

УДК: 532.5

## К оценке спектра пульсаций временной выборки компонент 3D-вектора скорости на основе гипотез А. Н. Колмогорова

С. А. Кусюмов, А. Н. Кусюмов<sup>а</sup>, Е. В. Романова

Казанский национальный исследовательский технический университет имени А. Н. Туполева,  
Россия, 420111, г. Казань, ул. К. Маркса, д. 10

E-mail: <sup>а</sup> [postbox7@mail.ru](mailto:postbox7@mail.ru)

*Получено 30.09.2025, после доработки — 26.12.2025.  
Принято к публикации 26.02.2026.*

Преобразование Фурье является основным инструментом для оценки спектральных характеристик турбулентного течения. Применение преобразования Фурье (как правило, дискретного) к первой степени пульсационной продольной или поперечной компоненты вектора скорости позволяет оценить спектральную плотность энергии (ESD) или мощности (PSD). Для оценки ESD и PSD турбулентного сигнала, полученного по результатам численного моделирования обтекания тела, создается массив значений сигнала с дискретизацией во временной или пространственной области. Референтное распределение спектральной характеристики ESD (закон масштабирования) в области волновых чисел инерциального поддиапазона следует из двух гипотез А. Н. Колмогорова и определяется законом  $-\frac{5}{3}$ . Закон  $-\frac{5}{3}$  используется также в большинстве работ для оценки распределения ESD и PSD в частотной области. При этом распределение спектра мощности PSD получается из распределения спектра энергии ESD нормировкой к времени сканирования сигнала. Альтернативная спектральная характеристика энергии (ESS) пульсаций скорости может быть определена преобразованием Фурье для квадрата пульсаций скорости. Размерность ESS в пространственной области совпадает с размерностью закона  $-\frac{5}{3}$  А. Н. Колмогорова в области волновых чисел. При дискретизации сигнала во временной области для ESS ранее получен закон масштабирования  $-2$  в частотной области. В настоящей работе вводится альтернативная оценка спектра мощности сигнала (PSS), полученная с использованием преобразования Фурье для третьей степени пульсаций скорости. Из гипотез А. Н. Колмогорова следует, что в частотной области закон масштабирования спектра PSS определяется степенью  $-\frac{5}{2}$ . В качестве приложения рассматривается нестационарное обтекание отсека цилиндрической 3D-поверхности при числе Рейнольдса 3900. Численное моделирование выполнено с использованием пакета ANSYS Fluent на базе решения уравнений Навье–Стокса в несжимаемой постановке. Пространственно-временные характеристики вектора скорости турбулентного потока анализируются с применением правильной ортогональной декомпозиции (POD). Для оценки ESS и PSS используется преобразование Фурье с дискретизацией сигнала по времени.

Ключевые слова: уравнения Навье–Стокса, турбулентность, спектр, закон Колмогорова, цилиндр, правильная ортогональная декомпозиция

UDC: 532.5

## On the A. N. Kolmogorov hypotheses-based evaluation of the pulsation spectrum for a time sample of 3D velocity vector components

S. A. Kusyumov, A. N. Kusyumov<sup>a</sup>, E. V. Romanova

Kazan National Research Technical University named after A. N. Tupolev,  
10 K. Marx st., Kazan, 420111, Russia

E-mail: <sup>a</sup> postbox7@mail.ru

*Received 30.09.2025, after completion – 26.12.2025.*

*Accepted for publication 26.02.2026.*

The Fourier transformation is the basic tool for evaluating the spectral characteristics of a turbulent flow. The Fourier transform (usually discrete) of the first power of the longitudinal or transverse component of the velocity vector pulsations allows estimation of the energy spectral density (ESD) or power spectral density (PSD). To estimate the ESD and PSD of a turbulent signal obtained from numerical simulation, an array of signal values with discretization in the time or spatial domain is generated. The reference distribution of the ESD spectrum (scaling law) within the wave number domain of the inertial subrange is derived from two hypotheses proposed by A.N. Kolmogorov and is characterized by the  $-\frac{5}{3}$  law. The  $-\frac{5}{3}$  law is also used in most references to estimate the ESD distribution in the frequency domain. The distribution of the power spectrum PSD is derived from the distribution of the energy spectrum ESD by normalizing to the signal scanning time. An alternative energy spectral characteristic (ESS) of velocity fluctuations can be determined by the Fourier transform of the square of the velocity fluctuations. In the wave numbers domain, the dimension of ESS in the spatial domain coincides with the dimension of A. N. Kolmogorov's  $-\frac{5}{3}$  law. When considering a signal sampled in the time domain, a scaling law of  $-2$  for ESS was previously obtained in the frequency domain. An alternative estimate of the Power Signal Spectrum (PSS) is discussed in this paper based on the Fourier transform of the third-order velocity pulsations. Based on the hypotheses proposed by A. N. Kolmogorov, it can be inferred that in the frequency domain, the scaling law of the PSS spectrum is characterized by the power of  $-\frac{5}{2}$ . Unsteady incompressible flow around a 3D cylindrical surface section at the Reynolds number of 3900 is considered as an application. The numerical simulation is performed using ANSYS Fluent commercial code and based on the Navier–Stokes equations. The spatio-temporal characteristics of the turbulent flow velocity vector are analyzed using the Proper Orthogonal Decomposition (POD). The Fourier transform is used to estimate the ESS and PSS of a time-sampled signal.

Keywords: Navier–Stokes equations, turbulence, spectrum, Kolmogorow's law, cylinder, Proper Orthogonal Decomposition

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2026, vol. 18, no. 2, pp. 289–313 (Russian).

## 1. Введение

Течение в следе на некотором расстоянии от поверхности плохообтекаемого тела обладает свойствами, присущими турбулентному потоку, уже при достаточно низких значениях числа Рейнольдса. Течение за плохообтекаемыми телами имеет существенно трехмерный характер даже при постановке задачи, когда течение вдоль одной из координат является безградиентным (например, 3D-обтекание отсека с периодическими краевыми условиями). Одной из задач изучения турбулентных течений является определение спектральных характеристик параметров течения. Спектральный анализ энергии сигнала, определяемый временной выборкой компонент вектора скорости, является атрибутом практически всех работ, где исследуется турбулентное течение. Полное описание турбулентного течения, где параметры течения являются функциями пространства и времени, может быть получено путем численного решения уравнений Навье – Стокса. Данный подход называется прямым численным моделированием Direct Numerical Simulation (DNS) [Moin, Mahesh, 1998].

Для описания спектральной плотности энергии (ESD) сигнала (компонент вектора скорости) в условиях однородной изотропной турбулентности в литературе используется закон масштабирования  $ESD \sim k^{-5/3}$  А. Н. Колмогорова [Kolmogorov, 1991] ( $k$  — волновое число). В литературе с законом  $-\frac{5}{3}$  (закон K41) сопоставляется квадрат спектральной характеристики, полученной преобразованием Фурье флуктуаций скорости турбулентного потока. Следует отметить, что закон  $-\frac{5}{3}$  получен для пространственного спектра продольной и поперечных компонент вектора скорости турбулентного течения. В работе [Kolmogorov, 1962] определение статистических характеристик турбулентности предложено с учетом перемежаемости в турбулентных течениях. При учете флуктуации диссипации энергии закон масштабирования  $-\frac{5}{3}$  для пространственного спектра ESD может быть записан в более общем виде:  $ESD \sim k^{-5/3-\mu}$ , где  $\mu = \text{const}$  (см. [Kraichnan, 1974]).

В [Kraichnan, 1974] рассматривалось значение  $\mu = 0,05/9$ , которое незначительно изменяет закон масштабирования  $-\frac{5}{3}$ . В [Long, 2003] по результатам анализа данных для течения в приливном канале с высоким числом Рейнольдса утверждается, что энергетический пространственный спектр масштабируется с показателем степени  $-2$  ( $\mu = \frac{1}{3}$ ). Аналогичный закон масштабирования был получен в работе [Dou, 2022].

В большинстве работ по моделированию спектра сигнала на основе компонент вектора скорости потока закон  $-\frac{5}{3}$  используется и для оценки спектра сигнала, дискретизованного во временной области. Основанием для перехода от пространственного спектра к временному является гипотеза Тейлора о замороженной турбулентности [Taylor, 1938]. В [Lathi, Ding, 2010] представлены теоретические аспекты, определяющие подход к анализу ESD во временной области с использованием преобразования Фурье первой степени турбулентного сигнала (флуктуаций скорости потока). В [Tennekies, Lumley, 1972] для оценки спектра энергии во временной области на основе статистической теории турбулентности получен закон масштабирования  $\omega^{-2}$  ( $\omega$  — угловая частота). При этом в работе [Tennekies, Lumley, 1972] остался открытым вопрос о представлении (форме) турбулентного сигнала, для которого определяются спектральные характеристики. Позднее аналогичный закон масштабирования  $-2$  ( $\omega^{-2}$ ) был получен также в [Kusyumov et al., 2023]. Для сопоставления спектральных характеристик с законом  $-2$  в [Kusyumov et al., 2023] предложено использовать преобразование Фурье для второй степени флуктуаций (мгновенная энергия) продольной или поперечной компонент вектора скорости потока.

Турбулентное течение характеризуется широким диапазоном масштабов длины от наименьшего (масштаба Колмогорова) до наибольшего, определяемого геометрией области моделирования [Pope, 2000]. Требуемые компьютерные ресурсы и временные ограничения затрудняют использование DNS-подхода для турбулентных потоков при высоких числах Рейнольдса  $Re$ .

Анализ [Pope, 2000] показывает, что количество требуемых точек сетки для 3D-изотропного (по трем направлениям) турбулентного течения пропорционально  $Re^{9/4}$ .

Поэтому инженерные вычисления в турбулентных течениях опираются на подходы, основанные на решении осредненных по Рейнольдсу нестационарных уравнений Навье–Стокса (URANS). Другое приближение — моделирование больших вихрей (Large Eddy Simulation, LES), является компромиссным по сложности подходом между DNS и URANS (см. [Lesieur, Metais, 1996; Moin, 1997]).

LES-подход использует пространственное осреднение вместо временного. Основная цель LES — определить уравнения для средней скорости, спектр которой не имеет высоких частот. Применение LES разрешает только масштабы, превышающие заданный положительный радиус осреднения. Методы LES были введены в [Deardorff, 1970] и основаны на операторах осреднения, действующих как фильтры нижних частот. В рамках LES вихревые структуры с размерами, превышающими размеры фильтра, разрешаются точно (на основе решения уравнений Навье–Стокса). Для моделирования вихревых структур меньших размеров используются дополнительные (подсеточные) соотношения. Поэтому ресурсы, необходимые для реализации LES, оказываются намного меньшими, чем для DNS. Так, для расчета турбулентности вдали от твердых стенок число ячеек сетки, необходимой для применения LES, увеличивается с ростом числа Рейнольдса намного медленнее, чем в случае DNS, и пропорционально  $Re^{0.4}$  [Гарбарук и др., 2012]. Однако вблизи стенок требования к сеткам для LES приближаются к требованиям для DNS: число ячеек, необходимых для моделирования 3D-изотропных течений, пропорционально  $Re^{1.8}$  [Гарбарук и др., 2012].

Расчетная сетка для решения уравнений Навье–Стокса, как правило, содержит подобласти с различной величиной пространственного шага расчетной сетки. Решение уравнений Навье–Стокса на сетках с недостаточно высоким пространственным разрешением (в целом или в части области моделирования) получило в литературе название Implicit LES-моделирования (ILES). ILES-технология исходит из того факта, что собственная диссипация, присущая численному методу, может быть использована вместо явной подсеточной модели [Ritos et al., 2018].

Численные методы для применения ILES должны обеспечивать высокое разрешение и нелинейную устойчивость при обеспечении монотонности или других физических/математических принципов [Laneu, 1998]. Без этих условий, обеспечивающих (по крайней мере) точность второго порядка по пространственным переменным, получаются результаты, которые не обладают свойством высокого разрешения [Rider, Margolin, 2003].

В настоящее время ILES-моделирование может быть осуществлено с использованием нескольких подходов (см. [Adams, Hickel, 2009]). Работа [Kawamura, Kuwahara, 1984] была одной из первых, в которой уравнения Навье–Стокса решались на сетке с недостаточным разрешением: высокое разрешение обеспечивалось только в области пограничного слоя и в следе. При этом вместо названия ILES в [Kawamura, Kuwahara, 1984] использовалось другое название метода интегрирования: прямое интегрирование уравнений Навье–Стокса.

Несмотря на то что ILES-подход менее требователен к вычислительным ресурсам, чем DNS, моделирование течений при достаточно высоких значениях числа Рейнольдса весьма затруднительно с технической точки зрения. Тем не менее в литературе приводятся результаты ILES- и DNS-моделирования внутренних и внешних течений при малых числах Рейнольдса. Интерес к использованию прямого численного моделирования при исследовании свойств турбулентных течений объясняется тем, что в этом случае не возникает потребности в решении так называемой проблемы замыкания системы RANS-уравнений.

Для малых значений числа Рейнольдса (около  $10^3$ ) 3D-цилиндрическая поверхность является каноническим объектом при решении задач численного моделирования с применением LES-

и DNS-подходов. Интерес к данной постановке задачи объясняется возможностью воспроизведения различных физических особенностей течения, включая отрыв (ламинарный) пограничного слоя, образование сдвиговых слоев, вихревой след (включая дорожку Кармана), переходящий в область турбулентного течения.

Результаты численного моделирования обтекания цилиндра при  $Re = 3900$  на базе решения уравнений Навье – Стокса представлены, в частности, в [Wissink, Rodi, 2008] (см. в [Molochnikov et al., 2019] обзор работ, посвященных численному моделированию). Для данного значения числа Рейнольдса в некоторых работах используется также моделирование на базе осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье – Стокса (см., например, [Parnaudeau et al., 2008]).

Обзоры экспериментальных работ, в которых исследуется обтекание цилиндра для числа Рейнольдса  $Re = 3900$ , можно найти в [Molochnikov et al., 2019; Parnaudeau et al., 2008]. В некоторых экспериментальных работах исследования проводились для решетки, состоящей из набора цилиндров [Stewart, Townsend, 1951]. При параллельном расположении цилиндров удастся воспроизвести условия в потоке, близкие к 2D-изотропной турбулентности (в направлении образующей решетки течение можно считать безградиентным).

В стандартном LES для определения подсеточных моделей применяются физические теории однородной изотропной турбулентности в рамках теории, предложенной А. Н. Колмогоровым [Pope, 2000]. Несмотря на то что условия однородной изотропной турбулентности реализуются только в специальных экспериментальных исследованиях, спектральные характеристики течения для обтекания изолированных тел (в частности, отсек цилиндрической поверхности) также принято сравнивать в литературе с законом  $-\frac{5}{3}$  А. Н. Колмогорова. Более того, по полученным результатам моделирования может производиться подстройка LES-модели.

В целом пространственно-временные энергетические характеристики турбулентного сигнала можно оценить, используя правильную ортогональную декомпозицию (POD) компонент поля скорости в некотором сечении потока [Holmes et al., 2012]. В литературе POD-анализ получил также название модального анализа. Определенное представление о частотно-временных свойствах модального анализа дает также спектральная правильная ортогональная декомпозиция (SPOD) [Sieber et al., 2016]. Геометрические картины распределения энергетических неоднородностей (рельефы) для сепарированного набора частотных характеристик сигнала (мод) дают общее представление о свойствах осредненного поля скоростей в сечении турбулентного потока.

Детальную информацию о спектральных характеристиках потока дает спектральный анализ на основе преобразования Фурье дискретизованного сигнала. Закон  $-\frac{5}{3}$  А. Н. Колмогорова относится к оценке спектральной плотности энергии. Во многих работах оценивается также спектральная плотность мощности сигнала (PSD), полученная отношением ESD во временной области к времени экспозиции. Несмотря на то что характеристики ESD и PSD имеют различную размерность, они имеют одинаковое распределение и отличаются только амплитудой осцилляций спектра.

Анализ размерности выражения для оценки пространственной спектральной плотности энергии (ESD), согласно закону  $-\frac{5}{3}$  А. Н. Колмогорова, показывает, что аналогичную размерность имеет спектральная характеристика, полученная при использовании пространственного преобразования Фурье для мгновенной энергии (квадрат мгновенной скорости). Как отмечалось выше, при дискретизации сигнала во временной области результат преобразования Фурье (по временной координате) от мгновенной энергии, определяемой второй степенью флуктуаций компонент вектора скорости потока, согласуется с точки зрения размерности с законом  $-2$ . В настоящей работе (в дополнение к оценке спектра энергии сигнала) вводится альтернативная (по отношению к PSD) спектральная оценка мощности сигнала, основанная на использовании преобразования Фурье для третьей степени сигнала (флуктуаций компонент вектора скорости). Отметим, что третью степень турбулентного сигнала предлагалось использовать Т. Карманом при решении

проблемы замыкания уравнения Кармана – Ховарта [Karman, Howarth, 1938]. Основываясь на гипотезах А. Н. Колмогорова, в настоящей работе показываем, что референтный частотный спектр третьей степени временной выборки сигнала (компонент вектора скорости) соответствует закону распределения  $-\frac{5}{2}$ .

В качестве иллюстрации приводятся оценки спектра энергии и мощности поперечной компоненты вектора скорости несжимаемого течения около поверхности отсека 3D-цилиндра для числа Рейнольдса  $Re = 3900$ . Анализ спектральных характеристик проводится для данных, полученных в результате численного моделирования в пакете ANSYS Fluent. Уравнения Навье – Стокса решались на сетке, которая обеспечивала высокое разрешение в области пограничного слоя и ближней окрестности (порядка диаметра цилиндра) следа за цилиндром. В области, где разрешение расчетной сетки недостаточно, крупные ячейки выполняют функцию пространственного осреднения. Поэтому вместо DNS в данной работе использовалось название ILES (или «прямое интегрирование» в терминологии работы [Kawamura, Kuwahara, 1984]). При проведении расчетов использовалась схема первого порядка для временной переменной и второго порядка для пространственных переменных. Спектральные характеристики течения оценивались в пакете MATLAB с использованием дискретного преобразования Фурье для выборки сигнала во временной области. Для оценки пространственно-временной структуры течения использовался POD-анализ результатов моделирования.

## 2. Спектральные характеристики сигнала

### 2.1. Преобразование Фурье первой степени сигнала

Спектральный анализ для ограниченного во времени сигнала (флуктуации компонент вектора скорости) в диапазоне  $-\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}$  осуществляется с помощью преобразования Фурье [Prandoni, Vetterli, 2008]:

$$\tilde{u}(\omega) = \int_{-T/2}^{T/2} u(t)e^{-i\omega t} dt,$$

где  $\omega = 2\pi f$ ,  $f$  — частота.

Использование теоремы Парсеваля позволяет определить спектральную плотность энергии (ESD) сигнала [Lathi, Ding, 2010]:

$$E_D(\omega) = |\tilde{u}(\omega)|^2. \quad (1)$$

В литературе используется также спектральная плотность мощности (PSD) [Lathi, Ding, 2010]:

$$P_D(\omega) = \frac{E_D(\omega)}{T}. \quad (2)$$

Сравнение выражений (1) и (2) показывает, что характеристики ESD и PSD имеют одинаковое распределение спектра и отличаются только амплитудой сигнала.

### 2.2. Преобразование Фурье первой степени сигнала

Для непрерывного во времени действительного сигнала  $u(t)$  энергия определяется выражением

$$E_\infty = \int_{-\infty}^{\infty} U(t) dt,$$

где  $U(t) = u^2(t)$ . В [Kusyumov et al., 2023] для оценки энергетических свойств сигнала использовалась функция спектра энергии сигнала (Energy of Signal Spectrum, ESS):

$$E_S(\omega) = |\tilde{U}(\omega)|, \quad (3)$$

где

$$\tilde{U}(\omega) = \int_{-T/2}^{T/2} U(t)e^{-i\omega t} dt. \quad (4)$$

Можно установить связь между функцией  $E_S(\omega)$  и энергией сигнала  $E_\infty$ . Согласно свойствам преобразования Фурье,

$$\tilde{U}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} U(t)e^{-i\omega t} dt.$$

Из (3) и (4) следует

$$E_S(0) = |\tilde{U}_\infty(0)| = |E_\infty|.$$

Отсюда ESS можно рассматривать как спектр энергии сигнала. Ширина полосы частот сигнала  $U(t)$  в два раза превышает ширину полосы сигнала  $u(t)$  [Lathi, Ding, 2010].

Отметим, что при определении пространственного спектра можно ввести преобразование Фурье для пространственного распределения сигнала  $u(x)$  (в диапазоне  $-\frac{X}{2} \leq x \leq \frac{X}{2}$ ):

$$E_S(k) = |\tilde{U}(k)|,$$

где  $k$  — волновое число. Функция  $\tilde{U}(k)$  определяется пространственным преобразованием Фурье:

$$\tilde{U}(k) = \int_{-X/2}^{X/2} U(x)e^{-2ikx} dx.$$

Здесь  $U(x) = u^2(x)$ .

Из анализа выражений для спектральных характеристик ESD, PSD, ESS следует, что все эти характеристики получаются на основе преобразований Фурье сигнала

$$\text{Sig}_m(t) = u^m(t). \quad (5)$$

По определению  $m = 1$  для ESD, PSD и  $m = 2$  для ESS.

### 2.3. Преобразование Фурье для третьей степени сигнала

Согласно статистической теории изотропной турбулентности соотношение между второй ( $B_{LL}(r, t)$ ) и третьей ( $B_{LL,L}(r, t)$ ) корреляционными функциями определяется уравнением Кармана–Ховарта [Karman, Howarth, 1938; Monin, Yaglom, 1975]. Здесь  $r$  и  $t$  — пространственная и временная координаты соответственно. Поскольку уравнение Кармана–Ховарта является незамкнутым, различными авторами предложены гипотезы, определяющие связь между функциями  $B_{LL}(r, t)$  и  $B_{LL,L}(r, t)$ . В [Karman, Howarth, 1938] предложена простейшая гипотеза автосимilarity, согласно которой

$$B_{LL}(r, t) \sim v^2(t), \quad B_{LL,L}(r, t) \sim v^3(t). \quad (6)$$

За масштаб  $v(t)$  можно принять интенсивность турбулентности [Monin, Yaglom, 1975]:

$$v(t) \sim \sqrt{B_{LL,L}(0, t)} = \sqrt{\tilde{u}^2},$$

где  $\bar{u}^2$  определяется через теоретико-вероятностное осреднение по соответствующему статистическому ансамблю. Из данного выражения следует, что вторая корреляционная функция при  $r = 0$  определяет среднюю энергию сигнала. В [Kusyumov et al., 2020] используется соотношение между корреляционными функциями более общего вида:

$$B_{LL,L}(r, t) \sim r^q B_{LL}^{3/2}(r, t), \quad (7)$$

где  $q = \text{const}$ .

Из выражений (6) и (7) следует, что третья корреляционная функция определяется третьей степенью флуктуаций компонент вектора скорости. Поэтому дополнительно к спектральным характеристикам  $\text{Sig}_1(t)$  (ESD, PSD) и  $\text{Sig}_2(t)$  (ESS) можно рассмотреть спектр  $\text{Sig}_3(t)$ . Полагая  $m = 3$  в (5), рассмотрим спектральные характеристики третьей степени сигнала [Kusyumov, Kusyumov, 2024]:

$$W(t) = u^3(t).$$

Используя преобразование Фурье, определим спектральную функцию

$$P_S(\omega) = |\tilde{W}(\omega)|,$$

где

$$\tilde{W}(\omega) = \int_{-T/2}^{T/2} W(t)e^{-i\omega t} dt.$$

В [Kusyumov, Kusyumov, 2024] предложено рассматривать функцию  $\text{Sig}_3(t) = W(t)$  как альтернативную оценку мгновенной мощности сигнала. Основанием для такой трактовки является тот факт, что одна из энергетических характеристик летательного аппарата (мощность) пропорциональна третьей степени скорости (скорости полета летательного аппарата или скорости вращения несущего винта вертолета [Johnson, 2013]). В этом смысле функция  $\tilde{W}$  может рассматриваться как спектр мощности сигнала PSS (Power Signal Spectrum).

### 3. Референтные спектральные характеристики энергии и мощности сигнала

Одно из приложений, в котором используются спектральные характеристики сигнала ESD и PSD (соответственно  $E_D(\omega)$  и  $P_D(\omega)$ ), ориентировано на анализ спектра пульсаций скорости для плохообтекаемых тел. Как правило, характеристики ESD и PSD, полученные в результате моделирования, сравниваются со спектральным распределением, определяемым законом  $-\frac{5}{3}$  А. Н. Колмогорова (закон K41, [Kolmogorov, 1991]). В недавней работе [Ma et al., 2025] подтверждено масштабирование закона K41 в пузырьковой турбулентности.

Закон K41 получен А. Н. Колмогоровым в рамках статистической теории турбулентности, и в основе его лежат две гипотезы, определяющие спектральные характеристики турбулентного течения в инерционном поддиапазоне спектра. С учетом комментариев, сделанных в [Mopin, Yaglom, 1975], гипотезы подобия А. Н. Колмогорова можно изложить в упрощенной формулировке.

*Первая гипотеза подобия.* В случае турбулентности с достаточно большим числом Рейнольдса многомерные распределения вероятностей в пространственно-временной области, в которой турбулентность локально изотропна, однозначно определяются значениями параметров: скорости диссипации энергии турбулентности  $\epsilon$  и коэффициента кинематической вязкости  $\nu$ .

*Вторая гипотеза подобия.* В энергетическом режиме соответствующих турбулентных движений доминирующим процессом будет передача энергии к движению меньших масштабов благодаря действию сил инерции без сколько-нибудь заметного перехода энергии непосредственно в теплоту. Поэтому и статистические закономерности, отвечающие этому интервалу масштабов, по-видимому, не должны зависеть от коэффициента вязкости  $\nu$ .

Исходя из этих гипотез и положений статистической теории турбулентности, А. Н. Колмогоров получил закон  $-\frac{5}{3}$  для пространственного (референтного) спектра энергии:

$$E_{ij}(k) = \alpha_{ij} \epsilon^{2/3} k^{-5/3}.$$

Для изотропных течений  $\alpha_{ij} = \alpha_i \delta_{ij}$ , где  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера,  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 \sim 0,5$  (константа А. Н. Колмогорова). Отметим, что размерность величины  $E_{ij}(k)$  совпадает с размерностью функции  $E_S(k)$ . Следовательно, пространственный спектр  $E_S(k)$ , полученный по результатам моделирования, можно сопоставлять с законом А. Н. Колмогорова  $-\frac{5}{3}$ .

В [Tennekies, Lumley, 1972] с использованием статистической теории турбулентности получено выражение для референтного спектра энергии во временной области:

$$\mathcal{E}_{ij}(\omega) = \beta_{ij} \epsilon \omega^{-2}, \quad (8)$$

где  $\beta_{ij} = \beta = \alpha^{3/2}$ . Отметим, что в [Tennekies, Lumley, 1972] принято  $\alpha = 1,5$ , откуда  $\beta \approx 1,84$ . Если принять  $\alpha = 0,5$ , то  $\beta = 0,35$ .

Аналогичное (8) выражение можно получить исходя из гипотез подобия А. Н. Колмогорова и анализа размерностей величин, определяющих временной спектр на основе преобразования Фурье квадрата скорости. Из закона  $-\frac{5}{3}$  А. Н. Колмогорова следует, что референтный пространственный спектр  $E_{ij}(k)$  энергии сигнала определяется скоростью диссипации энергии  $\epsilon$  и волновым числом  $k$ . Можно предположить, что во временной области референтный спектр энергии определяется скоростью диссипации энергии  $\epsilon$  и частотой  $\omega$ . На основе данного предположения выражение (8) было получено в [Kusyumov et al., 2023] с точностью до константы  $\beta$ .

Для получения референтной оценки спектра  $\Pi_{ij}$  мощности турбулентности сделаем предположение: гипотезы подобия А. Н. Колмогорова справедливы не только для оценки спектра энергии сигнала, но и для оценки спектра мощности сигнала, т. е.  $\Pi_{ij}$  есть функция композиции  $\epsilon$  и  $\omega$ . Тогда из анализа размерностей преобразования Фурье функции  $W_{ij}(t) = u_{ij}^3(t)$  (здесь  $u_{ij}(t)$  — флуктуации компонент вектора скорости) следует, что референтный спектр для мощности сигнала определяется выражением

$$\Pi_{ij}(\omega) = \sigma_{ij} \epsilon^{3/2} \omega^{-5/2}, \quad (9)$$

где  $\sigma_{ij} = \text{const}$ .

Референтные оценки спектра  $\mathcal{E}(\omega)$  и  $\Pi(\omega)$  использовались далее при сопоставлении со спектральными распределениями  $E_S(\omega)$  и  $P_S(\omega)$ , полученными в результате моделирования обтекания отсека кругового цилиндра (3D-постановка).

## 4. Численное моделирование

### 4.1. Расчетная сетка

В качестве объекта моделирования рассматривался отсек кругового 3D-цилиндра в потоке вязкой несжимаемой жидкости. Условия обтекания соответствовали значению числа Рейнольдса  $Re = \frac{V_\infty d}{\nu} = 3900$ , где  $V_\infty$  — скорость набегающего потока,  $d$  — диаметр цилиндра и  $\nu$  — коэффициент кинематической вязкости. Задача решалась в нестационарной постановке на основе прямого интегрирования (ILES) уравнений Навье–Стокса с применением пакета ANSYS

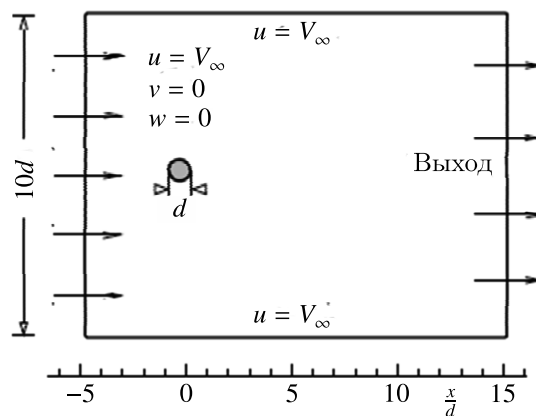


Рис. 1. Схема расчетной области

Fluent. Расчетная область (рис. 1) представляла собой прямоугольник с размерами  $20d \times 10d \times \pi d$ . Продольная и нормальная координаты обозначены как  $x$  и  $y$ ;  $z$  — поперечная координата. В работах с аналогичной постановкой задачи (для  $Re = 3900$ ) размеры расчетной области вдоль осей  $x$  и  $y$  варьируются в достаточно широких пределах: от  $20d$  вдоль оси  $x$  и от  $7d$  вдоль  $y$  (см., например, обзор в [Rajani et al., 2016]). В настоящей работе размеры продольной и нормальной осей ( $20d \times 10d$ ) аналогичны [Snyder, Degrez, 2003]. Расстояние от входной грани до оси цилиндра составляло  $5d$ . Поперечный размер  $l_z = \pi d$  был выбран в соответствии с рекомендациями работ [Kravchenko, Moin, 2000; Ma et al., 2000]. На входной границе (а также на верхней и нижней границах) задавалось однородное поле течения с вектором скорости  $(u, v, w)^T = (1, 0, 0)^T V_\infty$ . На выходной границе использовалось условие pressure – outlet (встроенное в пакет ANSYS Fluent).

В качестве граничных условий на боковых поверхностях при численном моделировании обычно используются два вида граничных условий [Jiang et al., 2017], а именно: периодические (для моделирования структур следа при числах Рейнольдса, превышающих критическое) и симметрия. На боковых сторонах расчетной области (ортогональных координате  $z$ ) в данной работе применялись граничные условия «симметрии». Сетка, построенная в коммерческом генераторе ANSYS ICEM, вблизи цилиндра имеет сгущение в радиальном направлении.

В различных исследованиях с использованием DNS-моделирования количество ячеек расчетной сетки, как правило, составляет несколько миллионов. В частности, в работе [Wissink, Rodi, 2008] моделирование проводилось для нескольких расчетных сеток с количеством ячеек от  $10 \cdot 10^6$  (Case A) до  $500 \cdot 10^6$  (Case E).

Как отмечалось во введении, количество ячеек  $N_{3/3}$ , необходимое для моделирования 3D-изотропного (по трем направлениям) турбулентного течения, пропорционально  $Re^{9/4}$ . Для рассматриваемой постановки задачи течение является безградиентным (в интегральном смысле) в направлении оси  $z$ . Поэтому характеристики течения могут обладать свойствами изотропности (в определенной части спектра) только в направлении осей  $x, y$ . Количество ячеек в данном случае можно принять пропорциональным величине  $N_{2/3} \sim n_z Re^{3/2}$ , где  $n_z$  — количество ячеек в направлении оси  $z$ . Из анализа литературы следует, что рекомендуемый размер ячеек в направлении оси  $z$  значительно превышает пристеночный размер ячеек в направлении осей  $x$  и  $y$ . В настоящей работе принято  $n_z = 40$ , что, в частности, соответствует рекомендациям [Kravchenko, Moin, 2000; Ma et al., 2000]. Отсюда потребное для моделирования количество ячеек расчетной (при  $Re = 3900$ ) сетки можно оценить величиной  $N_{2/3} \sim 40 \cdot 3900^{3/2} \approx 10^7$ . Это значение приблизительно соответствует сетке Case A из работы [Wissink, Rodi, 2008]. Количество ячеек расчетной сетки в данной работе также соответствует полученной оценке  $N_{2/3}$ .

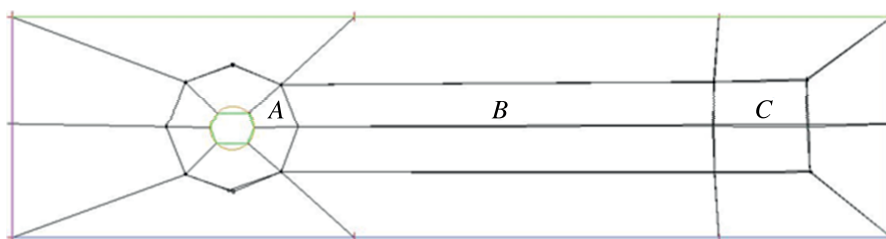


Рис. 2. Блочная структура расчетных сеток

В целях исследования сеточной независимости в настоящей работе построены две расчетные сетки с количеством элементов около  $12 \cdot 10^6$  (вариант I) и  $16 \cdot 10^6$  (вариант II). Блочная структура расчетных сеток показана на рис. 2. Для разрешения пограничного слоя расчетная сетка сгущалась около поверхности цилиндра. Размер первой ячейки по нормали к поверхности составлял около  $10^{-3}d$ .

В таблице 1 представлены параметры расчетных сеток в зонах A, B и C, прилегающих к плоскости симметрии. Показаны параметры для верхней части блочной структуры (для нижней части параметры аналогичны).

Таблица 1. Параметры расчетной сетки в направлении координатных осей полярной ( $\theta, r, z$ ) и декартовой ( $x, y, z$ ) систем координат

Вариант	$n_\theta \times n_r \times n_z / L_A$	$n_x \times n_y \times n_z / L_B$	$n_x \times n_y \times n_z / L_C$	$l_z$	Объем
I	$60 \times 150 \times 40/d$	$500 \times 60 \times 40/10d$	$100 \times 60 \times 40/2d$	$\pi d$	$12 \cdot 10^6$
II	$60 \times 150 \times 40/d$	$900 \times 60 \times 40/10d$	$100 \times 60 \times 40/2d$	$\pi d$	$16 \cdot 10^6$

В зоне A представлены расчетные параметры по азимутальной ( $\theta$ ), радиальной ( $r$ ) и поперечной координатам. В зонах B и C число узлов представлено по координатным осям  $x, y$  и  $z$ . Параметры  $L_A, L_B$  и  $L_C$  определяют размеры зон.

Изменение размера ячеек вдоль осей  $x$  и  $y$  для вариантов I, II в зонах A, B, C показано в таблице 2. Приблизительно такое значение пристеночного шага использовалось в работах [Mohammad et al., 2010; Beaudan, Moin, 1994; Jiang, Cheng, 2021]. В пристеночной области течения градиенты скорости в направлении осей  $x, y$  выше в сравнении с локальными градиентами скорости вдоль оси  $z$ .

Таблица 2. Изменение размера ячеек вдоль осей  $x$  и  $y$ 

Направление	Вариант	Зона A	Зона B	Зона C
ось $x$	I	$0,00125d \div 0,005d$	$0,005d \div 0,02d$	$0,02d \div 0,022d$
	II	$0,00125d \div 0,005d$	$0,005d \div 0,01d$	$0,01d \div 0,022d$
ось $y$	I, II	$0,002d \div 0,015d$	$0,01d \div 0,03d$	$0,014d \div 0,035d$

Размеры ячеек расчетной сетки можно оценить, сопоставив с колмогоровским масштабом длины. Прядок колмогоровского масштаба длины можно оценить, используя соотношение [Monin, Yaglom, 1975]

$$\frac{\eta}{L} = \text{Re}^{-3/4}, \quad (10)$$

где  $L$  — интегральный линейный масштаб рассматриваемого течения, соизмеримый с размером области моделирования.

Существуют различные подходы для оценки величины  $L$ . Вдоль статистически неоднородных направлений наибольшие масштабы определяются такими физическими параметрами,

как ширина канала, толщина пограничного слоя, толщина слоя смешения [Moin, Mahesh, 1998]. Например, для течений каналах (или в трубах) полагают  $L$  равным половине характерного размера системы: полуширине канала (или радиусу трубы) [Coleman, Sandberg, 2010]. Для каналов, в частности, такой подход учитывает наличие двух областей генерации возмущений, вносимых в поток, а именно двух противоположных стенок канала. При обтекании цилиндра возмущения в поток также вносятся при отрыве течения на двух противоположных полюсах поверхности цилиндра (верхней и нижней). В конце рециркуляционной зоны из сдвиговых слоев генерируются парные вихри, что в конечном итоге приводит к образованию дорожки Кармана. Принимая

$$L = \frac{d}{2}, \quad (11)$$

из (10) получим соотношение для приближенной априорной оценки колмогоровского масштаба длины при обтекании цилиндра:

$$\eta \sim \frac{d}{2} \text{Re}^{-3/4}. \quad (12)$$

Масштаб длины Колмогорова  $\eta$  обычно оценивают как наименьший масштаб, который необходимо разрешить. Следует отметить, что оценка (12) не учитывает влияния формы поверхности тела на вносимые в поток возмущения. В частности, для рассматриваемого числа Рейнольдса выражение (12) дает оценку колмогоровского масштаба  $\eta = 0,001d$ . Однако спектральный DNS демонстрирует хорошее согласие с экспериментами даже при отсутствии разрешения масштаба Колмогорова. Наименьший масштаб длины, который должен быть разрешен, обычно больше масштаба длины Колмогорова [Moser, Moin, 1984; Kim et al., 1987]. Например, в [Moser, Moin, 1984] отмечается, что большая часть диссипации в криволинейном канале происходит в масштабах, превышающих  $15\eta$ . Для задачи обтекания цилиндра, согласно оценкам работы [Jiang, Cheng, 2021] для числа Рейнольдса  $\text{Re} = 3900$ , колмогоровский масштаб длины  $\eta$  составляет около  $0,01d$ . Тем не менее выражение (12) можно использовать для приближенной оценки качества расчетной сетки и, в частности, для оценки пристеночного размера ячеек. С этой точки зрения размер пристеночных ячеек для всех рассматриваемых вариантов расчетной сетки сопоставим с оценкой (12).

В целом разрешение (в единицах масштаба Колмогорова) в области моделирования для изотропной турбулентности должно соответствовать оценке [Parnaudeau et al., 2008]

$$\Delta x = 4,5\eta, \quad \Delta y = 4,5\eta. \quad (13)$$

Из таблицы 2 следует, что вдоль продольной оси  $x$  в зоне А разрешение расчетных сеток соответствует оценке (13). Вдоль оси  $y$  разрешение расчетных сеток удовлетворяет условию (13) в окрестности поверхности цилиндра. Можно предположить, что в зоне А и частично в начале зоны В пространственное разрешение расчетных сеток приблизительно соответствует условиям, необходимым для осуществления DNS. В остальной части расчетной области моделирование осуществляется с помощью прямого интегрирования (ILES-подход). Оценка шага  $\Delta z$  вычислительной сетки может быть дана на основе работ [Roshko, 1993; Williamson, 1996] по экспериментальным результатам, полученным различными авторами. Согласно [Williamson, 1996] длина волны вихрей в сдвиговом слое определяется двумя масштабами:

а)  $\frac{\lambda_{ZSL}}{d} \sim \frac{25}{\sqrt{\text{Re}}}$  для вихрей в оторвавшемся сдвиговом слое;

б)  $\frac{\lambda_{ZK}}{d} \approx \frac{\lambda_K}{5d} \sim 1$  для вихрей в следе (где  $\lambda_K$  — длина волны вихрей Кармана).

Принимая  $\lambda_z = 5\lambda_{ZSL}$ , получим оценку минимальной длины отсека цилиндра при  $3900 \leq \text{Re} < 100\,000$ :

$$l_z = \frac{125d}{\sqrt{\text{Re}}}.$$

Для  $Re = 3900$  из данного соотношения следует

$$l_z = 2d,$$

что несколько меньше принятого поперечного размера области моделирования  $l_z = \pi d$  (таблица 1).

Согласно [Cao et al., 2020] размер ячеек в направлении оси  $z$  в сдвиговом слое определяется соотношением  $\Delta z \sim \frac{\lambda_{zSL}}{6}$ . Отсюда следует, что количество узлов расчетной сетки определяется соотношением

$$n_z \sim \frac{l_z}{\Delta z} = 30.$$

Полученное значение меньше шага расчетных сеток  $n_z = 40$ , применяемого в данной работе.

#### 4.2. Результаты численного моделирования

Уравнения Навье–Стокса решались с помощью пакета ANSYS Fluent с использованием алгоритма SIMPLE при дискретизации второго порядка по пространству и первого порядка по времени. Временной шаг, используемый при моделировании, составлял  $\Delta t = \frac{0,0565d}{V_\infty}$ . Длительность временной выборки  $T$  должна быть достаточной для обеспечения статистически устойчивого состояния. Как правило, величина  $T$  определяется пропорционально периоду цикла образования вихрей:  $T = N_S T_K$ , где  $T_K$  — период схода вихрей дорожки Кармана. Коэффициент пропорциональности варьируется в литературе, например, от  $N_S = 17$  [Jacob et al., 2018] до  $N_S = 131$  [Ma et al., 2000]. В настоящей работе  $N_S = 100$  ( $T \approx \frac{500d}{V_\infty}$ ).

Частота выборки, соответствующая временному шагу, составляет около  $10^4$  Гц. Из анализа данных экспериментального и численного моделирования, представленных в литературе, следует, что величина временного шага является достаточной для воспроизведения спектра турбулентных пульсаций инерционного поддиапазона для  $Re = 3900$ . Уменьшение временного шага приводит к повышению требований к вычислительным ресурсам и не дает значительного повышения точности моделирования в инерционном поддиапазоне. Тоже можно сказать и относительно использования разностной схемы с дискретизацией второго порядка по времени. Численный эксперимент с использованием разностной схемы второго порядка по времени не привел к значительным изменениям спектральных характеристик пульсаций. Погрешность численного интегрирования в этом случае пропорциональна  $(\Delta t)^2$ , и верхний предел частоты воспроизводимого спектра при численном моделировании значительно превышает спектр частот инерционного поддиапазона. Расчет проводился на сервере 2x Intel Xeon Gold 6130 с использованием 28 ядер при оперативной памяти 64 Гб. На каждом шаге итерации по времени делалось 20 подитераций. Расчетное время одной выборки (около 10 000 шагов) при выбранных параметрах моделирования составляло несколько недель.

Для проверки обоснованности выбора пристеночного шага  $\Delta r$  по нормали к поверхности были определены максимальное ( $c_{f \max} = 0,092$ ) и среднее ( $c_{f \text{av}} = 0,0256$ ) значения коэффициента трения на поверхности цилиндра. По значению  $c_f$  можно определить параметр  $r^+$  [Coleman, Sandberg, 2010]:

$$r^+ = \frac{u_\tau \Delta r}{\nu},$$

где

$$u_\tau = \left( \frac{\tau_w}{\rho} \right)^{1/2}, \quad \tau_w = c_f \frac{\rho V_\infty^2}{2}.$$

Выражение для  $r^+$  можно переписать в ином виде:

$$r^+ = \frac{Re}{N} \sqrt{\frac{c_f}{2}}, \quad (14)$$

где  $N = \frac{d}{\Delta r}$ . Подстановка  $c_{f \max} = 0,092$  в (14) при выбранных условиях и параметрах расчетной сетки дает  $r_{\max}^+ = 1,04$ , что обеспечивает  $r^+ \leq 1$  практически на всей поверхности цилиндра. Для среднего по поверхности значения  $c_{f \text{av}} = 0,0256$  подстановка в (14) дает  $r_{\text{av}}^+ = 0,55$ . Используя соотношение (12), можно приближенно оценить значение колмогоровского масштаба длины  $\eta$  по результатам численного моделирования. Согласно [Pore, 2000] величина  $\eta$  определяется выражением

$$\eta = \left( \frac{\nu^3}{\epsilon} \right)^{1/4},$$

где  $\epsilon$  — скорость диссипации энергии турбулентности. Если выразить  $\epsilon$  через интегральный масштаб [Moin, Yaglom, 1975], то  $\epsilon \sim \frac{u_\tau^3}{\kappa L}$ . Отсюда, учитывая выражение для  $u_\tau$ , следует

$$\eta \sim L \frac{(2^3 \kappa^2)^{1/8}}{c_f^{3/8} \text{Re}^{3/4}}. \quad (15)$$

В (15) входит постоянная Кармана  $\kappa = 0,41$ . Полагая, как и ранее, что интегральный масштаб определяется выражением (11), из (15) получим

$$\eta \sim d \frac{(2^3 \kappa^2)^{1/8}}{2c_f^{3/8} \text{Re}^{3/4}}.$$

Подстановка в это выражение  $c_{f \text{av}}$  дает оценку колмогоровского масштаба длины  $\eta \approx 0,004d$ . Сопоставляя данную величину с размерами ячеек расчетных сеток в зонах А, В и С, можно предположить, что расчетная сетка для варианта II позволяет воспроизводить спектр инерциального поддиапазона в зоне А и в значительной части зоны В. Для сетки I инерциальный поддиапазон спектра может быть воспроизведен в зоне А.

На рис. 3 показано распределение магнитуды вектора скорости потока в плоскости симметрии для вариантов I, II.

Для обоих вариантов на рис. 3 можно выделить сдвиговые слои, сходящие с верхней и нижней частей поверхности цилиндра. В конце зоны рециркуляции сдвиговые слои становятся неустойчивыми и образуют первичные вихри. В сечении сдвиговые слои образуют почти прямые линии вплоть до расстояния  $L_s = 2d$ , аналогично визуализации течения, представленной в [Parnaudeau et al., 2008]. На расстоянии  $x = L_s$  вниз по потоку можно наблюдать сворачивание сдвиговых слоев. В конечном итоге оба сдвиговых слоя образуют вихревую дорожку Кармана, которая начинается ниже по потоку двумя циклическими вихреобразованиями.

Из рис. 3 видно, что в непосредственной близости к поверхности цилиндра (зона А и начало зоны В) распределение скорости в следе за цилиндром имеет практически сходную вихревую структуру течения вследствие близости параметров расчетных сеток. Крупные вихревые структуры для всех вариантов расчета соответствуют дорожке Кармана. В удаленной области (дальняя часть зоны В и зона С) вариант II дает более детальную структуру неоднородностей поля скорости.

На рис. 4 показано распределение продольной ( $u - V_\infty$ ) и поперечных ( $v, w$ ) компонент вектора скорости в плоскости симметрии расчетной области для варианта I.

Из рис. 4 следует, что как внутри, так и вне зоны рециркуляции (приблизительно соответствующей объему  $L_s \times d \times l_z$ ) отмечается наличие неоднородностей для всех компонент вектора скорости.

Интегральные характеристики, соответствующие сеткам I и II, рассматривались ранее в [Kusyumov et al., 2023] в сравнении с экспериментальными данными из [Kravchenko, Moin,

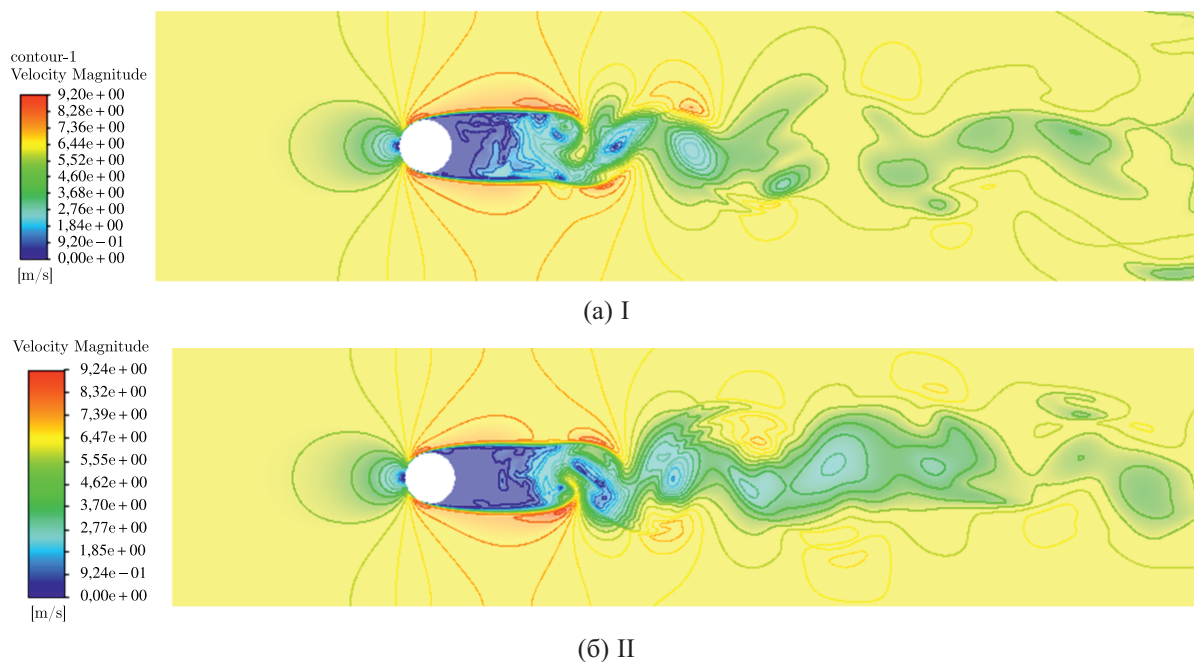


Рис. 3. Мгновенное поле магнитуды скорости в плоскости симметрии для сеток I, II

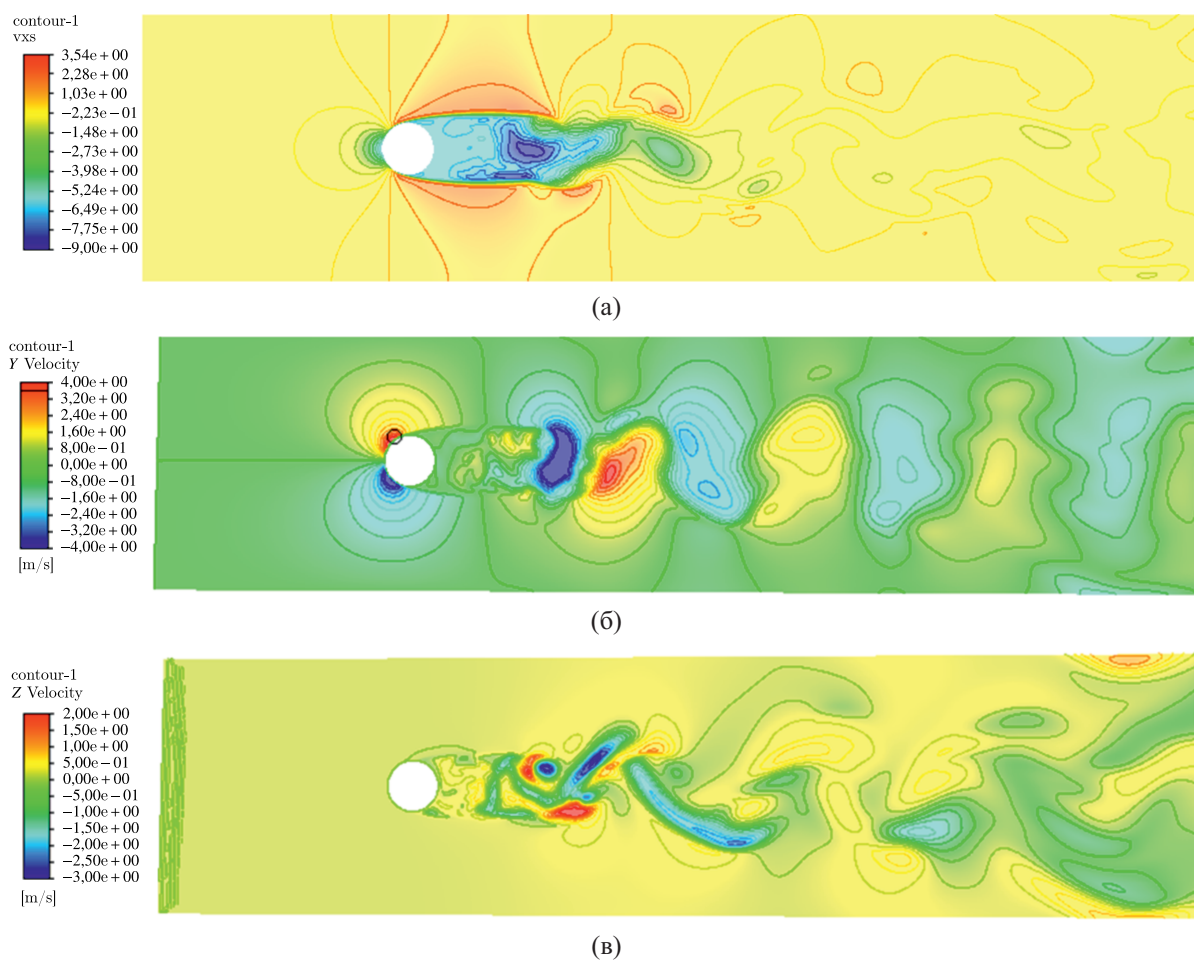


Рис. 4. Распределение компонент вектора скорости течения в плоскости симметрии: а)  $u - V_\infty$ ; б)  $v$ ; в)  $w$

Таблица 3. Результаты моделирования в сопоставлении с экспериментальными данными

Вариант	$\bar{c}_{xa}$	$-c_{pb}$	St	$\theta_{sep}$
I	$0,95 \pm 0,03$	0,92	0,226	$84,3^\circ$
II	$0,96 \pm 0,03$	0,88	0,224	$84,8^\circ$
Эксперимент	$0,99 \pm 0,05$	$0,88 \pm 0,05$	$0,215 \pm 0,05$	$86 \pm 2^\circ$

2000; Ong, Wallace, 1996]. Некоторые результаты моделирования обтекания изолированного цилиндра для сеток I, II представлены в таблице 3.

Средний коэффициент сопротивления  $\bar{c}_{xa}$  для изолированного цилиндра, минимальное значение коэффициента давления  $-c_{pb}$ , угол отрыва  $\theta_{sep}$  и число Струхала St (по частоте дорожки Кармана) для поперечной компоненты  $v$  находятся в удовлетворительном согласии с экспериментальными данными [Kravchenko, Moin, 2000; Ong, Wallace, 1996]. Значения  $-c_{pb}$  и  $\theta_{sep}$  приведены для некоторого момента времени (без осреднения). Число Струхала в таблице 3 определялось в точке  $(3d, 0, \frac{\pi d}{2})$  для поперечной компоненты  $v$ . По данным измерений работы [Kravchenko, Moin, 2000], амплитуда осцилляций компоненты  $v$  в аналогичной точке превышает амплитуду осцилляций продольной компоненты  $u$ . Поэтому далее спектральный анализ временного сигнала в фиксированной точке проводился для компоненты  $v$ . Тем не менее временные спектральные характеристики компоненты  $u$  также анализировались ниже при проведении POD-анализа.

## 5. POD-анализ векторного поля

В турбулентных потоках динамические структуры могут взаимодействовать друг с другом и исчезать. Для выделения динамических структур используются модальные разложения. Алгоритм правильной ортогональной декомпозиции (POD) [Holmes et al., 2012] определяет базис пространственных мод, который является оптимальным с точки зрения анализа энергетических свойств течения. Метод POD ориентирован на детализацию представления энергии пространственного распределения мод. Для каждой моды производится также оценка спектральных характеристик нестационарных коэффициентов мод. В данной работе POD применяется для анализа продольной ( $u$ ) и поперечной ( $w$ ) компонент вектора скорости ( $u, v, w$ ), полученного в следе цилиндра в плоскости  $y = 0$ . Выбор вектора ( $u, w$ ) для POD-анализа определяется особенностями спектральных характеристик. Направление компоненты  $w$  совпадает с осью цилиндра  $z$ , течение вдоль которой является безградиентным. Количество ячеек  $k$  по направлению оси  $z$  было определено (см. § 3) на основе экспериментальных данных, представленных в [Williamson, 1996]. Ниже рассматривается влияние количества ячеек вдоль оси цилиндра  $z$  на спектральные характеристики энергии мод вектора ( $u, w$ ) по результатам POD-анализа. Анализ мод был выполнен с использованием программы, написанной для пакета MATLAB, на основе алгоритма, представленного в [Sieber et al., 2016].

Внутреннее произведение для двух произвольных квадратично интегрируемых функций  $u(\mathbf{x})$  и  $v(\mathbf{x})$  определяется интегралом

$$\langle u(\mathbf{x}), v(\mathbf{x}) \rangle = \int_V u(\mathbf{x})v(\mathbf{x}) dV,$$

где  $V$  определяет пространственный регион или объем. Нестационарный POD-анализ проводится при наличии  $N$  пространственных полей (снимков) компонент вектора скорости, полученных в результате эксперимента (PIV-данные) или численного (CFD) моделирования. Декомпозиция вектора скорости  $\mathbf{u}$  при проведении POD-анализа определяется разложением на осредненную ( $\bar{\mathbf{u}}$ )

и флуктуационную ( $\mathbf{u}'$ ) составляющие:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) + \mathbf{u}'(\mathbf{x}, t) = \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^N a_i \Phi_i(\mathbf{x}),$$

где  $\mathbf{x}$  — вектор координат,  $t$  — время. Здесь  $\Phi_i(\mathbf{x})$  — безразмерная нормализованная базисная функция (мода), а нестационарные коэффициенты  $a_i(t)$  (случайные функции) определяют энергетические свойства моды. Для  $N$  пространственных снимков можно определить корреляционную матрицу  $\mathbf{R}$ :

$$R_{ij} = \frac{1}{N} \langle \mathbf{u}'(\mathbf{x}, t_i), \mathbf{u}'(\mathbf{x}, t_j) \rangle.$$

Нестационарные коэффициенты  $\mathbf{a}_i = [a_i(t_1), \dots, a_i(t_N)]^T$  и энергии мод  $\lambda_i$  определяются как собственные векторы и собственные значения корреляционной матрицы:

$$\mathbf{R}\mathbf{a}_i = \lambda_i \mathbf{a}_i.$$

Относительный энергетический вклад мод выражается безразмерными коэффициентами

$$\tilde{\lambda}_i = \frac{\lambda_i}{\sum_{i=1}^N \lambda_i}.$$

Пространственные моды определяются проекцией снимков на временные коэффициенты:

$$\Phi_i(\mathbf{x}) = \frac{1}{N\lambda_i} \sum_{j=1}^N a_j(t_j) \mathbf{u}'(\mathbf{x}, t_j).$$

Используя преобразование Фурье, можно перейти к частотной форме записи флуктуационной составляющей  $\mathbf{u}'(\mathbf{x}, t)$ :

$$\mathbf{u}'(\mathbf{x}, f) = \sum_{i=1}^N A_i(f) \Phi_i(\mathbf{x}),$$

где

$$A_i(f) = \int_{-T/2}^{T/2} a_i(t) e^{-i\omega t} dt.$$

В данной работе POD применяется к данным моделирования, полученным в следе цилиндра при количестве моментальных снимков  $N = 101$ . На рис. 5 представлены мгновенные распределения компонент  $u$  и  $w$  в плоскости  $y = 0$  для сетки П. Область сканирования для POD-анализа выделена черной рамкой справа от цилиндра.

Массив данных  $300 \times 100$  элементов компонент  $u$  и  $w$  для каждого шага по времени формировался с помощью интерполяции в пакете Tecplot. Увеличение количества точек интерполяции по оси  $z$  в данном случае не приводит к увеличению разрешения пространственной структуры моды, поскольку количество точек по оси  $z$  ограничено и равно 40 (промежуточные точки получены интерполяцией). Таким образом, общий массив данных для пространственно-временного анализа имеет размер  $300 \times 100 \times 101$ .

В отличие от изображений, представленных на рис. 3 и 4, следует отметить отсутствие регулярных структур на снимках (рис. 5), характерных для формирования дорожки Кармана. Одной из задач POD-анализа в данной работе являлся анализ частотных характеристик мод  $A_i(f)$  вектора  $(u, w)$  для выявления областей спектра, соответствующих частоте дорожки Кармана.

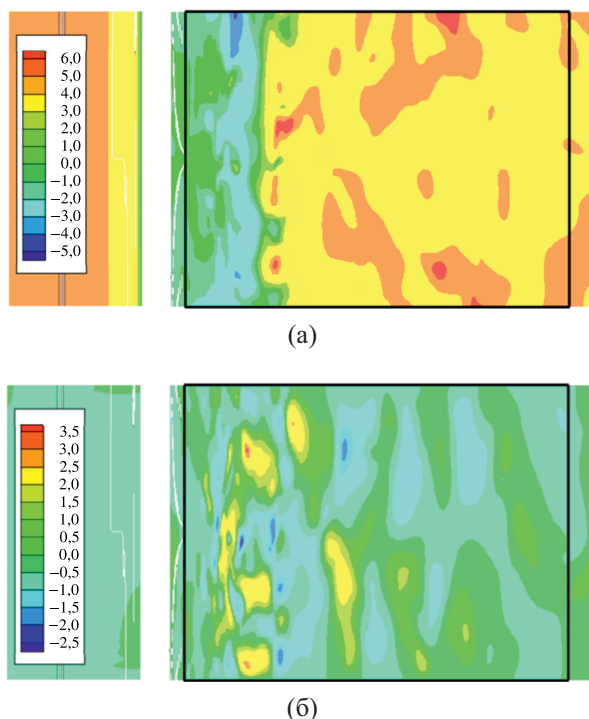


Рис. 5. Мгновенное распределение компонент вектора скорости течения в плоскости  $y = 0$  (сетка П): а) компонента  $u$ ; б) компонента  $w$

Согласно [Sieber et al., 2016] пространственная и временная (частотная) характеристики мод определяются параметром фильтрации  $N_f$  SPOD-анализа. В настоящей работе приводятся характеристики мод для значения  $N_f = 0$ , что соответствует POD-анализу. POD-анализ проводился как для вектора  $(u, w)$  в целом, так и для каждой компоненты  $u$  и  $w$  в отдельности. В первом случае производилась оценка вектора пространственных мод  $\Phi_i = (\Phi_{ui}, \Phi_{wi})$ , и нестационарные коэффициенты  $a_i(t)$  определяют энергии мод  $\lambda_i$  для вектора скорости  $(u, w)$ . Во втором случае оценивались  $\Phi_{ui}$ ,  $\lambda_{ui}$  и  $\Phi_{wi}$ ,  $\lambda_{wi}$  для сепарированных векторов  $(u, 0)$  и  $(0, w)$  соответственно.

На рис. 6 показаны пространственные рельефы первых четырех наиболее энергоемких мод для компонент  $(u, w)$  и частотные характеристики коэффициентов  $A_i$  (в зависимости от числа Струхала  $St$ ). Для каждой из представленных мод можно определить дискретный набор чисел Струхала  $St_i$  из условия  $A_i(St_i) = \max(A_i)$ .

Анализ пространственного рельефа мод позволяет выделить области неоднородностей: энергетического всплеска (желтые пятна) и энергетических провалов (темно-синие пятна). Наибольшая концентрация неоднородностей рельефа для всех мод наблюдается при  $\frac{x}{d} > 2$  (на расстоянии более  $3d$  от центра цилиндра). На расстоянии, превышающем  $6d$ , происходит сглаживание рельефа, что связано с диссипацией турбулентной энергии. Наиболее мелкие (размером около  $0,1d$ ) неоднородности рельефа отмечаются для третьей и четвертой мод. При этом в изображениях рельефа мод отсутствуют регулярные структуры, как и на изображениях мгновенных полей скоростей на рис. 5.

На рис. 7 представлены дискретные частотно энергетические характеристики мод  $\tilde{\lambda}_i(St_i)$ . Из рис. 7 следует, что наиболее энергоемкой является первая мода, несмотря на более высокую амплитуду второй моды:  $A_2(St_2) > A_1(St_1)$ . При этом диапазон спектра первой моды значительно превышает спектральный диапазон второй моды, что в конечном итоге обеспечивает более весомый энергетический вклад первой моды.

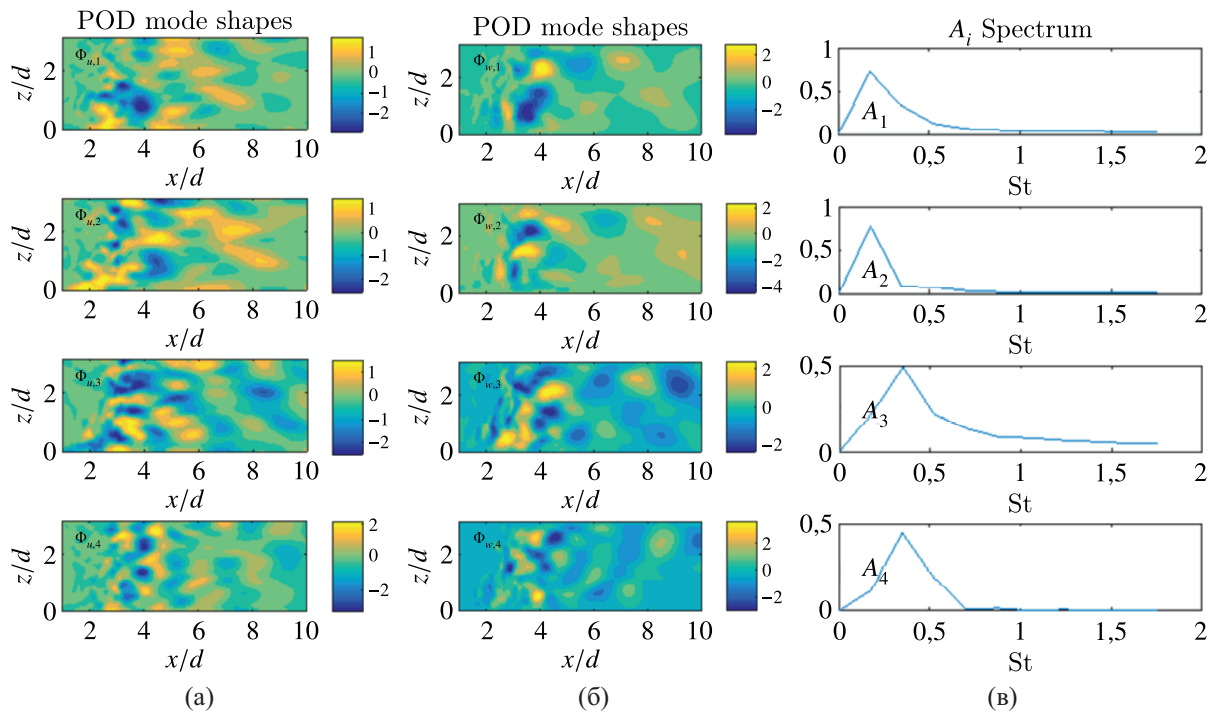


Рис. 6. Пространственный рельеф компонент  $u$  (а),  $w$  (б) вектора скорости и спектральные характеристики (в) коэффициентов первых четырех мод для сетки II

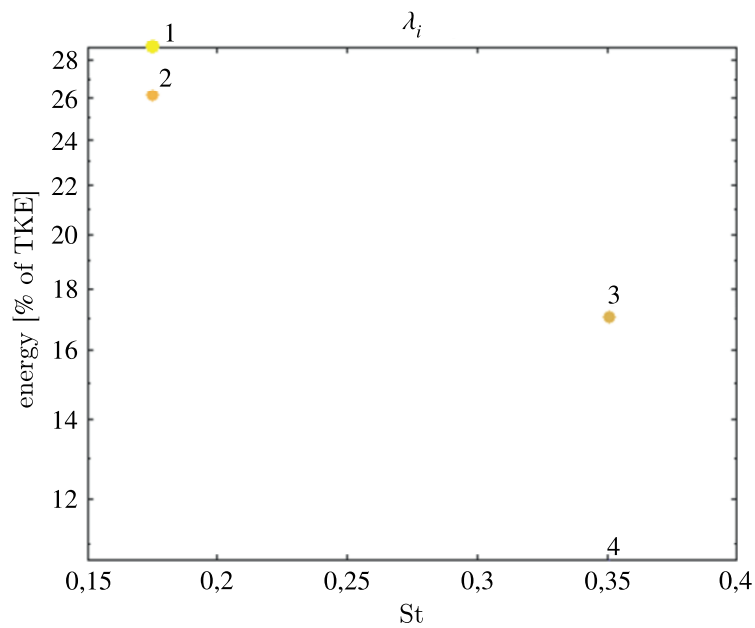


Рис. 7. Дискретные частотно-энергетические характеристики четырех наиболее энергоемких мод POD-анализа для сетки II

Анализ спектра коэффициентов мод на рис. 6, в показывает, что наибольшей амплитудой обладают первая и вторая моды, которые имеют близкие частотные характеристики. Частоты (числа Струхалия) максимальных значений амплитуды обеих мод близки к частоте дорожки Кармана. Таким образом, несмотря на отсутствие регулярных структур на изображениях мод, частотные характеристики мод наследуют область спектра, соответствующую частоте дорожки Кармана.

## 6. Спектральные характеристики течения

На рис. 8–10 показаны спектральные характеристики поперечной скорости  $v$  на осевой линии в точке  $(3d, 0, \frac{\pi d}{2})$ , полученные для сетки  $16 \cdot 10^6$  в результате преобразования Фурье временной выборки сигнала. На рис. 8 представлена традиционная (общепринятая) нормированная оценка распределения спектральной плотности мощности  $P_D(f)$  в логарифмическом масштабе.

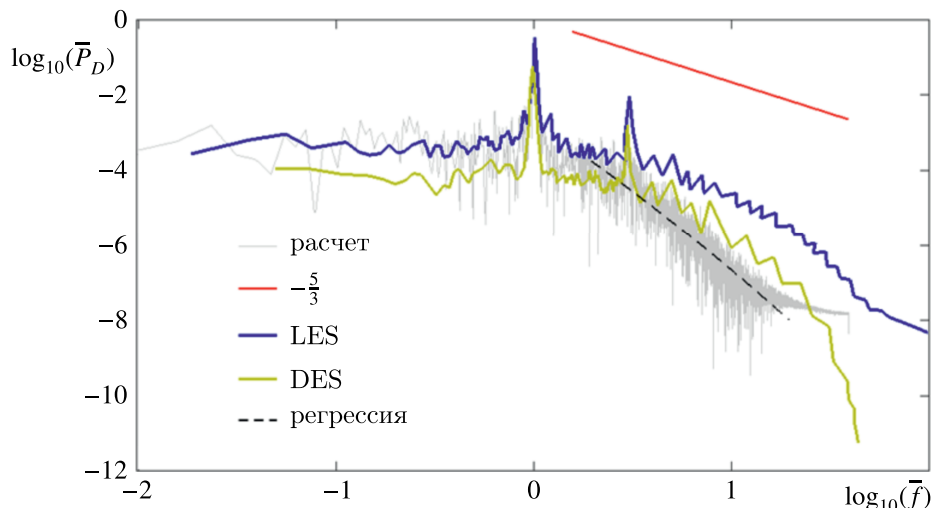


Рис. 8. Распределение  $\bar{P}_D(\bar{f})$  для поперечной скорости  $v$  в точке  $(3d, 0, \frac{\pi d}{2})$

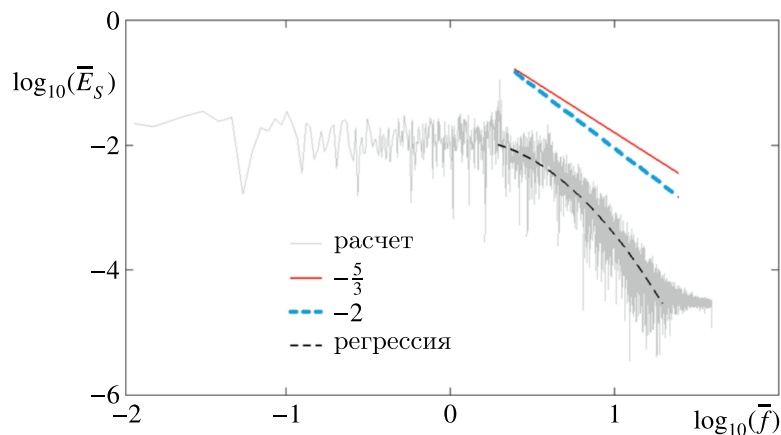


Рис. 9. Распределение  $\bar{E}_S(\bar{f})$  для поперечной скорости  $v$  в точке  $(3d, 0, \frac{\pi d}{2})$

Нормированная PSD-функция определяется как

$$\bar{P}_D(\bar{f}) = \frac{P_D(\bar{f})}{V_\infty^2 T}.$$

Здесь  $\bar{f} = \frac{f}{f_K}$  — частота колебаний, нормированная на частоту  $f_K$  дорожки Кармана.

Результаты численного моделирования сравниваются с данными [Jiang, Cheng, 2021; D'Alessandro et al., 2016] для  $Re = 3900$  и законом Колмогорова  $-\frac{5}{3}$ . Отметим, что на рис. 8 показаны распределения, характеризующие приблизительный диапазон изменения спектра  $\bar{P}_D(\bar{f})$ ,

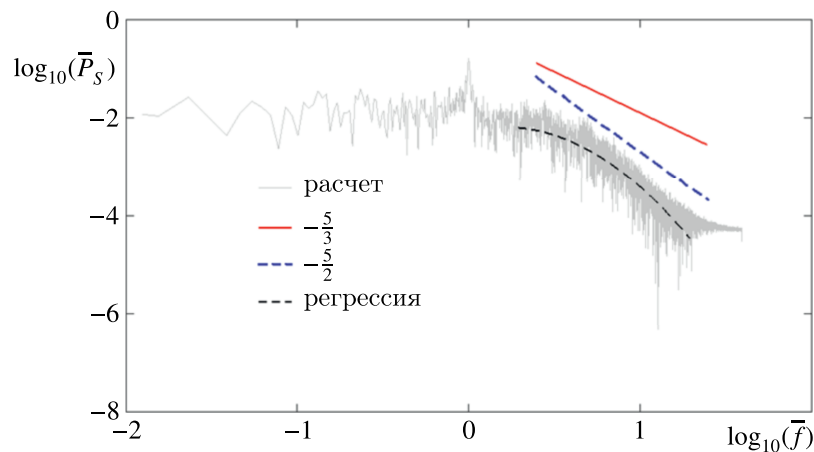


Рис. 10. Распределение  $\bar{P}_S(\bar{f})$  для поперечной скорости  $v$  в точке  $(3d, 0, \frac{\pi d}{2})$

по данным работ [Jiang, Cheng, 2021; D'Alessandro et al., 2016], с использованием вихререшающих моделей LES и DES соответственно. Расчетные сетки в обоих случаях содержали около  $5 \cdot 10^6$  элементов. Результаты численного моделирования данной работы получены в сходственной точке за поверхностью цилиндра.

Спектральное распределение, представленное на рис. 8–10, включает области энергетического и инерционного поддиапазонов. Сплошная осциллирующая линия (серого цвета) отображает полный спектр, полученный в результате фурье-преобразования временной выборки сигнала. Штриховая линия (полином второй степени) получена с использованием регрессионного анализа в Microsoft Excel в области, включающей часть энергетического (низкие частоты / крупные вихревые структуры) и инерционного поддиапазонов.

Результаты моделирования в энергетическом поддиапазоне (область низких частот) хорошо согласуются с данными [Jiang, Cheng, 2021] на основе использования LES-модели. В частности, в энергетическом поддиапазоне выделяются пиковые значения амплитуды сигнала на частоте дорожки Кармана ( $\bar{f} = 1$ ) и для второй гармоники ( $\bar{f} = 3$ ), что традиционно отмечается в литературе. В инерционном поддиапазоне наклон распределения  $\bar{P}_D(\bar{f})$ , полученного в данной работе, согласуется с результатами работы [D'Alessandro et al., 2016], полученными с использованием DES-модели.

Рисунки 9, 10 представляют альтернативные оценки спектрального распределения энергии (ESS) и мощности (PSS), предложенные в данной работе. Нормированная функция  $\bar{E}_S(\bar{f})$  для оценки спектра энергии, показанная на рис. 9, определяется выражением

$$\bar{E}_S(\bar{f}) = \frac{E_S(\bar{f})}{V_\infty^2 T}.$$

Результаты численного моделирования зависимости энергетического спектра для поперечной скорости ( $i = j = 2$ ) сравниваются на рис. 9 с законом Колмогорова  $-\frac{5}{3}$  и с распределением для  $\mathcal{E}_{22}(\omega)$ . Из представленных данных следует, что данные CFD-моделирования распределения  $\bar{E}_S(\bar{f})$  лучше согласуются с распределением  $\mathcal{E}_{22}(\omega)$  по сравнению с законом  $-\frac{5}{3}$ .

На рис. 10 представлено распределение нормированной функции  $\bar{P}_S(\bar{f})$  (мощности сигнала) в сопоставлении с законом  $-\frac{5}{3}$  А. Н. Колмогорова и зависимостью, определяемой выражением (9). Нормированная функция  $\bar{P}_S(\bar{f})$  определяется выражением

$$\bar{P}_S(\bar{f}) = \frac{P_S(\bar{f})}{V_\infty^3 T}.$$

Из рис. 10 следует, что на кривой  $\overline{P}_S(\overline{f})$  можно выделить пиковое значение, соответствующее частоте дорожки Кармана. В инерциальном поддиапазоне имеются области, где наклон кривой  $\overline{P}_S(\overline{f})$  соответствует как закону  $-\frac{5}{3}$ , так и закону  $-\frac{5}{2}$ . При этом в целом градиент регрессии кривой  $\overline{P}_S(\overline{f})$  в инерциальном поддиапазоне частот лучше согласуется с законом  $-\frac{5}{2}$  в сравнении с законом  $-\frac{5}{3}$ .

## 7. Заключение

Рассматривается оценка спектра энергии и мощности сигнала, представленного поперечной или продольной компонентами вектора скорости турбулентного потока. Помимо спектральной плотности мощности, в традиционной формулировке оцениваются энергетические характеристики в альтернативной формулировке: спектр мгновенной энергии сигнала, определяемый квадратом временной выборки скорости, и спектр мощности, определяемый кубом временной выборки. На основе анализа размерностей преобразования Фурье с учетом гипотез Колмогорова для однородной изотропной турбулентности показано, что референтные спектральные оценки мгновенной энергии и мощности сигнала (в альтернативной формулировке) определяются законами  $-2$  и  $-\frac{5}{2}$  соответственно.

В качестве приложения рассматривается ILES-моделирование трехмерного обтекания отсека кругового цилиндра при  $Re = 3900$  на основе нестационарных уравнений Навье–Стокса в несжимаемой постановке. Область моделирования в направлении продольной ( $x$ ) и поперечной ( $y$ ) осей содержит несколько подобластей с различным размером ячеек расчетной сетки. В направлении образующей оси  $z$  размер ячеек имеет постоянное значение. Приводятся оценки разрешения расчетной сетки в направлениях осей  $x$ ,  $y$ ,  $z$  в сопоставлении с литературными данными. Показано, что в непосредственной близости от задней (по потоку) поверхности цилиндра размер ячеек расчетной сетки соответствует требованиям, необходимым для проведения прямого численного моделирования (DNS). Для оценки пространственно-временных спектральных характеристик течения проводится анализ полей скоростей с использованием правильной ортогональной декомпозиции (POD). Показано, что, несмотря на отсутствие регулярных структур на мгновенной картине векторных полей в плоскости ( $x$ ,  $z$ ) и в изображениях мод, частотные характеристики мод содержат области спектра, соответствующие частоте дорожки Кармана.

При анализе спектральных характеристик течения основное внимание уделено спектру поперечной скорости потока в ближнем следе за цилиндром. Установлено, что полученные численные результаты для традиционной (общепринятой) формулировки спектральной плотности мощности в целом согласуются с данными моделирования, представленными в литературе на основе применения вихреразрешающих DES- и LES-моделей.

Полученный по результатам моделирования спектр мгновенной энергии сигнала сопоставлялся с законом  $-\frac{5}{3}$  А. Н. Колмогорова и законом  $-2$ . Распределение спектра мощности (в альтернативной формулировке) сопоставлялся также с законом  $-\frac{5}{2}$ .

## Список литературы (References)

- Гарбарук А. В., Стрелец М. Х., Шур М. Л. Моделирование турбулентности в расчетах сложных течений: учебное пособие. — СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2012. — 88 с.
- Garbaruk A. V., Strelets M. Kh., Shur M. L. Modelirovanie turbulentsnosti v raschetah sloznych techenii: uchebnoe posobie [Turbulence modeling in complex flow calculations: a teaching guide]. — Saint Petersburg: Politechn. un-t, 2012. — 88 p.
- Adams N. A., Hickel S. Implicit large-eddy simulation: theory and application // Advances in turbulence XII / B. Eckhardt (eds.). — Springer Proceedings in Physics. — Vol. 132. — Berlin, Heidelberg: Springer, 2009. — P. 743–750.

- Beaudan P., Moin P.* Numerical experiments on the flow past a circular cylinder at a subcritical Reynolds number. — Technical report TF-62. — Thermosciences Division, Department of Mechanical Engineering, Stanford University, 1994.
- Boris J., Grinstein F.F., Oran E., Kolbe R.* New insights into large eddy simulation // *Fluid Dyn.* — 1992. — Vol. 10, No. 4–6. — P. 199–228.
- Cao J., Tamura T., Kawai H.* Spanwise resolution requirements for the simulation of high-Reynolds-number flows past a square cylinder // *Computers & Fluids.* — 2020. — Vol. 196. — 104320.
- Cheng Z.-P., Qiu S.-Y., Xiang Y., Liu H.* Quantitative features of wingtip vortex wandering based on the linear stability analysis // *AIAA Journal.* — 2019. — Vol. 57, No. 7. — P. 2694–2708.
- Coleman G.N., Sandberg R.D.* A primer on direct numerical simulation of turbulence — methods, procedures and guidelines. — Technical Report AFM-09/01a. — School of Engineering Sciences, University of Southampton, 2010.
- D'Alessandro V., Montelpare S., Ricci R.* Detached-eddy simulations of the flow over a cylinder at  $Re = 3900$  using OpenFOAM // *Computers & Fluids.* — 2016. — Vol. 136. — P. 152–169.
- Deardorff J.W.* A numerical study of three-dimensional turbulent channel flow at large Reynolds numbers // *J. Fluid Mech.* — 1970. — Vol. 41, No. 2. — P. 453–480.
- Dou H.-S.* Origin of turbulence. Energy gradient theory. — Springer Nature Singapore Private Ltd, 2022. — 489 p.
- Holmes H., Lumley J.L., Berkooz G., Rowley C.W.* Turbulence, coherent structures, dynamical systems and symmetry. — 2nd ed. — Cambridge, England, U.K.: Cambridge University Press, 2012. — 386 p.
- Jacob J., Malaspinas M., Sagaut P.* A new hybrid recursive regularised Bhatnagar–Gross–Krook collision model for Lattice Boltzmann method-based large eddy simulation // *Journal of Turbulence.* — 2018. — Vol. 19, No. 11–12. — P. 1051–1076.
- Jiang H., Cheng L.* Large-eddy simulation of flow past a circular cylinder for Reynolds numbers 400 to 3900 // *Physics of Fluids.* — 2021. — Vol. 33. — P. 034119.
- Jiang H., Cheng L., An H.* On numerical aspects of simulating flow past a circular cylinder // *International Journal for Numerical Methods in Fluids.* — 2017. — Vol. 85. — P. 113–132.
- Johnson W.* Rotorcraft aeromechanics. — Cambridge University Press, 2013. — 927 p.
- Karman Th., Howarth L.* On the statistical theory of isotropic turbulence // *Proceedings of the Royal Society London, Series A.* — 1938. — Vol. 164, No. 917. — P. 192–215.
- Kawamura T., Kuwahara K.* Computation of high Reynolds number flow around a circular cylinder with surface roughness // *AIAA pap.* 84-0340. — 1984.
- Kim J., Moin P., Moser R.* Turbulence statistics in fully developed channel flow at low Reynolds number // *Journal of Fluid Mechanics.* — 1987. — Vol. 177. — P. 133–166.
- Kolmogorov A.N.* A refinement of previous hypotheses concerning the local structure of turbulence in a viscous incompressible fluid at high Reynolds number // *J. Fluid. Mech.* — 1962. — Vol. 13. — P. 82–85.
- Kolmogorov A.N.* The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds numbers // *Proceedings: Mathematical and Physical Sciences.* — 1991. — Vol. 434 (1890). — P. 9–13.
- Kraichnan R.H.* On Kolmogorov's inertial-range theories // *Journal of Fluid Mechanics.* — 1974. — Vol. 62, No. 2. — P. 305–330.
- Kravchenko A.G., Moin P.* Numerical studies of flow over a circular cylinder at  $Re_D = 3900$  // *Physics of Fluids.* — 2000. — Vol. 12, No. 2. — P. 403–417.
- Kusyumov A.N., Kusyumov S.A.* About the analysis of turbulent signal pulsations // *LXXVII Herzen readings. International Conference Proceedings. RGPU n.a. A.I. Herzen, Saint Petersburg.* — 2024. — P. 310–314.

- Kusyumov S. A., Kusyumov A. N., Romanova E. V.* Spectral characteristics of three-dimensional flow around a circular cylinder // *Russian Aeronautics*. — 2023. — Vol. 66, No. 2. — P. 276–282.
- Kusyumov A. N., Mikhailov S. A., Kusyumov S. A., Romanova E. V.* Isotropic turbulence correlation functions modelling on the basis of Karman–Howarth equation // *Journal of Physics: Conference Series*. — 2020. — Vol. 1675. — 012010.
- Laney C. B.* Computational gasdynamics. — Cambridge University Press, 1998. — 632 p.
- Lathi B. P., Ding Z.* Modern digital and analog communication systems. — 4th edn. — New York: Oxford university press, 2010. — 912 p.
- Lesieur M. P., Metais O.* New trends in large-eddy simulations of turbulence // *Annual Review of Fluid Mechanics*. — 1996. — Vol. 28. — P. 45–82.
- Long R. R.* Do tidal-channel turbulence measurements support  $k^{(-5/3)}$ ? // *Environmental Fluid Mechanics*. — 2003. — Vol. 3, No. 2. — P. 109–127.
- Ma T., Tan S., Ni R., Hessenkemper H., Bragg A. D.* Kolmogorov scaling in bubble-induced turbulence // *Physical Review Letters*. — 2025. — Vol. 134. — 244001. — P. 1–6.
- Ma X., Karamonos G. S., Karniadakis G. E.* Dynamics and low-dimensionality of a turbulent near wake // *Journal of Fluid Mechanics*. — 2000. — Vol. 410. — P. 29–65.
- Margolin L., Rider J., Grinstein F. F.* Modeling turbulent flow with implicit LES // *J. Turbul.* — 2006. — Vol. 7 (15). — P. 1–27.
- Mohammad A. H., Wang Z. J., Liang Ch.* Large eddy simulation of flow over a cylinder using high-order spectral difference method // *Advances in Applied Mathematics and Mechanics*. — 2010. — Vol. 2, No. 4. — P. 451–466.
- Moin P.* Progress in large eddy simulation of turbulent flows // *AIAA pap.* 97-0749. — 1997.
- Moin P., Mahesh K.* Direct numerical simulation: a tool for turbulence research // *Annual Review of Fluid Mechanics*. — 1998. — Vol. 30. — P. 539–578.
- Molochnikov V. M., Mikheev N. I., Mikheev A. N., Paereli A. A., Dushin N. S., Dushina O. A.* SIV measurements of flow structure in the near wake of a circular cylinder at  $Re = 3900$  // *Fluid Dynamics Research*. — 2019. — Vol. 51, No. 5. — 055505.
- Monin A. S., Yaglom A. M.* Statistical fluid mechanics. Vol. II: Mechanics of Turbulence. — Cambridge, Massachusetts: MIT Press, 1975. — 896 p.
- Moser R. D., Moin P.* Direct numerical simulation of curved turbulent channel flow. — NASA TM 85974. Also, Rep. TF-20. — Stanford, California, USA: Department of Mechanical Engineering, Stanford University, 1984.
- Ong L., Wallace K.* The velocity field of the turbulent very near wake of a circular cylinder // *Experiments in Fluids*. — 1996. — Vol. 20. — P. 441–453.
- Parnaudeau P., Carlier J., Heitz D., Lamballais E.* Experimental and numerical studies of the flow over a circular cylinder at Reynolds number 3900 // *Physics of Fluids*. — 2008. — Vol. 20, No. 8. — 085101.
- Pope S. B.* Turbulent flows. — Cambridge University Press, 2000. — 771 p.
- Prandoni P., Vetterli M.* Signal Processing for communications. — 1st edn. — New York: EPFL Press, 2008. — 300 p.
- Rajani B. N., Kandasamy A., Majumdar S.* LES of flow past circular cylinder at  $Re = 3900$  // *Journal of Applied Fluid Mechanics*. — 2016. — Vol. 9, No. 3. — P. 1421–1435.
- Rider W., Margolin L.* The numerical analysis of implicit subgrid models // *16th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference*. — AIAA-2003-4101. — Orlando, Florida, 2003. — 11 p.
- Ritos K., Kokkinakis I. W., Drikakis D.* Performance of high-order implicit large eddy simulations // *Computers & Fluids*. — 2018. — Vol. 173. — P. 307–312.
- Roshko A.* Perspectives on bluff body aerodynamics // *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*. — 1993. — Vol. 49, No. 1–3. — P. 79–100.

- 
- Sieber M., Paschereit C. O., Oberleithner K.* Spectral proper orthogonal decomposition // *Journal of Fluid Mechanics*. — 2016. — Vol. 792. — P. 798–828.
- Snyder D. D., Degrez G.* Large-eddy simulation with complex 2-D geometries using a parallel finite element/spectral algorithm // *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. — 2003. — Vol. 41. — P. 1119–1135.
- Stewart R. W., Townsend A. A.* Similarity and self-preservation in isotropic turbulence // *Philosophical Transactions of the Royal Society*. — 1951. — Vol. 243. — P. 359–386.
- Taylor G.* The spectrum of turbulence // *Proceedings of the Royal Society of London — Series A: Mathematical and Physical Sciences*. — 1938. — Vol. 164 (919). — P. 476–490.
- Tennekes H., Lumley J. L.* *A first course in turbulence*. — M.I.T. Press, 1972. — 310 p.
- Williamson C. H. K.* Vortex dynamics in the cylinder wake // *Annual review of fluid mechanics*. — 1996. — Vol. 28. — P. 477–539.
- Wissink J. G., Rodi W.* Numerical study of the near wake of a circular cylinder // *International Journal of Heat and Fluid Flow*. — 2008. — Vol. 29, No. 4. — P. 1060–1070.