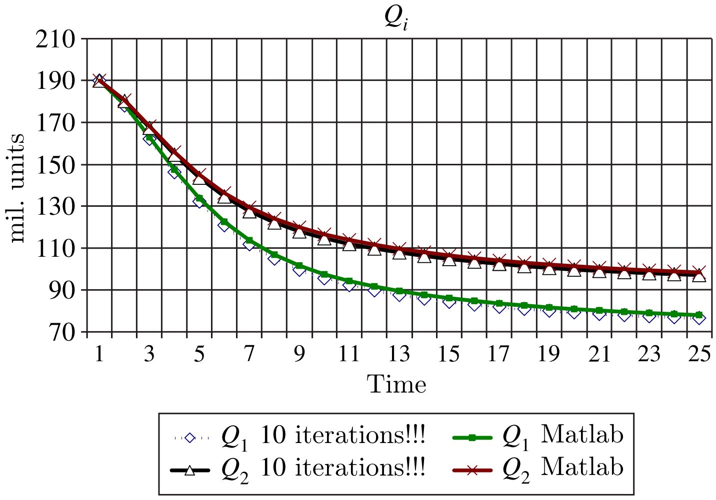

Рис. 7. Динамика расчетных объемов производства, Q_{it}, $i = 1, 2$, в дуополии в системе Matlab и в соответствии с итерационным методом в системе Excel

Список литературы (References)

Варшавский Л. Е. Использование методов теории управления для формирования рыночных структур // Компьютерные исследования и моделирование. — 2014. — Т. 6, № 5. — С. 839–859.

Varshavsky L. E. Ispol’zovanie metodov teorii upravlenija dlja formirovanija rynochnyh struktur [Control theory methods for creating market structures] // Computer Research and Modeling. — 2014. — Vol. 6, No 5. — P. 839–859 (in Russian).

Варшавский Л. Е. Прогнозирование динамики показателей олигополистических рынков высокотехнологичных производств с использованием методов операционного исчисления // Труды Института системного анализа Российской академии наук. — 2019. — Т. 69, вып. 2. — С. 3–16.

Varshavsky L. E. Prognozirovanie dinamiki pokazatelej oligopolisticheskih rynkov vysokotekhnologichnyh proizvodstv s ispol’zovaniem metodov operacionnogo ischisleniya [Forecasting the dynamics of indicators of oligopolistic markets of high-tech industries using operational calculus methods] // Trudy Instituta sistemnogo analiza [Proceedings of the Institute for Systems Analysis]. — 2019. — Vol. 69, No. 2. — P. 3–16 (in Russian).

Итеративные методы в теории игр / под ред. В. З. Беленького и В. А. Волконского. — М.: Наука, 1974.

Iterativnye metody v teorii igr [Iterative methods in game theory] / ed. by V. Z. Belenky and V. A. Volkonsky. — Moscow: Nauka, 1974 (in Russian).

Маркус М., Минк Х. Обзор по теории матриц и матричных неравенств. — М.: Наука, 1972.

Markus M., Mink H. Obzor po teorii matric i matrichnyh neravenstv [A survey of matrix theory and matrix inequalities]. — Moscow: Nauka, 1972 (in Russian).

Полтерович В. М. О формировании системы национального планирования в России // Журнал Новой экономической ассоциации. — 2015. — № 2 (26). — С. 237–242.

Polterovich V. M. O formirovanii sistemy nacional’nogo planirovaniya v Rossii [On the formation of the national planning system in Russia] // Zhurnal Novoj ekonomicheskoj associacii [Journal of the New Economic Association]. — 2015. — No. 2 (26). — P. 237–242 (in Russian).

Устюжанина Е. В., Евсюков С. Г. Индикативное планирование: определение понятия и российская практика // Вестник Российского экономического университета им. Г. В. Плеханова. — 2015. — № 4 (82). — С. 104–113.

Ustyuzhanina E. V., Evsyukov S. G. Indikativnoe planirovanie: opredelenie ponyatiya i rossijskaya praktika [Indicative planning: definition of the concept and Russian practice] // Vestnik Rossijskogo ekonomicheskogo universiteta im. G. V. Plekhanova [Bulletin of the Plekhanov Russian University of Economics]. — 2015. — No. 4 (82). — P. 104–113 (in Russian).

Хофер Э., Лундерштедт Р. Численные методы оптимизации. — М.: Машиностроение, 1981.

Hofer E., Lunderstedt R. Chislennye metody optimizacii [Numerical methods of optimization]. — Moscow: Mashinostroenie, 1981 (in Russian).

Basar T., Olsder G. J. Dynamic noncooperative game theory. — London, New York: Academic Press, 1995.

Dockner E. J., Jorgenson S., Ngo Van Long, Sorger G. Differential games in economics and management science. — Cambridge: Cambridge University Press, 2000.

Engwerda J. C. Linear quadratic games: An overwiew. — Discussion Paper 2006-110. — Tilburg University, Center for Economic Research, 2006.

Jury E. I. Theory and applications of the Z-transform method. — N.Y.: John Wiley, 1964.

Nortmann B., Monti A., Sassano V., Mylvaganam T. Nash equilibria for linear quadratic discrete-time dynamic games via iterative and data-driven algorithms // IEEE Transactions on Automatic Control. — 2024. — Vol. 69, No. 10. — P. 6561–6575.

Systems: decomposition, optimization and control / ed. by M. G. Singh and A. Titli. — Oxford: Pergamon Press, 1978.