

УДК: 519.6, 533.7, 535.14, 536.3

Простой численный метод расщепления для решения линейного кинетического уравнения Больцмана с интенсивным рассеянием

В. В. Черепанов

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),
Россия, 125993, г. Москва, Волоколамское шоссе, д. 4

E-mail: vvcherepanov@yandex.ru

Получено 18.07.2025, после доработки — 10.03.2026.

Принято к публикации 13.03.2026.

В работе проанализированы некоторые проблемы разработки численных методов решения задач с линейным кинетическим уравнением переноса больцмановского типа. Перечислены существующие приложения такого рода уравнения. Основное внимание уделяется задачам переноса излучения в плоском слое, имеющим важное значение для экспериментальной исследовательской практики. Даны основные определения и приведены традиционные ограничения, применяемые в задачах переноса излучения. Рассмотрены некоторые особенности постановки задач радиационного переноса для плоских слоев нерегулярных гетерогенных композиционных материалов, частично прозрачных для электромагнитного излучения. Указаны основные подходы к численному и численно-аналитическому решению линейного кинетического уравнения переноса.

Рассмотрены некоторые варианты наиболее простых сеточных численных методов установления для решения кинетических задач переноса в плоском слое среды с сильным ослаблением. Проанализированы проблемы одно- и двухшаговых вариантов таких итерационных методов, для некоторых из них исследованы и установлены причины отсутствия устойчивости и сходимости. Показано, что в явном консервативном одношаговом методе для слоя однородной поглощающей, но не излучающей и не рассеивающей среды в спектре гармонических решений всегда существуют неустойчивые моды. Они возникают в области излучения, распространяющегося почти параллельно границам слоя, а их неустойчивость усиливается с ростом эффектов ослабления среды и обусловлена наличием в уравнении переноса малого коэффициента перед пространственной производной. Для ограничения нежелательного влияния этой компоненты рассмотрены различные варианты расщепления уравнения на два и три дробных шага.

Показано, что наиболее предпочтительными являются варианты с явной организацией дробных шагов, для которых представлено доказательство устойчивости и сходимости, основанное на теореме Лакса об эквивалентности. Доказано, что правильное выстраивание последовательности дробных шагов в явных схемах численного решения линейных нестационарных кинетических задач переноса способно обеспечивать их дополнительную стабилизацию, причем важную роль стабилизирующего инструмента может играть интеграл рассеяния. Так, при решении кинетических задач переноса в средах с высоким альбедо рассеяния наиболее простым и эффективным оказался явный сеточный метод установления с расщеплением итераций на три дробных шага по физическим процессам. Метод реализован в виде кода на языке Matlab, который в процессе получения численного решения осуществляет контроль его качества.

Представлены наиболее существенные результаты моделирования, подтвердившие, что трехшаговый метод предъявляет сравнительно умеренные требования по ресурсам, точности численного интегрирования и обеспечивает условную сходимость итераций. Его математическая корректность подтверждена поведением невязок уравнения, прямым контролем сходимости численных решений, физическая — обеспечением для эргодических систем свойством сходимости к инвариантному стационарному состоянию, не зависящему от начальных условий. Перечислены некоторые обнаруженные и возможные ограничения метода.

Работа будет полезной специалистам в области математического моделирования, численных методов, кинетической теории, комбинированного тепло- и массообмена, занимающимся вопросами интерпретации экспериментальных данных, аспирантам и студентам старших курсов, специализирующимся в указанных направлениях.

Ключевые слова: математическое моделирование, линейное кинетическое уравнение, радиационный перенос, плоский слой, сильное рассеивание, явный трехшаговый численный метод расщепления, обоснование

UDC: 519.6, 533.7, 535.14, 536.3

A simple numerical splitting method for solving the linear Boltzmann kinetic equation with intense scattering

V. V. Cherepanov

Moscow Aviation Institute (National Research University),
4 Volokolamskoe highway, Moscow, 125993, Russia

E-mail: vvcherepanov@yandex.ru

Received 18.07.2025, after completion – 10.03.2026.

Accepted for publication 13.03.2026.

This paper analyzes some issues in developing numerical methods for solving problems with a Boltzmann-type linear kinetic transport equation. Existing applications of this type of equation are listed. The focus is on the problem of radiative transfer in a flat layer, which are important for experimental research practice. Key definitions and traditional limitations applied to radiative transfer problems are presented. Some features of formulating radiative transfer problems for flat layers of irregular heterogeneous composite materials that are partially transparent to electromagnetic radiation are considered. The main approaches to the numerical and numerical-analytical solution of the linear kinetic transport equation are outlined.

Some variants of the simplest grid numerical methods for solving of nonstationary kinetic problems of transport a flat layer of a medium with strong attenuation are considered. Problems with one- and two-step variants of these iterative methods are analyzed, for some of them the causes of instability and convergence absence in some of them are investigated and established. It is shown that in the explicit conservative one-step method for a layer of a homogeneous absorbing, but neither radiating nor scattering, medium, unstable modes always exist in the spectrum of harmonic solutions. These modes arise in the region of radiation propagating almost parallel to the layer boundaries, and their instability increases with increasing attenuation effects and is caused by the presence of a small coefficient before the spatial derivative in the transport equation. To limit the undesirable influence of this component, various variants of splitting the equation into two and three fractional steps are considered.

It is shown that the most preferable options are those with explicitly organized fractional steps, for which a proof of their stability and convergence, that based on the Lax's equivalence theorem is presented. It is demonstrated that the correct building of the fractional step sequence in explicit schemes for numerical solving of the nonstationary linear kinetic transport problems can provide additional stabilization, with the scattering integral plays an important role in stabilizing them. So, when solving kinetic transport problems in media with high scattering albedo, the explicit grid method of settling with splitting the iterations into three fractional steps, that were based on physical processes proved to be the simplest and most effective. The method is implemented as Matlab code, which performs quality control during the generation of the numerical solution process.

The most significant modeling results are presented, confirming that the three-step method imposes relatively moderate requirements on resources and numerical integration accuracy, and ensures conditional convergence of iterations. Its mathematical correctness is confirmed by the behavior of the equation residuals and direct control of the convergence of numerical solutions. Its physical correctness is confirmed by ensuring, for ergodic systems, the property of convergence to an invariant steady state independent of the initial conditions. Some discovered and possible limitations of the method are listed.

The work will be useful to specialists in the field of mathematical modeling, numerical methods, kinetic theory, combined heat and mass transfer, dealing with issues of interpretation of experimental data, graduate students and senior students specializing in the indicated areas.

Keywords: mathematical modeling, linear kinetic transfer equation, radiative transfer problem, flat layer, strong scattering, explicit three-step numerical splitting method, justification

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2026, vol. 18, no. 2, pp. 315–333 (Russian).

1. Введение. Линейное кинетическое уравнение переноса

При описании переноса фотонов в частично прозрачных анизотропных гетерогенных средах приходится учитывать, что излучение может лишь избирательно проникать в вещество, размер отдельных фрагментов которого сопоставим с его длиной волны в наиболее значимой части спектра, а действие этих фрагментов на излучение может быть весьма сложным. Такая ситуация наблюдается, например, в ультрапористых высокотемпературных материалах, излучение в которых на микроуровне может быть существенно анизотропным. Его распространение необходимо описывать тогда посредством кинетического уравнения, феноменологический вывод которого заключается в записи баланса количества монохроматических фотонов при их элементарном перемещении ds вдоль траектории, ориентированной в произвольной точке \mathbf{r} в направлении некоторого единичного вектора $\mathbf{\Omega}$ (s — линейная координата вдоль траектории).

Пренебрегая эффектами вынужденного излучения, полагая, что среда допускает введение спектральных объемных кинетических коэффициентов, а фотоны упруго взаимодействуют только со средой, такой баланс можно свести к следующему линейному кинетическому уравнению переноса (ЛКУП) Больцмановского типа для спектральной интенсивности излучения $I_\nu(s) = I_\nu(t, \mathbf{r}, \mathbf{\Omega})$ [Зельдович, Райзер, 1966; Апресян, Кравцов, 1983]:

$$\frac{n_\nu}{c_0} \frac{\partial I_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, t)}{\partial t} + \mathbf{\Omega} \cdot \nabla I_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, t) + \gamma_\nu I_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, t) = \alpha_\nu I_{0\nu}(\mathbf{r}, t) + \beta_\nu \int_{(4\pi)} p_\nu(\mathbf{\Omega} | \mathbf{r}, \mathbf{\Omega}') I_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}', t) d\mathbf{\Omega}', \quad (1)$$

в котором индекс частоты ν указывает на спектрально зависимые величины; c_0 , n — скорость света в вакууме и локальный показатель преломления; α , β , $\gamma = \alpha + \beta$ — объемные коэффициенты поглощения, рассеяния и ослабления; $I_0(\mathbf{r}, t)$ — объемный коэффициент собственного излучения среды; $d\mathbf{\Omega}'$ — элементарный телесный угол. Если интегрирование по направлениям $\mathbf{\Omega}'$ проводится по углам θ' (полярный угол) и φ' (азимут) сферической системы координат с полярной осью, ориентированной по $\mathbf{\Omega}$, то полярный угол одновременно будет и углом рассеяния θ_s . Величина $p_\nu(\mathbf{\Omega} | \mathbf{r}, \mathbf{\Omega}') d\mathbf{\Omega}$ — локальная спектральная вероятность рассеяния в окрестность $d\mathbf{\Omega}$ направления распространения $\mathbf{\Omega}$ частиц, падающих в точку \mathbf{r} с направления $\mathbf{\Omega}'$, которая нормируется соотношением

$$\int_{(4\pi)} p_\nu(\mathbf{\Omega} | \mathbf{r}, \mathbf{\Omega}') d\mathbf{\Omega} = 1. \quad (2)$$

В принципе, уравнение вида (1) мы получаем и при интегрировании монохроматических уравнений по спектру [Суржиков, 2004]. Поэтому в дальнейшем для краткости указатель частоты в соотношениях мы будем опускать.

Такой вариант уравнения Больцмана находит широкое применение не только в теории излучения, но и в других областях. В различных случаях оно называется нестационарным кинетическим уравнением переноса излучения (УПИ), уравнением переноса нейтронов и т. д. Уравнения, подобные (1), описывают не только радиационный теплоперенос (перенос тепловой энергии фотонами) [Chandrasekhar, 1950; Соболев, 1956; Pomraning, 1973; Özişik, 1973; Howell et al., 2010; Modest, 2013], но и перенос других не взаимодействующих друг с другом частиц [Ceiz, Zweifel, 1967; Cercignani, 1975; Кольчужкин, Учайкин, 1978; Duderstadt, Martin, 1979; Марчук, Лебедев, 1981; Lewis, Miller, 1984]. Оно также используется для построения моделей переноса или передвижения биологических объектов или служит основой для построения таких моделей [Othmer et al., 1988; Erban, Othmer, 2005; Xue, Othmer, 2009; Othmer, Xue, 2013; Bressloff, 2014; Bellomo et al., 2015a; Bellomo et al., 2015b]. Тем не менее и далее мы будем придерживаться оптической интерпретации уравнения (1), которая для автора данной работы является более традиционной.

Уравнение (1) можно записать в следующих компактных формах [Özişik, 1973]:

$$\frac{dI_\nu(s)}{ds} = -\gamma_\nu I_\nu(s) + \varepsilon_\nu, \quad I_\nu(s) = I_\nu(s_0) e^{-\int_{s_0}^s \gamma_\nu(\eta) d\eta} + \int_{s_0}^s \varepsilon_\nu(\eta) e^{-\int_{\eta}^s \gamma_\nu(\mu) d\mu} d\eta, \quad (3)$$

где ε — источник уравнения, образующий его правую часть. Последняя, интегральная, форма полезна, например, при получении аналитических решений в специальных случаях.

Необходимо подчеркнуть, что даже в стационарном варианте для задач с уравнением (1) не существует общих методов точного аналитического решения. В численно-аналитических процедурах ЛКУП всегда заменяется приближенными уравнениями. Так, в средах с высоким альбедо рассеяния нестационарное УПИ (1) чаще всего заменяют диффузионным приближением или приближением лучистой теплопроводности, которые, строго говоря, не идентичны [Зельдович, Райзер, 1966]. Однако они не способны описывать фронт распространения, поскольку частицы в них имеют бесконечную скорость. Для построения ЛКУП давно используются P_N -варианты метода сферических гармоник [Özişik, 1973; Pomraning, 1973; Лебедев, 1976; Марчук, Лебедев, 1981; McClarren, 2011], из которых наиболее широко применяется P_1 -приближение [Duderstadt, Martin, 1979; McClarren et al., 2008], в некоторой степени исправляющее диффузионные модели. Однако P -методы не гарантируют положительности решения, а их варианты низших порядков применимы только для почти изотропного рассеяния [Körner, Bergmann, 1998; Heizler, 2012]. Сравнительно новые D_N -приближения качественно подобны P_{N-1} -приближениям и несколько ослабляют колебательное поведение последних. При этом диффузионное приближение идентично приближению D_0 , а приближение D_1 его уточняет и применимо в сильно рассеивающих средах [Rukolaine, Chistiakova, 2016].

Численные методы решения собственно УПИ обычно делятся на стохастические и детерминистские. Стохастические методы (Монте-Карло, трассировки лучей) обладают значительной общностью, но являются весьма затратными и имеют ряд тонких моментов, связанных с их практической реализацией [Howell, 1969; Howell, 1998; Howell et al., 2010; Modest, 2013].

К детерминистским численным методам относятся метод дискретных ординат (SN-приближение) [Chandrasekhar, 1950; Басс, Николаева, 1997; Coelho, 2014; Lewis, Miller, 1984], метод конечных объемов [Chai et al., 1994; Coelho, 2014; Modest, 2013], зональный метод [Maruyama, Aihara, 1997; Howell et al., 2010; Modest, 2013], метод дискретного переноса [Coelho, Carvalho, 1997; Howell et al., 2010; Modest, 2013], метод характеристик [Владимиров, 1958; Марчук, Лебедев, 1981; Rukolaine et al., 2002; Larsen, Morel, 2010] и др.

В настоящее время наиболее распространенными методами численного решения ЛКУП являются разные варианты методов дискретных ординат и конечных объемов, которые сравнительно универсальны и способны получать численные решения с довольно высокой степенью точности для широкого круга задач переноса. Однако все эти методы сравнительно трудоемки при практической реализации, хотя и могут совмещаться с другими вычислительными методами, использующими конечные разности, конечные элементы или конечные объемы.

Если локальная неоднородность и анизотропия среды носят случайный, а не регулярный характер, то особенности рассеяния излучения ее фрагментами в значительной мере нивелируются их хаотической ориентацией. Именно так обстоит дело во многих частично прозрачных высокотемпературных композиционных материалах [Алифанов, Черепанов, 2014]. В таких средах допустимо использовать модель изотропного рассеяния, вероятность которого зависит только от косинуса угла рассеяния θ_s между направлениями Ω и Ω' .

Также во многих случаях приходится решать сравнительно простые задачи с плоской геометрией, исключительное значение которых обусловлено тем, что плоские слои материалов наиболее часто используются в экспериментальной практике. Например, когда возникает необходи-

мость в интерпретации экспериментальных данных или решении обратных задач, построенных на их основе. В этом случае исследователям важно иметь набор сравнительно простых, эффективных методов решения прямых задач, которые можно легко реализовать на имеющихся под рукой вычислительных устройствах. Поэтому поиск простых альтернатив перечисленным выше методам достаточно актуален.

Построение эксперимента обычно позволяет свойства среды, интенсивность излучения в задаче об изотропно рассеивающем плоском слое считать независимыми от азимута и параллельных его поверхности координат, а также провести в соотношениях усреднение по азимуту направления рассеивания и использовать для показателя преломления среды его эффективное постоянное значение n_{ef} .

В самом деле, наличие времени в уравнении (1) существенно только для достаточно быстрых процессов. Такие задачи исследования нестационарных явлений при переносе излучения стали в последние годы актуальными, в частности, благодаря развитию лазерных устройств с длительностью импульса порядка пико- и фемтосекунд. В прикладных задачах комбинированного теплообмена, как правило, состояние границ и свойства материала стационарны и не зависят от интенсивности излучения. Температура на границах слоя в этих случаях обычно или задана, или вообще считается постоянной, поскольку релаксация температуры и излучения происходит на существенно различных временах. Тогда задача переноса излучения вообще может быть сформулирована в стационарной постановке, а собственное излучение в объеме материала и на его границах можно считать равновесным. При этом использование постоянного значения эффективного показателя преломления вполне приемлемо, если стационарная задача решается методом установления, поскольку нас не интересует процесс перехода к стационарному состоянию, а время является просто неким релаксационным параметром.

Будем исходить из справедливости этих утверждений и еще более упростим задачу, определив индикатрису (фазовую функцию) σ такого рассеяния, следующим образом усредненную по азимуту направления рассеяния:

$$p(\mathbf{\Omega} | \mathbf{r}, \mathbf{\Omega}') = \frac{\bar{\sigma}(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{\Omega}')}{4\pi} = \frac{\bar{\sigma}(\mathbf{r}, \cos \theta_s)}{4\pi},$$

$$\cos \theta_s = \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{\Omega}' = \mu\mu' + \sqrt{1 - \mu^2} \sqrt{1 - \mu'^2} \cos(\varphi - \varphi'), \quad \mu = \cos \theta, \quad \mu' = \cos \theta', \quad (4)$$

$$\int_{(4\pi)} p(\mathbf{\Omega} | \mathbf{r}, \mathbf{\Omega}') d\mathbf{\Omega} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \bar{\sigma}(\mathbf{r}, \cos \theta_s) \sin \theta_s d\theta_s d\varphi_s = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \sigma(z, \mu\mu') d\mu = 1.$$

Здесь использована ось Oz , ортогональная слою и ориентированная вдоль направления радиационного теплопереноса в нем. Для первых двух альтернативных вариантов интеграла нормировки (4) полярный и азимутальный углы рассеяния θ_s, φ_s задают ориентацию направления рассеяния $\mathbf{\Omega}$ в сферической системе координат с полярной осью, ориентированной в направлении освещения $\mathbf{\Omega}'$. В последнем варианте нормировочного интеграла в качестве полярной использована ось Oz . Индикатриса имеет смысл вероятности рассеяния в соответствующем образом ориентированный единичный телесный угол.

Используя естественную, не приводящую к возникновению избыточных коэффициентов, систему масштабов $M_\gamma = M_\alpha = M_\beta = M_z^{-1} = a\gamma_{\max}, \frac{cM_t M_\gamma}{n_{ef}} = 1, a \in (0, 1)$, мы приходим к уравнению

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \mu \frac{\partial}{\partial z} + \gamma(z) \right] I(z, \mu, t) = \alpha(z) I_b(z) + \frac{\beta(z)}{2} \int_{-1}^1 \sigma(z, \mu, \mu') I(z, \mu', t) d\mu', \quad (5)$$

в котором время используется как параметр релаксации, а для безразмерных величин использованы те же обозначения, что и для размерных. Заметим, что выбранный линейный масштаб переводит задачу в термины оптической толщины, которая значительно увеличивается при повышении рассеивающих свойств среды. Этот результат в некоторой степени является неприятным для вычислительных сеточных процедур, поскольку он приводит к увеличению числа пространственных узлов.

Уравнение (5) следует дополнить граничными и начальным условиями. В частности, если слой имеет толщину d , мы приходим к известной стационарной интегро-дифференциальной краевой задаче [Özişik, 1973] с граничными условиями

$$I(0, \mu) = I_b(0), \quad \mu > 0; \quad I(d, \mu) = I_b(d), \quad \mu < 0, \quad (6)$$

где I_b — интенсивность равновесного (черного) излучения, определяемая формулой Планка. Поскольку для такой задачи либо начальное условие не нужно, либо его вид не принципиален в силу эргодичности, можно в качестве такового, при решении методом установления, рассматривать равновесное состояние излучения, считая температуру в пределах слоя меняющейся по известному закону, согласованному с (6).

В заключение этого краткого обсуждения заметим, что использование при численном решении неявных консервативных и устойчивых сеточных аппроксимаций для уравнений с интегральным оператором относительно сложно реализуется, поскольку приводит к линейным системам большой размерности. Явные, более простые и экономичные варианты сеточных методов, которым в основном посвящена последующая часть данной работы, необходимо сначала сделать устойчивыми.

Далее в работе будут рассмотрены и в различной степени исследованы четыре различных численных метода (сеточные явные методы — одношаговый, предиктор–корректор, трехшаговый, метод «предиктор–корректор» с явной реализацией корректора на основе интегральной формы уравнения переноса), а также приведены результаты ряда расчетов, связанных единой логикой и целью, представляющие не только методологический, но и практический интерес. Основная ее цель заключается в демонстрации того, что процесс взаимодействия света с веществом, его специфика способны влиять на проблему устойчивости численных методов, добиваться желаемого результата при их правильной организации.

2. Об одной явной консервативной аппроксимации задачи о плоском слое

Предварительно заметим, что в простейшем случае оптически однородной неизлучающей, не рассеивающей, но поглощающей среды $\beta = 0$, $\alpha = \gamma = \text{const}$, поэтому **стационарная** задача (5), (6) элементарно решается и приводит к известному закону Бугера, который является элементарным следствием (3) и который можно использовать для верификации численных решений.

Для построения явного консервативного численного метода приведем (5) к следующей дивергентной форме:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} I(z, \mu, t) + \frac{\partial}{\partial z} [V_z(z, \mu, t) I(z, \mu, t)] &= 0, \quad V_z(z, \mu, t) = \mu + W(z, \mu, t) I^{-1}(z, \mu, t), \\ W(z, \mu, t) &= \int_z^0 f(z', \mu, t) dz', \quad \mu > 0; \quad W(z, \mu, t) = \int_z^d f(z', \mu, t) dz', \quad \mu < 0, \\ f(z, \mu, t) &= \alpha(z) I_b(z) - \gamma(z) I(z, \mu, t) + \frac{\beta(z)}{2} \int_{-1}^1 \sigma(z, \mu, \mu') I(z, \mu', t) d\mu', \end{aligned} \quad (7)$$

определив эффективную скорость V_z и потенциальную функцию W .

Отметим, что интегрирование в выражении потенциальной функции в (7) проводится по области влияния на точку z слоя. Для аппроксимации уравнений (7) используем противопоточную схему [Potter, 1973]. Эта просто реализуемая консервативная условно устойчивая схема, родственна методу крупных частиц, имеет на однородной сетке первый порядок точности аппроксимации по $\Delta z = h$, что приводит к появлению численной диффузии. Снизить ее влияние на качество решения можно, например, введением дополнительного шага, реализующего метод коррекции потоков [Killeen, 1976]. Можно также реализовать вариант метода частиц, предложенный в работе [Богомолов, Звенков, 2006]. Численный расчет интегралов здесь и далее проведем по методу Рунге – Ромберга [Жидков и др., 2009], поскольку порядком главного члена погрешности k_R здесь достаточно легко управлять.

Противопоточная схема, как правило, устойчива при выполнении условия Куранта. Определенные проблемы ее использования возникают вблизи сильных градиентов интенсивности и областей, в которых ее значения относительно близки к нулю. Это существенно увеличивает эффективные скорости V_z и до неприемлемо малых значений уменьшает шаг $\Delta t = \tau$ метода по времени. Также на устойчивость метода может определенное влияние оказывать интегральный характер потенциальной функции W в (7). Поэтому проведем более детальное исследование соответствующей аппроксимации.

Чтобы продвинуться как можно дальше в анализе и иметь возможность сравнения решения с точным, примем $\beta = 0$, $\alpha = \gamma = \text{const}$ и возьмем для определенности $\mu > 0$. Понятно, что результаты, подобные представленным далее, можно получить и для обратного знака этой переменной.

Поскольку в рассматриваемом случае эффективные скорости V имеют знак μ и положительны, дискретный аналог (7) принимает вид

$$I_{k,j}^{n+1} = I_{k,j}^n + \frac{\tau_n}{h} \left[\mu_j (I_{k-1,j}^n - I_{k,j}^n) - \gamma \int_{h(k-2)}^{h(k-1)} I_j^n(z) dz \right] + o(\tau^2, h), \quad \mu_j > 0,$$

$$I_{k,j}^n \equiv I(z_k, \mu_j, t_n), \quad t_n = t_{n-1} + \tau_n, \quad n \geq 1, \quad t_0 = 0, \quad \tau_n < \frac{h}{\max_{k,j} |V_{k,j}^{n-1}|}, \quad (8)$$

$$\mu_j = \cos\left(\frac{(j-0,5)\pi}{n_\mu}\right), \quad j = 1, \dots, n_\mu, \quad n_\mu = 2m, \quad z_k = (k-1)h, \quad h = \frac{d}{n_z - 1},$$

где n_z, n_μ – размерности сетки по координате и направлению.

Отсюда, после несложных преобразований и снятия у функций верхних и нижних индексов, получаем следующее аппроксимирующее уравнение:

$$\frac{\partial I}{\partial t} + \left(\mu - \frac{\gamma h}{2}\right) \frac{\partial I}{\partial z} + \frac{\gamma \tau}{2} \frac{\partial^2 I}{\partial t^2} + o(\tau^2) = \frac{\mu h}{2} \frac{\partial^2 I}{\partial z^2} - \gamma I + o(h^2), \quad \mu > 0. \quad (9)$$

Как видим, по сравнению с (7), в членах первого порядка малости по шагам дискретизации в уравнении (9) появляются три дополнительных эффекта.

1. Изменилась скорость эффективного переноса частиц, причем в относительных величинах это изменение тем значительнее, чем больше γ .

2. Появились вторые производные по координате, что обычно свойственно для большинства схем первого порядка точности аппроксимации. Возникновение таких компонент обычно связывают с численной диффузией.

3. Однако совместное появление и вторых производных по t в (9) приводит дополнительно к появлению волновых возмущений решения, которые распространяются по сетке со скоростью $\left(\frac{\mu h}{\gamma \tau}\right)^{1/2}$. Их появление вполне закономерно, поскольку, проводя дискретизацию (7), мы фактически перестаем контролировать ситуацию на расстояниях и временах, меньших шагов h и τ

аппроксимации, допуская тем самым, в частности, возникновение у решения высокочастотных коротковолновых возмущений. Нетрудно убедиться в том, что среди таких возмущений *всегда* содержатся неустойчивые компоненты.

В самом деле, подставим в (9) решение в форме однонаправленной плоской монохроматической волны $I = \exp[i(\omega t - kz)]$, где $\omega = \omega_1 + i\omega_2$, которое устойчиво только при $\omega_2 > 0$. Подстановка приводит нас к дисперсионным соотношениям:

$$\omega_1 + k\left(\frac{\mu}{\gamma} - \frac{h}{2}\right) - \omega_1\omega_2\tau = 0, \quad \omega_2 - \frac{\tau}{2}(\omega_1^2 - \omega_2^2) = \frac{\mu h}{2\gamma}k^2 + 1,$$

из которых нетрудно получить и следующее уравнение для ω_2 :

$$\tau^2\omega_2^4 - 2\tau(1 - \tau)\omega_2^3 - (c\tau^2 + 4\tau - 1)\omega_2^2 + 2(c\tau + 1)\omega_2 - (c + d) = 0, \quad (10)$$

$$c = 2(1 + ab), \quad d = (a - b)^2\tau, \quad a = \frac{k\mu}{\gamma}, \quad b = \frac{kh}{2}.$$

Корни (10) имеют, очевидно, разные знаки, что и приводит всегда к появлению неустойчивых мод в спектре возмущений. Причиной такого неустойчивого поведения аппроксимации (8) системы (7) в области ее традиционной курантовской устойчивости является наличие у уравнения сильно отличающихся коэффициентов, в частности относительно малого коэффициента перед первой производной по z в уравнении (9). Он возникает также, если стационарное уравнение с сильным ослаблением сначала разделить на γ , устраняя в нем слишком большие коэффициенты, и лишь затем ввести фиктивное время как параметр релаксации для метода установления. Этот коэффициент тем меньше, чем больше γ и меньше μ , и делает аналог уравнения (9) очевидно жестким. При сильном ослаблении в таком уравнении всегда будут развиваться неустойчивости, зарождающиеся в области малых μ , где к тому же дополнительная диффузионная компонента этого уравнения будет значительно ослаблена.

Данный вывод подтверждает рис. 1, на котором сопоставляется поведение точного стационарного бугеровского решения и промежуточного численного решения задачи (7)–(9) методом установления. В отсутствие рассеяния в слое формируются два встречных потока излучения, которые не смешиваются друг с другом и определяются различными граничными температурами. Неустойчивость при фиксированном γ зарождается при численном решении в области малых по модулю μ .

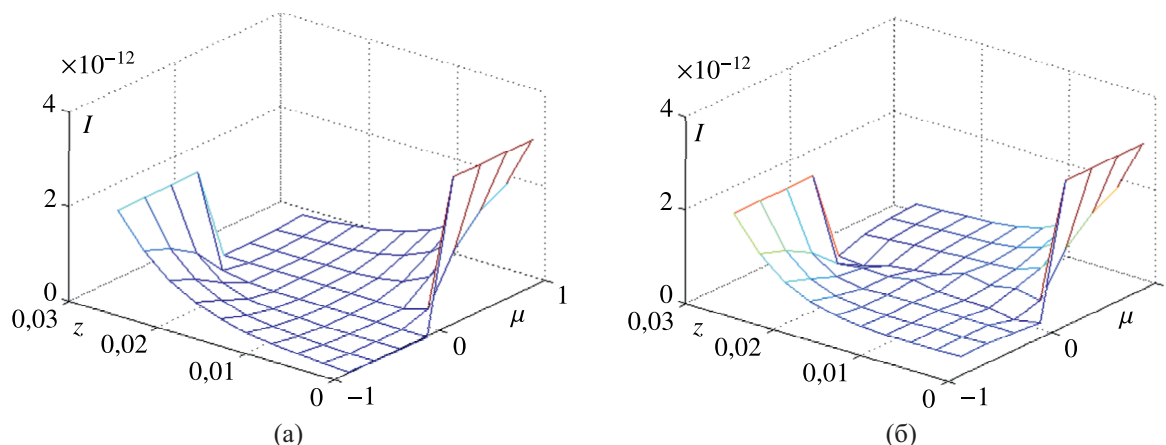


Рис. 1. Сравнение (а) точного бугеровского и (б) промежуточного численного решения задачи (5), (6) методом установления (8) с постоянно линейным профилем температуры в слое и начальным планковским условием: $d = 0,026$ м, $\beta = 0$, $\alpha = \gamma = 130$ м⁻¹, $n_z \times n_\mu = 10 \times 8$, $\epsilon \in [800, 1200]$ °С

Поиск устойчивой аппроксимации задачи можно вести в различных направлениях. Ранее уже отмечалось появление технических осложнений, возникающих при неявной аппроксимации уравнений с интегральным оператором. Вместе с тем можно попытаться снизить их уровень, если использовать расщепление оператора задачи и пойти по пути построения алгоритмов с «дробными» шагами [Марчук, 1977; Ковеня, Яненко, 1981].

3. Варианты метода дробных шагов. Расщепление по физическим процессам

Для двухшагового расщепления уравнения (5) по схеме «предиктор – корректор», следуя [Ковеня, Яненко, 1981], запишем его в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial t} + L_1 I &= \alpha(z)I_b + L_2 I, \quad L_1 I(z, \mu, t) = \left(\mu \frac{\partial}{\partial z} + \gamma(z) \right) I(z, \mu, t), \\ L_2 I(z, \mu, t) &= \frac{\beta(z)}{2} \int_{-1}^1 \sigma(z, \mu, \mu_1) I(z, \mu_1, t) d\mu_1, \end{aligned} \quad (11)$$

и рассмотрим варианты аппроксимации

$$\frac{I^{n+1/2} - I^n}{\tau} + L_1 I^q = \alpha I_b, \quad \frac{I^{n+1} - I^{n+1/2}}{\tau} = L_2 I^p, \quad (12)$$

дробных шагов при различных q и p , не приводящие к ее многослойности. Обычно при этом рассматриваются сочетания $q = n + \frac{1}{2}$ и $p = n + 1$, $q = n + \frac{1}{2}$ и $p = n + \frac{1}{2}$, $q = n$ и $p = n + \frac{1}{2}$.

Не сложно убедиться, что во всех указанных вариантах схема (12) на самом деле аппроксимирует (5) явно. Но при $q = n + \frac{1}{2}$ и $p = n + 1$ аппроксимация дробных шагов будет полностью неявной, что усложняет их практическую реализацию, поскольку шаг корректор с оператором интегрирования L_2 требует либо решения системы большой размерности, либо организации дополнительного итерационного процесса. Кроме того, в этом случае аппроксимация по времени обеспечивается лишь при достаточно малых τ и ограниченных операторах $L_{1,2}$. Понятно, что оператор L_1 , содержащий операцию дифференцирования, не удовлетворяет этому условию.

При $q = n + \frac{1}{2}$ и $p = n + \frac{1}{2}$ схема хотя и будет явной на втором дробном шаге, но зато аппроксимирует уравнение (11) со вторым порядком точности по τ лишь относительно временного слоя $n + \frac{1}{2}$. Поскольку в методе значения I^n и I^{n+1} также оказываются задействованными, схема в этом случае оказывается по времени трехслойной.

При изначально явной организации дробных шагов, когда $q = n$ и $p = n + \frac{1}{2}$, аппроксимация уравнения обеспечивается без требования ограниченности операторов $L_{1,2}$, что является весьма существенным моментом. Этот вариант двухшагового метода в целом оказывается подобным рассмотренному в предыдущем разделе одношаговому методу, но он не требует введения эффективных скоростей с интегральным определением. Благодаря этому метод оказывается условно устойчивым, и мы еще обратимся к этому варианту двухшагового алгоритма несколько позже.

Сейчас же рассмотрим еще один вариант построения предиктора, связанный с использованием интегральной формы (3) уравнения (5). На ее основе может быть построен итерационный

алгоритм, который, как нетрудно показать, сводится к следующим явным уравнениям:

$$\begin{aligned}
 I^{n+1/2}(z, \mu) &= I_b(0)e^{-\int_0^z f(z_1, \mu) dz_1} + \int_0^z dz_1 g(z_1, \mu) e^{-\int_{z_1}^z f(z_2, \mu) dz_2}, \quad \mu > 0, \\
 I^{n+1/2}(z, \mu) &= I_b(d)e^{\int_z^d f(z_1, \mu) dz_1} - \int_z^d dz_1 g(z_1, \mu) e^{\int_1^{z_1} f(z_2, \mu) dz_2}, \quad \mu < 0, \\
 f(z, \mu) &= \frac{1}{\mu\tau}(1 + \gamma(z)\tau), \quad g(z, \mu) = \frac{1}{\mu\tau}(I^n + \alpha I_b\tau),
 \end{aligned} \tag{13}$$

в которых интенсивность излучения в подынтегральном выражении берется с уже рассчитанного временного слоя. Шаг корректор может быть реализован как в явной, так и неявной итерационной формах.

Не трудно убедиться, что формулы (13) правильно работают в точном, аналитическом исполнении, обеспечивая все необходимые предельные соотношения и условия примыкания. Однако в случае их численной реализации они начинают предъявлять неприемлемо высокие требования к точности численного интегрирования. Кроме того, в случае неявного корректора в данном подходе также возникает конфликт условий, обеспечивающих реализацию вычислений на дробных шагах: $\tau\mu > 1$ для предиктора и $\tau\beta_{\max} < 1$ для корректора. Для физически реализуемых параметров эти требования являются несовместимыми.

Результаты, продемонстрированные выше, показывают, что проблемы численного решения уравнения (7) связаны не только с наличием малого коэффициента перед пространственной производной. Они могут возникнуть и тогда, когда жесткая компонента кинетического уравнения включается в какое-либо из уравнений наряду с другими его компонентами, за исключением производной по времени. Поэтому имеет смысл рассмотреть следующий алгоритм трехшагового расщепления, выделяющий процесс обработки жесткой компоненты в отдельный шаг. Представив (5) в виде

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial I}{\partial t} + L_1 I &= (L_2 + L_3)I, \quad L_1 I(z, \mu, t) = \mu \frac{\partial}{\partial z} I(z, \mu, t), \\
 L_2 I(z, \mu, t) &= \frac{\beta(z)}{2} \int_{-1}^1 \sigma(z, \mu, \mu_1) I(z, \mu_1, t) d\mu_1, \quad L_3 I(z, \mu, t) = \alpha(z)I_b - \gamma(z)I(z, \mu, t),
 \end{aligned} \tag{14}$$

реализуем следующую последовательность дробных шагов:

$$\begin{aligned}
 I^{n+1/3}(z, \mu) - I^n(z, \mu) + \tau\mu \frac{\partial}{\partial z} (I^n(z, \mu)) &= 0, \quad \tau < h, \\
 I^{n+2/3}(z, \mu) &= I^{n+1/3}(z, \mu) + \tau\beta(z) \int_{-1}^1 \sigma(z, \mu, \mu_1) I^{n+1/3}(z, \mu_1) d\mu_1, \\
 I^{n+1}(z, \mu) &= I^{n+2/3}(z, \mu) + \tau(\alpha(z)I_b(z) - \gamma(z)I^{n+2/3}(z, \mu)),
 \end{aligned} \tag{15}$$

которые можно связать с основными физическими процессами, сопровождающими распространение излучения в материале.

1. В первую очередь делаем дробный шаг конвекции с эффективной скоростью переноса μ , который обрабатывает жесткую компоненту уравнения (5). На этом шаге также используем

явную противоточную схему и сформируем условие устойчивости с учетом ограничения $\max \mu_k = 1$ на скорости сеточного переноса. Здесь же учитываем и пространственные граничные условия задачи.

2. Заметим, что если следующий дробный шаг явного алгоритма будет учитывать остальные неинтегральные компоненты уравнения (5), т.е. будет связан с физическими процессами ослабления излучения и собственного излучения среды, то в результате комбинации двух первых таких шагов с точностью до членов $O(\tau)$ возникает предиктор из метода (12). Поэтому для построения алгоритма, отсекающего от остальных дробных шагов действие жесткой компоненты (5), на втором дробном шаге необходимо учитывать действие интегральной компоненты этого уравнения, связав его с процессом своеобразного «перемешивания» излучения, порождаемого рассеянием.
3. Наконец, третий дробный шаг тогда должен обработать оставшиеся неучтенными эффекты собственного излучения среды и ослабления ею излучения.

Исследуем сходимость и устойчивость данного метода, полагая, что $\alpha, \beta, \gamma, \sigma = \text{const}$, $I(t, z, \mu) = \varphi(t, z)\psi(\mu)$, $\psi(\mu) = \psi = \text{const}$. Последнее условие можно, не усложняя анализ, заменить на условие изотропии интенсивности независимо в области положительных и отрицательных μ . Это допущение выводит за рамки исследования устойчивости фактор точности численного интегрирования в (15).

При сделанных предположениях уравнения (15) принимают вид

$$\begin{aligned} \varphi_k^{n+1/3} &= \varphi_k^n - \frac{\tau\mu}{h}(\Theta_+\Delta_- - \Theta_-\Delta_+)\varphi_k^n, \quad \tau < h, \\ \varphi_k^{n+2/3} &= (1 + \tau\beta\sigma)\varphi_k^{n+1/3}, \quad \varphi_k^{n+1} = \frac{\alpha\tau}{\psi}I_{b,k} + (1 - \tau\gamma)\varphi_k^{n+2/3}, \\ \Delta_+\varphi_k^n &= \varphi_{k+1}^n - \varphi_k^n, \quad \Delta_-\varphi_k^n = \varphi_k^n - \varphi_{k-1}^n, \quad \Theta_+ = \Theta(\mu), \quad \Theta_- = \Theta(-\mu), \end{aligned}$$

где $\Theta(x)$ — функция Хэвисайда, а нижний индекс относится к узлам пространственной сетки.

Отсюда находим, что

$$\varphi_k^{n+1} = \frac{\alpha\tau}{\psi}I_{b,k} + (1 - \tau\gamma)(1 + \tau\beta\sigma) \left[1 - \frac{\tau\mu}{h}(\Theta_+\Delta_- - \Theta_-\Delta_+) \right] \varphi_k^n \tag{16}$$

и

$$\varphi_k^{n+1} - \varphi_k^n = (1 - \tau\gamma)(1 + \tau\beta\sigma) \left[1 - \frac{\tau\mu}{h}(\Theta_+\Delta_- - \Theta_-\Delta_+) \right] (\varphi_k^n - \varphi_k^{n-1}). \tag{17}$$

Полагая в (17) $\varphi_k^n = \lambda^n e^{ikh}$, не трудно после преобразований убедиться в том, что

$$\begin{aligned} \lambda &= (1 - \tau\gamma)(1 + \tau\beta\sigma) \left\{ 1 - \frac{\tau\mu}{h} \left[\Theta_+(1 - e^{-ih}) + \Theta_-(e^{ih} - 1) \right] \right\}, \\ \lambda_{\pm} &= a[1 \pm b(\cos h - 1) - ib \sin h], \quad a = (1 - \gamma\tau)(1 + \beta\sigma\tau), \quad b = \frac{\mu\tau}{h}, \end{aligned}$$

и

$$|\lambda_{\pm}|^2 = 1 - \tau \left[2(\gamma - \beta\sigma) \pm \frac{4\mu}{h} \right] + O(\tau^2), \tag{18}$$

где знаки плюс и минус выбираются для положительных и отрицательных μ соответственно. При выводе использовалось допущение $\tau h \sim O(\tau^2)$, вполне приемлемое в силу условия Куранта $\tau < h$, которое может быть записано в форме $\tau = Ch$, $C < 1$. Поскольку постоянная C обычно не выбирается излишне малой, для нее вполне можно задать и нижнюю границу, например $0,25 < C < 1$. В частности, в представленных далее расчетах использовалось значение $C \sim 0,284$.

Из (18), последнего равенства в (4), связи коэффициентов β и γ следует ограничение $|\lambda_{\pm}|^2 < 1$, которое обеспечивает устойчивость как волновых решений, так и решений однородного уравнения (17). В силу их линейности и теоремы Лакса об эквивалентности [Lax, Richtmyer, 1956] этим также гарантирована сходимость итераций как однородной задачи (17), так и неоднородной (16).

В заключение отметим, что аналогичные рассуждения, проведенные для явной двухшаговой процедуры (14), (15) с $q = n$, $p = n + 1$ и численной реализацией шага предиктора, приводят нас к подобному (18) соотношению:

$$|\lambda_{\pm}|^2 = 1 - \tau[2(\gamma - \beta\sigma)] + O(\tau^2),$$

которое также обеспечивает сходимость соответствующего метода, хотя и при несколько более жестких ограничениях на коэффициенты уравнения. Именно по этой причине явный двухшаговый метод «предиктор – корректор» (14), (15) не анализировался отдельно и какие-либо расчеты по нему не проводились.

Полученные результаты говорят о том, что правильное выстраивание последовательности дробных шагов в явных численных методах расщепления при решении линейных кинетических задач переноса может обеспечивать их дополнительную стабилизацию, чем, несомненно, необходимо пользоваться. Установление и обоснование этого обстоятельства являются, по мнению автора, важным результатом данной работы.

4. Тестирование трехшагового метода расщепления по физическим процессам. Радиационный перенос в плоском слое материала RVC (Reticulated Vitreous Carbon)

Представляющийся наиболее эффективным трехшаговый метод расщепления по физическим процессам был реализован автором в виде кода на языке Matlab. Практическое применение показало удобство и эффективность трехшагового метода, хотя он и предъявляет определенные требования к точности численного интегрирования. Однако они не являются чрезмерными. В представленных расчетах итерации (15) сходились при выполнении условия устойчивости Куранта в виде равенства $\tau = 0,284h$ и при порядке точности $k_R \geq 6$ численного интегрирования по методу Рунге–Ромберга. Кроме того, следует помнить, что доказательство сходимости метода проведено для случая постоянной индикатрисы. Практика моделирования показывает, что итерационные процедуры обычно лучше сходятся в случае слабоменяющейся индикатрисы. Поэтому определенные проблемы предлагаемого алгоритма возможны при ее сильном изменении, особенно там, где возникают относительно большие значения индикатрисы. Этот вывод следует из (18), однако данный вопрос детально не исследовался.

Хотя сходимость метода обеспечивается независимо от начального состояния, ее скорость при грубом начале может быть ниже. Однако стационарное решение, как это и должно быть для подобных эргодических систем, от выбора начала не должно зависеть, поскольку является аттрактором, определяемым лишь внешними условиями. Тем не менее в расчетах целесообразно отслеживать точность решения задачи. Сделать это можно, в частности, контролируя невязку решения входящего в нее кинетического уравнения.

В качестве примера применения разработанного метода рассмотрим перенос излучения с длиной волны $\lambda = 2,4$ мкм в слое толщиной $d = 26$ мм ультрапористого сетчатого стеклоуглерода RVC ETI-CF-ERG с высоким спектральным альбедо рассеяния, известными спектрально-кинетическими коэффициентами и стационарным профилем температуры $T(z) \in [800, 1200]$ °С, которые для слоя этого материала были определены экспериментально или на основании результатов нестационарного теплового эксперимента [Алифанов, Черепанов, 2014]. Предварительное

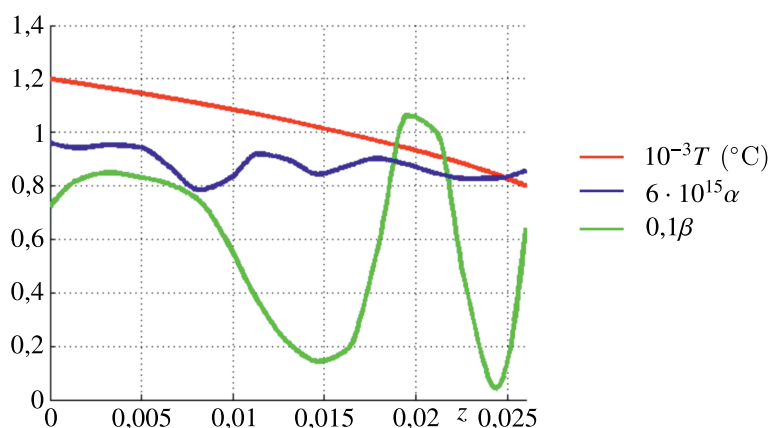


Рис. 2. Профили характеристик образца ультрапористого сетчатого стеклоуглерода RVC ETTI-CF-ERG толщиной $d = 26$ мм. Спектральные коэффициенты соответствуют длине волны $\lambda = 2,4$ мкм

исследование показало, что фазовая функция этого материала имеет практически постоянное значение $\sigma \approx 0,072$. Соответствующие зависимости температуры и спектрально-кинетических коэффициентов от размерной величины z приведены на рис. 2.

Для масштабирования использовалось значение $M_\gamma = 130$, соответствующая оптическая (безразмерная) толщина слоя равнялась 3,38. В расчетах применялась равномерная сетка с размерностью $n_z \times n_\mu = 17 \times 8$. Интегрирование по методу Рунге – Ромберга проводилось с порядком погрешности $k_R = 6$ или 8.

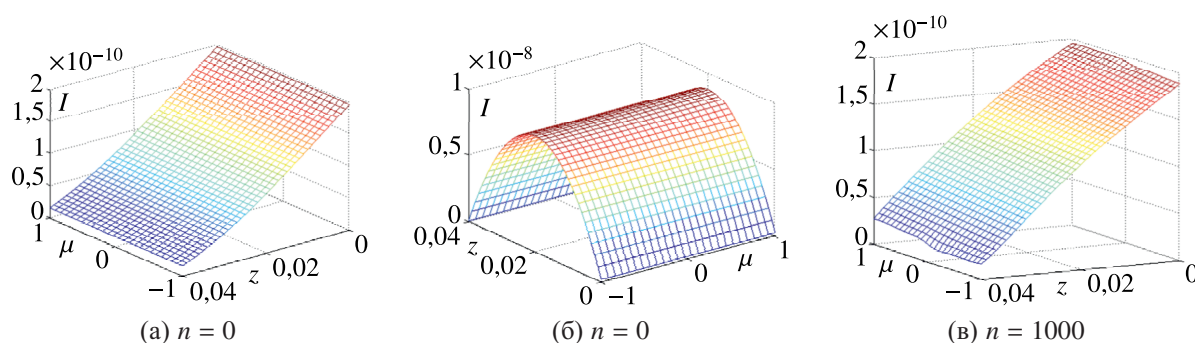


Рис. 3. Вид спектральной интенсивности излучения I в плоском слое RVC ETTI-CF-ULT: (а) планковское начало; (б) параболическое начало; (в) стационарное состояние при установлении; n – номер итерации

Моделирование проводилось с планковским и параболическим начальными приближениями интенсивности излучения, которые показаны на рис. 3, а и 3, б соответственно. Там же, на рис. 3, в, приведен стационарный вид спектральной интенсивности. Он соответствует 1000-й итерации метода установления при параболическом начальном приближении и 220-й итерации при планковском (см. таблицу 1).

Как видим, в слое устанавливается практически изотропное состояние излучения, весьма близкое к равновесному. Поэтому планковское состояние в качестве начального приближения является очень хорошим.

В таблице 1 и на рис. 4 показано поведение абсолютной ($\delta_a = \max |f_l - f_r|$) и относительной ($\delta_r = \max \left[\frac{|f_l - f_r|}{\max(f_l, f_r)} \right]$) невязок уравнения (5), где f_l и f_r – его левая и правая части соответственно. Там же показано поведение нормы относительного отклонения итераций $\delta_n = \frac{\max |f^n - f^{n-1}|}{f^{n-1}}$.

Таблица 1. Поведение абсолютной (δ_a) и относительной (δ_r) невязок уравнения (5), нормы относительного отклонения итераций δ_n , $\tau = 0,0604$, $h_z = 0,2112$, $h_\mu = 0,25$, n – номер итерации

Параболическое начальное условие, $k_R = 6$				Планковское начальное условие				
n	δ_a	δ_r	δ_n	n	$\delta_a, k_R = 6$	$\delta_r, k_R = 6$	$\delta_r, k_R = 8$	$\delta_n, k_R = 6$
1	3,6389e-009	0,1053	36,4742	1	2,7667e-011	0,0268	0,0268	0,1288
2	2,2248e-009	0,0387	0,9725	2	1,4354e-011	0,0137	0,0137	0,0730
3	1,6602e-009	0,0297	0,4042	3	7,7253e-012	0,0074	0,0074	0,0428
4	1,4246e-009	0,0260	0,2093	4	4,3926e-012	0,0042	0,0043	0,0265
5	1,3884e-009	0,0257	0,1171	5	2,7613e-012	0,0027	0,0027	0,0172
6	1,3463e-009	0,0254	0,0670	6	2,4640e-012	0,0014	0,0013	0,0124
7	1,3024e-009	0,0249	0,0378	7	2,3989e-012	0,0014	0,0013	0,0092
10	1,1939e-009	0,0239	0,0151	10	2,3316e-012	0,0014	0,0012	0,0061
15	1,0710e-009	0,0216	0,0136	15	2,3198e-012	0,0013	0,0012	0,0038
20	9,8960e-010	0,0213	0,0131	20	2,3258e-012	0,0014	0,0012	0,0030
30	8,7965e-010	0,0182	0,0125	30	2,3353e-012	0,0014	0,0012	0,0021
40	7,8337e-010	0,0182	0,0120	40	2,3365e-012	0,0014	0,0012	0,0015
60	6,1937e-010	0,0181	0,0115	60	2,3240e-012	0,0014	0,0012	9,5382e-004
80	4,8878e-010	0,0180	0,0114	80	2,3037e-012	0,0013	0,0012	6,4307e-004
100	3,8565e-010	0,0178	0,0113	100	2,2825e-012	0,0013	0,0012	4,5619e-004
150	2,1101e-010	0,0171	0,0111	140	2,2468e-012	0,0013	0,0012	2,5638e-004
200	1,1839e-010	0,0161	0,0107	180	2,2220e-012	0,0013	0,0011	1,5333e-004
400	1,2378e-011	0,0123	0,0058	220	2,2060e-012	0,0013	0,0011	9,3908e-005
700	2,1204e-012	0,0040	3,2817e-004					
1000	2,1758e-012	0,0013	9,8149e-006					

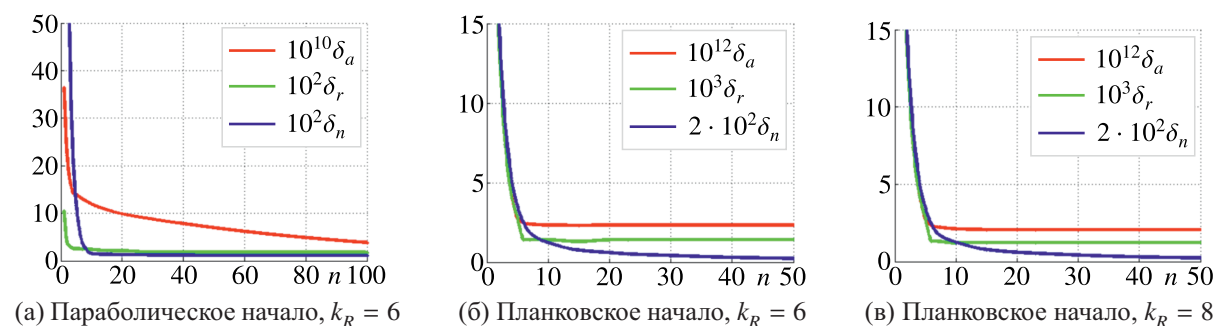


Рис. 4. Поведение абсолютной (δ_a) и относительной (δ_r) невязок уравнения (7), нормы относительного отклонения итераций δ_n в методе установления с трехшаговым расщеплением итераций по физическим процессам для слоя RVC ETI-CF-ULT. n – номер итерации, k_R – порядок погрешности численного интегрирования

Результаты, представленные в таблице, показывают, что внутри расчетной области итерационный процесс с грубым началом снижает абсолютную невязку уравнения на три порядка. Стационарное состояние с точностью установления в десятые доли процента достигалось в этом случае примерно на 530-й итерации. Однако этот расчет был специально доведен до больших номеров итераций n , чтобы подтвердить стабильность и устойчивость полученного стационарного решения. Номера итераций приведены в таблице и на рисунках, дискретные значения функций на рисунках преобразованы в непрерывные интерполяцией кубическими сплайнами с учетом значений временной релаксационной переменной. Если в качестве начального использовать равновесное распределение, соответствующее установившемуся профилю температуры в слое, то итерации сходились к стационарному состоянию практически на порядок быстрее. Слабое убу-

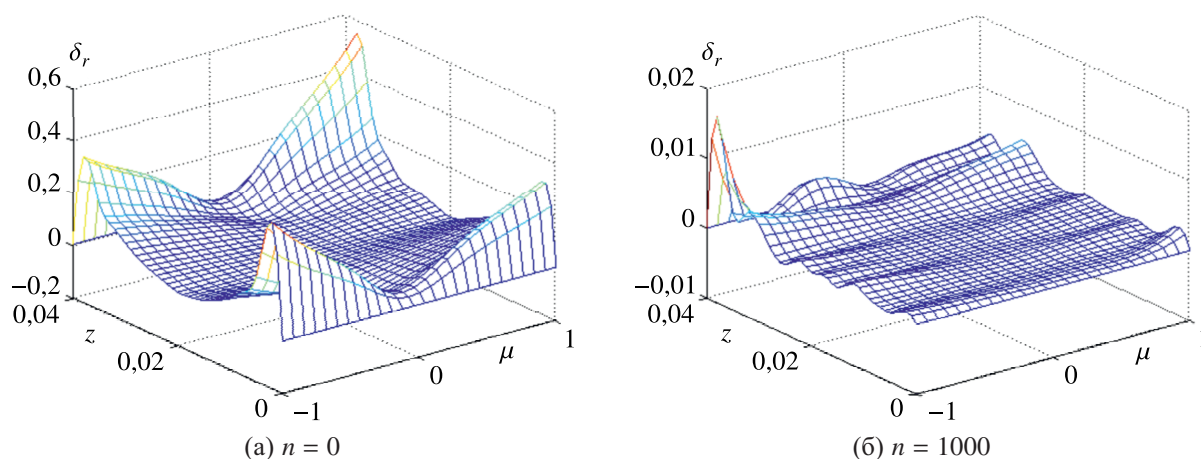


Рис. 5. Структура относительной невязки δ_r уравнения (5) в начале и в конце метода установления с трехшаговыми итерациями для слоя RVC ETPI-CF-ULT. n — номер итерации. Начало параболическое. $k_R = 6$

вание относительной невязки уравнения на завершающих итерациях можно связать с имеющейся погрешностью аппроксимации.

Структура относительной невязки в расчетной области для начала и конца итераций с грубым начальным приближением показана на рис. 5. Следует отметить, что в расчетах наблюдалось некоторое увеличение невязки уравнения на границах слоя, вызванное использованием там односторонних трехточечных аппроксимаций второго порядка точности для пространственной производной уравнения (5). Такой вариант оказался не совсем удачным, и рост невязки можно было устранить использованием односторонней двухточечной аппроксимации первого порядка.

Однако расчет невязки не имеет никакого отношения к методу решению кинетического уравнения (5), в котором для аппроксимации пространственных производных во внутренних точках расчетной области применяется противопоточная схема. Непосредственно в точках границы это уравнение не решается, поскольку там выставляются граничные условия. Он никак не влияет на сходимость метода и в основной части расчетной области, где, как это видно из таблицы 1, относительная невязка уравнения падает при итерациях на два порядка, а абсолютная — более чем на три.

Длительность одной итерации метода с расчетом всех невязок и прочей информации тестового плана на процессоре Intel® Core™ i5-3337U CPU1,8 GHz составляла примерно 7 с и 13 с при $k_R = 6$ и 8 соответственно. Без этого время одного шага решения собственно задачи (5), (6) уменьшается примерно вдвое.

5. Заключение

В работе проанализированы некоторые проблемы, возникающие при разработке численных методов решения задач с линейным кинетическим уравнением переноса. Перечислены существующие приложения такого рода уравнения. Даны основные определения и приведены традиционные ограничения, применяемые в задачах переноса излучения. Рассмотрены некоторые особенности постановки задач радиационного переноса для плоских слоев нерегулярных гетерогенных композиционных материалов, частично прозрачных для электромагнитного излучения. Указаны основные подходы к численному и численно-аналитическому решению линейного кинетического уравнения переноса.

Для кинетических задач переноса излучения в плоском слое, имеющих важное значение для экспериментальной практики, были исследованы четыре различных численных метода решения (сеточные явные методы: одношаговый, предиктор – корректор, оригинальный трехшаговый

метод, а также метод «предиктор – корректор» с явной реализацией корректора на основе интегральной формы уравнения переноса). Для трех из них был разработан необходимый набор программ, а в работе представлены результаты целого ряда расчетов, логически связанных между собой.

Проанализированы проблемы некоторых одно- и двухшаговых вариантов явных итерационных методов, для которых установлены причины отсутствия устойчивости и сходимости. Показано, что в явном консервативном одношаговом методе для слоя однородной поглощающей, но не излучающей и не рассеивающей среды в спектре гармонических решений всегда существуют неустойчивые моды. Они возникают в области излучения, распространяющегося почти параллельно границам слоя, а их неустойчивость усиливается с ростом эффектов ослабления среды и обусловлена наличием в уравнении переноса малого коэффициента перед пространственной производной.

Для ограничения нежелательного влияния этой компоненты рассмотрены различные варианты расщепления уравнения на два и три дробных шага. Для варианта двухшагового метода, шаг «предиктор» которого реализовывал явное выражение искомой функции через уже рассчитанные значения на основе интегральной формы уравнения переноса излучения в плоском слое, была установлена принципиальная невозможность обеспечения сходимости. Она возникает как при явной, так и неявной итерационной реализации шага корректора.

Показано, что наиболее предпочтительными методами являются явные варианты с разностной организацией дробных шагов, для которых представлено доказательство устойчивости и сходимости, основанное на теореме Лакса об эквивалентности. При решении кинетических задач переноса в средах с высоким альбедо рассеяния наиболее простым и эффективным оказался явный сеточный метод установления с расщеплением итераций на три дробных шага по физическим процессам. Показано, что он обладает дополнительным запасом устойчивости по сравнению с аналогичным двухшаговым методом «предиктор – корректор». Метод реализован на языке Matlab в виде кода, который в процессе получения численного решения осуществляет контроль его качества.

Представлены наиболее интересные результаты моделирования, не только имеющие практическое значение, но и подтвердившие, что трехшаговый метод предъявляет сравнительно умеренные требования по ресурсам, точности численного интегрирования и обеспечивает условную сходимость итераций. Его математическая корректность подтверждена поведением невязок уравнения, прямым контролем сходимости численных решений, физическая – обеспечением для эргодических систем свойством сходимости к инвариантному стационарному состоянию, не зависящему от начальных условий. Перечислены некоторые обнаруженные и возможные ограничения метода.

Работа продемонстрировала, как выстраивание последовательности дробных шагов явных методов решения нестационарной кинетической задачи переноса способно обеспечивать их дополнительную стабилизацию, если оно учитывает особенности имеющихся физических процессов.

Список литературы (References)

- Алифанов О. М., Черепанов В. В. Методы исследования и прогнозирования свойств высокопористых теплозащитных материалов. — М.: МАИ, 2014. — 264 с.
Alifanov O. M., Cherepanov V. V. Metody issledovaniya i prognozirovaniya svoystv visokoporistikh teplozashchitnikh materialov [Methods for studying and predicting the properties of highly porous heat-protective materials]. — Moscow: MAI Publ. House, 2014. — 264 p. (in Russian).
- Апресян Л. А., Кравцов Ю. А. Теория переноса излучения. Статистические и волновые аспекты. — М.: Наука, 1983. — 216 с.
Aprisyanyan L. A., Kravtsov Yu. A. Teoriya perenosa izlucheniya. Statisticheskie i volnovye aspekty [Theory of radiation transfer. Statistical and wave aspects]. — Moscow: Nauka, 1983. — 216 p. (in Russian).

- Басс Л. П., Николаева О. В.* Улучшенная схема расчета переноса излучения в сильно гетерогенных средах и пустотах // Математическое моделирование. — 1997. — Т. 9, № 10. — С. 63–72.
Bass L. P., Nikolaeva O. V. Uluchshennaya schema rascheta perenosa izlucheniya v silno geterogennikh sredakh i pustotakh [Improved calculation scheme for radiation transfer in highly heterogeneous media and voids // Mathematical Modeling. — 1997. — Vol. 9, No. 10. — P. 63–72 (in Russian).
- Богомолов С. В., Звенков Д. С.* Явный метод частиц, не сглаживающий газодинамические разрывы // Математическое моделирование. — 2006. — Т. 19, № 3. — С. 74–86.
Bogomolov S. V., Zvenkov D. S. Yavnyi metod chastitc, ne sglazhivaushchij gasodinamicheskie razrivy [An explicit particle method that does not smooth out gas-dynamic discontinuities] // Mathematical Modeling. — 2006. — Vol. 19, No. 3. — P. 74–86 (in Russian).
- Владимиров В. С.* Численные методы решения кинетического уравнения для сферы // Вычислит. матем. — 1958. — Т. 3. — С. 3–33.
Vladimirov V. S. Chislennie metody resheniya kineticheskogo uravneniya dlya sfery [Numerical methods for solving the kinetic equation for a sphere] // Num. Math. — 1958. — Vol. 3. — P. 3–33 (in Russian).
- Жидков Е. П., Лобанов Ю. Ю., Рушай В. Д.* Применение метода Ромберга для повышения точности вычисления кратных интегралов // Ж. вычислит. мат. и математич. физики. — 2009. — Т. 49, № 2. — С. 232–240.
Zhidkov E. P., Lobanov Yu. Yu., Rushai V. D. Primenenie metoda Romberga dlya povisheniya tochnosti vichisleniya kratnikh integralov [Application of Romberg's method to improve the accuracy of calculating multiple integrals] // Comp. Math. Mathematical Phys. — 2009. — Vol. 49, No. 2. — P. 232–240. (in Russian).
- Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П.* Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. — М.: Наука, 1966. — 688 с.
Zeldovich Ja. B., Rizer Yu. P. Fizika udarnikh voln i visokotemperaturnikh gidrodinamicheskikh yavlenij [Physics of shock waves and high-temperature hydrodynamic phenomena]. — Moscow: Nauka, 1966. — 688 p. (in Russian).
- Ковеня В. М., Яненко Н. Н.* Метод расщепления в задачах газовой динамики. — Новосибирск: Наука, 1981. — 304 с.
Kovenya V. M., Yanenko N. N. Metod raschepleniya v zadachakh gazovoj dinamiki [Splitting method in gas dynamics problems]. — Novosibirsk: Nauka, 1981. — 304 p. (in Russian).
- Кольчужкин А. М., Учайкин В. В.* Введение в теорию прохождения частиц через вещество. — М.: Атомиздат, 1978. — 257 с.
Kolchuzhkin A. M., Uchaikin V. V. Vvedenie v teoriyu prokhozheniya chastitc cherez veshchestvo [Introduction to the theory of the particles passage through matter]. — Moscow: Atomizdat, 1978. — 257 p. (in Russian).
- Лебедев В. И.* О квадратурах на сфере // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1976. — Т. 16, № 2. — С. 293–306.
Lebedev V. I. O kvadraturakh na sfere [About quadratures on the sphere] // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 1976. — Vol. 16, No. 2. — P. 293–306 (in Russian).
- Марчук Г. И.* Методы вычислительной математики. — М.: Наука, 1977. — 456 с.
Marchuk G. I. Metody vichislitelnoj matematiki [Methods of computational mathematics]. — Moscow: Nauka, 1977. — 456 p. (in Russian).
- Марчук Г. И., Лебедев В. И.* Численные методы в теории переноса нейтронов. — М.: Атомиздат, 1981. — 457 с.
Marchuk G. I., Lebedev V. I. Chislennye metody v teorii perenosa neitronov [Numerical methods in neutron transport theory]. — Moscow: Atomizdat, 1981. — 457 p. (in Russian).
- Соболев В. В.* Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет. — М.: ГИТТЛ, 1956. — 392 с.
Sobolev V. V. Perenos luchistoj energii v atmosferakh zvezd i planet [Transfer of radiant energy in the atmospheres of stars and planets]. — Moscow: SPHTTL, 1956. — 392 p. (in Russian).
- Суржиков С. Т.* Тепловое излучение газов и плазмы. — М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2004. — 544 с.
Surjikov S. T. Teplovoe izluchenie gazov i plazmy [Thermal radiation of gases and plasma]. — Moscow: BMSTU Publ. House, 2004. — 544 p. (in Russian).
- Bellomo N., Bellouquid A., Tao Y., Winkler M.* Toward a mathematical theory of Keller–Segel models of pattern formation in biological tissues // Math. Models Methods Appl. Sci. — 2015a. — Vol. 25. — P. 1663–1763.
- Bellomo N., Elaiw A., Althiabi A. M., Alghamdi M. A.* On the interplay between mathematics and biology: Hallmarks toward a new systems biology // Phys. Life Rev. — 2015b. — Vol. 12. — P. 44–64.

- Bressloff P. C.* Stochastic processes in cell biology. — Cham: Springer, 2014. — 688 p.
- Chandrasekhar S.* Radiative transfer. — London, Oxford: Clarendon Press, 1950. — 405 p.
- Ceiz K. M., Zweifel P. F.* Linear transport theory. — Reading, Massachusetts, Palo Alto, London, Don Mills, Ontario: Addison-Wesley Publ. Co., 1967. — 342 p.
- Cercignani C.* Theory and application of the Boltzmann equation. — Edinburgh, London: Scottish academic press, 1975. — 415 p.
- Chai J. C., Lee H. S., Patankar S. V.* Finite volume method for radiation heat transfer // *J. Thermophys. Heat Transfer.* — 1994. — Vol. 8, No. 3. — P. 419–425.
- Coelho P. J.* Advances in the discrete ordinates and finite volume methods for the solution of radiative heat transfer problems in participating media // *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer.* — 2014. — Vol. 145. — P. 121–146.
- Coelho P. J., Carvalho M. G.* A conservative formulation of the discrete transfer method // *J. Heat Transfer.* — 1997. — Vol. 119, No. 1. — P. 118–128.
- Duderstadt J. J., Martin W. M.* Transport theory. — New York: Wiley, 1979. — 623 p.
- Erban R., Othmer H. G.* From signal transduction to spatial pattern formation in *E. coli*: A paradigm for multiscale modeling in biology // *Multiscale Model. Simul.* — 2005. — Vol. 3. — P. 362–394.
- Heizler S. I.* The asymptotic telegrapher's equation (P_1) approximation for time-dependent, thermal radiative transfer // *Transp. Theory Stat. Phys.* — 2012. — Vol. 41. — P. 175–199.
- Howell J. R.* Application of Monte Carlo to heat transfer problems // *Adv. Heat Transfer.* — 1969. — Vol. 5. — P. 1–54.
- Howell J. R.* The Monte Carlo method in radiative heat transfer // *J. Heat Transfer.* — 1998. — Vol. 120, No. 3. — P. 547–560.
- Howell J. R., Siegel R., Mengüç M. P.* Thermal radiation heat transfer. — 5th Ed. — New York: Taylor & Francis Group, 2010. — 860 p.
- Killeen J.* (ed.) Controlled fusion. — Methods in computational physics. Advances in research and applications. — Vol. 16. — New York, San Francisco, London: Academic Press, 1976. — 450 p.
- Körner C., Bergmann H. W.* The physical defects of the hyperbolic heat conduction equation // *Appl. Phys. A.* — 1998. — Vol. 67. — P. 397–401.
- Larsen E. W., Morel J. E.* Advances in discrete-ordinates methodology // *Nuclear computational science: a century in review* / Y. Azmy, E. Sartori (eds.). — New York: Springer, 2010. — P. 1–82.
- Lax P. D., Richtmyer R. D.* Survey of the stability of linear finite difference equations // *Communications Pure and Appl. Math.* — 1956. — Vol. 9, No. 2. — P. 267–293.
- Lewis E. E., Miller W. F. Jr.* Computational methods of neutron transport. — New York: Wiley, 1984. — 401 p.
- Maruyama S., Aihara T.* Radiation heat transfer of arbitrary three-dimensional absorbing, emitting and scattering media and specular and diffuse surfaces // *J. Heat Transfer.* — 1997. — Vol. 119, No. 1. — P. 129–136.
- McClarren R. G.* Theoretical aspects of the simplified P_N equations // *Transp. Theory Stat. Phys.* — 2011. — Vol. 39. — P. 73–109.
- McClarren R. G., Holloway J. P., Brunner T. A.* Analytic P_1 solutions for time-dependent, thermal radiative transfer in several geometries // *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer.* — 2008. — Vol. 109. — P. 389–403.
- Modest M. F.* Radiative heat transfer. — 3rd Ed. — New York: Elsevier, 2013. — 883 p.
- Othmer H. G., Dunbar S. R., Alt W.* Models of dispersal in biological systems // *J. Math. Biol.* — 1988. — Vol. 26. — P. 263–298.

- Othmer H. G., Xue C.* The mathematical analysis of biological aggregation and dispersal: progress, problems and perspectives // Dispersal, Individual movement and spatial ecology: a mathematical perspective / M. A. Lewis, P. K. Maini, S. V. Petrovski (eds.). — Berlin: Springer, 2013. — P. 79–127.
- Özişik M. N.* Radiative transfer and interaction with conduction and convection. — New York, London, Sydney, Toronto: John Wiley and Sons, 1973. — 575 p.
- Pomraning G. C.* The equations of radiation hydrodynamics. — Oxford: Pergamon Press, 1973. — 288 p.
- Potter D.* Computational physics. — London, New York, Sydney, Toronto: Wiley, 1973. — 304 p.
- Rukolaine S. A., Chistiakova O. I.* Probing the D_1 approximation to the linear Boltzmann equation in 3D // Int. J. Heat Mass Transfer. — 2016. — Vol. 95. — P. 7–14.
- Rukolaine S. A., Vasilyev M. G., Yuferev V. S., Galyukov A. O.* Numerical solution of axisymmetric radiative transfer problems in arbitrary domains using the characteristic method // J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer. — 2002. — Vol. 73. — P. 205–217.
- Xue C., Othmer H. G.* Multiscale models of taxis-driven patterning in bacterial populations // SIAM J. Appl. Math. — 2009. — Vol. 70. — P. 133–167.