КОМПЬЮТЕРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ
И МОДЕЛИРОВАНИЕ 2026 Т. 18 № 5 С. 1309–1328
DOI: 10.20537/2076-7633-2026-18-5-1309-1328

Ки&М

АНАЛИЗ И МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛОЖНЫХ ЖИВЫХ СИСТЕМ

УДК: 519.6

Об одном методе неинвазивной оценки фракционного резерва кровотока и его реализации в программном комплексе FlowVision

А. А. Аксёнов[1], Т. Н. Веселова[2], Е. Р. Благосклонова[3], А. В. Гаврилов[4], М. Ю. Лимарева[5], А. И. Лобанов[5,6], Т. С. Сухинина[2], С. К. Терновой[2,7], Ю. В. Фишер[5,a]

[1]Объединенный институт высоких температур РАН,
Россия, 125412, г. Москва, ул. Ижорская, д. 13
[2]Институт клинической кардиологии им. А. Л. Мясникова, ФГБУ «Национальный медицинский исследовательский центр кардиологии имени академика Е. И. Чазова» Минздрава России,
Россия, 121552, г. Москва, ул. Академика Чазова, д. 15а
[3]Общество с ограниченной ответственностью «Гаммамед-Софт»,
Россия, 127473, г. Москва, 3-й Самотечный пер., д. 11, стр. 1
[4]Научно-исследовательский институт ядерной физики им. Д. В. Скобельцына Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова,
Россия, 119991, г. Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 58
[5]ООО «ТЕСИС»,
Россия, 127083, г. Москва, ул. Юннатов, д. 18, оф. 705
[6]Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет),
Россия, 141701, г. Долгопрудный, Институтский переулок, д. 9
[7]ФГАОУ ВО Первый Московский государственный медицинский университет им. И. М. Сеченова МЗ РФ (Сеченовский университет),
Россия, 109074, г. Москва, Славянская площадь, д. 4, стр. 1

E-mail: [a] jf@flowvision.ru

Получено 14.07.2025, после доработки — 02.10.2026.
Принято к публикации 05.10.2026.

В работе рассматривается вариант метода неинвазивной оценки фракционного резерва кровотока, заключающийся в численном моделировании течения крови в коронарных артериях. Для проведения расчетов используется отечественный программный комплекс FlowVision. Комплекс основан на конечно-объемной аппроксимации уравнений движения жидкости и газа.

В рамках расчетов имеется возможность использовать стационарные (осредненные по времени) математические модели течения крови, учитывать нестационарные эффекты, связанные с пульсовыми волнами. С этой целью в уравнения гемодинамики добавлены слагаемые, описывающие искусственную сжимаемость.

Оценивалась диагностическая эффективность выбранного варианта численного моделирования для определения фракционного резерва кровотока. Был использован ограниченный набор данных 10 пациентов в рамках международного бенчмарка. Полученные расчетные результаты сравнивались с данными инвазивных измерений и расчетными данными других коллективов. Для сравнений использовались опубликованные данные определения фракционного резерва кровотока на основе одномерных и трехмерных математических моделей. Гидродинамическая значимость стеноза с использованием программного комплекса FlowVision правильно определена в 9 случаях из 14.

Предварительные результаты демонстрируют возможность практического использования комплекса. Однако объемы выборки в рамках бенчмарка и с учетом данных реальных пациентов пока не позволяют сделать вывод о достоверности предсказания ФРК на основе расчетов.

Дальнейшие исследования должны быть направлены на повышение точности модели и расширение базы клинических данных для улучшения результатов диагностики.

Ключевые слова: фракционный резерв кровотока, математическая модель, коронарная артерия, искусственная сжимаемость, уравнения Навье – Стокса, численный метод, комплекс программ FlowVision

© 2026 Андрей Александрович Аксёнов, Татьяна Николаевна Веселова, Евгения Романовна Благосклонова, Андрей Васильевич Гаврилов, Мария Юрьевна Лимарева, Алексей Иванович Лобанов, Татьяна Сергеевна Сухинина, Сергей Константинович Терновой, Юлия Владимировна Фишер
Статья доступна по лицензии Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Unported License.
Чтобы получить текст лицензии, посетите веб-сайт http://creativecommons.org/licenses/by-nd/3.0/
или отправьте письмо в Creative Commons, PO Box 1866, Mountain View, CA 94042, USA.

COMPUTER RESEARCH AND MODELING
2026 VOL. 18 NO. 5 P. 1309–1328
DOI: 10.20537/2076-7633-2026-18-5-1309-1328

Ки&М

ANALYSIS AND MODELING OF COMPLEX LIVING SYSTEMS

UDC: 519.6

About one method of non-invasive assessment of fractional reserve of blood flow and its implementation in the FlowVision software package

A. A. Aksenov[1], T. N. Veselova[2], E. R. Blagosklonova[3], A. V. Gavrilov[4], M. Yu. Limareva[5], A. I. Lobanov[5,6], T. S. Sukhinina[2], S. K. Ternovoy[2,7], Yu. V. Fisher[5,a]

[1]Joint Institute for High Temperatures RAS,
13 Izhorskaya st., Moscow, 125412, Russia
[2]A. L. Myasnikov Scientific research institute of clinical cardiology, E. I. Chazov National Medical Research Center of cardiology,
15a Academician Chazov st., Moscow, 121552, Russia
[3]Gammamed-Soft Ltd.,
11/1 3rd Samotechny Lane, Moscow, 127473, Russia
[4]Scobeltsyn Nuclear Physics Research Institute, Lomonosov Moscow State University,
1/58 Leninskie gory, Moscow, 119991, Russia
[5]TESIS LLC,
18/705 Unnatov st., Moscow, 127083, Russia
[6]Moscow Institute of physics and Technology (National Research University),
9 Institutsky line, Dolgoprudny, 141701, Russia
[7]First Moscow State Medical University,
4/1 Slavyanskaya square, Moscow, 109074, Russia

E-mail: [a] jf@flowvision.ru

Received 14.07.2025, after completion — 02.10.2026.
Accepted for publication 05.10.2026.

The paper considers a variant of the method of non-invasive estimation of fractional flow reserve (FFR), based on the numerical modeling of the blood flow in the coronary arteries. The FlowVision software package is used for calculation. The software is based on a finite volume approximation of the continuous media motion equations.

As part of the calculations, it is possible to use both stationary (time-averaged) mathematical models of blood flow, so take into account the non-stationary effects associated with pulse waves. For this purpose, the artificial compressibility terms have been added to the hemodynamic equations.

The diagnostic efficiency of the selected variant of numerical modeling was evaluated to determine the fractional flow reserve. A limited data set of 10 patients was used as part of the international benchmark. The obtained calculated results were compared with the data of invasive measurements and calculated data of the other teams. For comparisons, published data were used to determine the FFR based on one-dimensional and three-dimensional mathematical models. Calculated hydrodynamic significance of the stenosis was correctly determined in 9 cases out of 14 using the FlowVision software.

Preliminary results demonstrate the feasibility of the software. However, the sample sizes within the framework of the benchmark and taking into account the data of the real patients do not yet allow us to conclude that the FFR prediction is reliable based on the calculations.

Further research should focus on improving the accuracy of the model and expanding the clinical database to improve diagnostic outcomes.

Keywords: fractional flow reserve, mathematical model, coronary artery, artificial compressibility, Navier – Stokes equations, numerical method, FlowVision software

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2026, vol. 18, no. 5, pp. 1309–1328 (Russian).

© 2026 Andrey A. Aksenov, Tatyana N. Veselova, Evgenia R. Blagosklonova, Andrey V. Gavrilov, Maria Yu. Limareva, Alexey I. Lobanov, Tatyana S. Sukhinina, Sergey K. Ternovoy, Yulia V. Fisher
This work is licensed under the Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Unported License.
To view a copy of this license, visit http://creativecommons.org/licenses/by-nd/3.0/
or send a letter to Creative Commons, PO Box 1866, Mountain View, CA 94042, USA.

Используемые сокращения

АД — артериальное давление,
ДА — диагональная артерия,
КА — коронарная артерия,
КАГ — коронароангиография,
КТ — компьютерная томография,
ОА — огибающая артерия,
ОДУ — обыкновенное дифференциальное уравнение,
ПК — программный комплекс,
ПКА — правая коронарная артерия
ПМЖВ — передняя межжелудочковая ветвь,
ФГБУ «НМИЦК им. академика Е. И. Чазова» Минздрава России — Федеральное государственное бюджетное учреждение национальный медицинский исследовательский центр кардиологии имени академика Е. И. Чазова Минздрава России,
ФРК — фракционный резерв кровотока,
FDA — Food and Drug Administration,
FFR — fractional flow reserve (фракционный резерв кровотока).

1. Введение

Фракционный резерв кровотока (ФРК, FFR) — один из гемодинамических индексов, позволяющий определять вероятность ишемии миокарда. Он представляет собой отношение давления дистальнее (ниже по течению) стеноза к давлению проксимальнее (выше по течению) стеноза. На практике в качестве давления проксимальнее стеноза часто используется значение давления в аорте. «Золотым стандартом» определения функциональной значимости стенозов коронарных артерий является измерение ФРК во время проведения инвазивной коронароангиографии (КАГ). Эта методика основана на измерении трансстенотического градиента в условиях максимальной гиперемии с использованием одноразового датчика давления [Tonino et al., 2009; Балахонова и др., 2024; Гогниева и др., 2018].

ФРК определяется в сравнительно крупных кровеносных сосудах — коронарных артериях. Для артериального дерева характерны развитые нестационарные течения, связанные с пульсовыми волнами. В окрестности стеноза, как и во всей сосудистой системе, давление меняется в зависимости от фазы сердечного цикла (во время систолы и диастолы).

Практически во всех научных коллективах, изучающих циркуляцию, было предложено использовать численное моделирование для снижения рисков для пациентов и удешевления процедуры определения ФРК. В [Taylor et al., 2013] подчеркивается, что использование компьютерной томографии в сочетании с методами вычислительной гидродинамики способно значительно удешевить процедуру оценки ФРК.

В СССР задача о течении крови в стенозированых сосудах впервые была поставлена О. М. Белоцерковским [Белоцерковский, 1984]. Имевшиеся тогда вычислительные ресурсы не позволяли рассмотреть задачу о циркуляции во фрагменте сосудистого дерева в подробной постановке.

Для расчета ФРК используются нульмерные (точечные), одномерные и трехмерные математические модели циркуляции. Точечные математические модели циркуляции представляют собой системы ОДУ или алгебраических уравнений большой размерности. В соответствие дереву коронарных сосудов ставится ациклический граф. Сосудистое дерево рассматривается по аналогии с электрической цепью. Каждое ребро графа характеризуется расходом жидкости (аналог

тока), разностью давлений (аналог напряжения) и гидродинамическим сопротивлением. В узлах графа выполняется закон Кирхгофа. Примеры описания сосудистого дерева на основе таких аналогий приведены в [Morris et al., 2015; Vassilevski et al., 2020]. В приложениях встречаются также комбинации нульмерных и одномерных математических моделей, например [Carson et al., 2019a].

Одномерные математические модели циркуляции основаны на осреднении уравнений Навье – Стокса (или других математических моделей сплошной среды) по сечению сосуда. В качестве основных переменных в таких моделях выступают локальная скорость течения среды (крови) и диаметр сосуда (или площадь его поперечного сечения). Зависимость площади поперечного сечения от локального давления имеет смысл уравнения состояния. Математические модели такого типа развиты в [Gamilov et al., 2015; Гогниева и др., 2018; Simakov et al., 2016]. Одномерные математические модели в настоящее время используются в клинической практике для оценки функциональной значимости стенозов [Gognieva et al., 2021].

На основе одномерных моделей удается оценить не только основные гемодинамические индексы, но и исследовать влияние многих других факторов. Так, в [Ge et al., 2020] на основе исследования математических моделей показано, что ухудшение состояния аортального клапана привело к легкому увеличению ФРК при фиксированной степени тяжести стеноза коронарной артерии. В [Ge et al., 2021] на основе одномерного моделирования гемодинамики сделан вывод, что ФРК, и другой гемодинамический индекс — коронарный резерв кровотока, часто применяемые при оценке функциональной тяжести стеноза, хорошо оценивают функциональную тяжесть стеноза. В ряде случаев преимущество имеет ФРК, второй индекс также имеет свои преимущества в некоторых случаях.

В работах Г. В. Кривовичева проанализированы эффекты, возникающие в одномерных математических моделях циркуляции при учете сложной реологии жидкости [Krivovichev, 2021]. Показано, что учет реалистических реологических соотношений для крови меняет результат для расходов и давлений в одномерных моделях в пределах нескольких процентов (от 2 до 10), что, как правило, значительно меньше точности определения входных параметров модели (например, скоростей кровотока, измеренных с помощью доплерографии). Кроме того, при задании уравнения состояния невозможно точно оценить скорость распространения пульсовых волн в коронарных артериях.

Анализ влияния реологических эффектов для трехмерных течений [Skiadopoulos et al., 2017] показывает, что и в этом случае разница между результатами расчетов с использованием модели ньютоновской жидкости и моделей реологически сложных жидкостей несущественна.

В большинстве работ по моделированию циркуляции на основе одномерных математических моделей используются явные численные методы. В [Gamilov et al., 2015; Гогниева и др., 2018; Gognieva et al., 2021] использован вариант сеточно-характеристического численного метода [Симаков, Холодов, 2008]. Для реализации сетевых моделей [Carson et al., 2019a] разработан специальный неявный численный метод [Carson, Van Loon, 2017].

Трехмерные математические модели, как правило, опираются на решение уравнений Навье – Стокса в области сложной формы. Область представляет собой фрагмент системы коронарных артерий, полученный с помощью обработки данных компьютерной томографии [Терновой и др., 2020]. Как правило, при многомерном моделировании используется стационарное приближение для уравнений Навье – Стокса. Выбор такого приближения диктуется трудностями корректного учета локальной реакции сосудистой стенки на изменение давления в сосуде при распространении пульсовой волны.

Другой подход к вычислению ФРК представляет собой использование трехмерной реконструкции сосудистого дерева. Используются данные либо компьютерной томографии (КТ), либо данные внутрисосудистой ультразвуковой ангиографии. Сравнение этих подходов для задачи

определения ФРК приведено в [Bulant et al., 2017]. Затем в области сложной формы решаются уравнения Навье – Стокса, откуда определяются давления проксимальнее и дистальнее стеноза. Примером такого подхода может служить работа [Morris et al., 2013]. Упомянутый подход рекомендован для использования в клинической практике [Newman et al., 2023]. Первоначально для решений уравнений Навье – Стокса авторами использовался промышленный пакет Ansys [Morris et al., 2013], но затем авторами был разработан собственный конечноэлементный солвер [Blanco et al., 2018; Newman et al., 2023; Morris et al., 2017]. Аналогичные подходы для неинвазивной оценки ФРК с использованием Ansys применяются и другими исследовательскими группами [Hashemi et al., 2022].

В большинстве моделей на выходе дерева ставятся условия Неймана [Blanco et al., 2018]. В [Morris et al., 2013; Taylor et al., 2013] в качестве граничных условий брались данные расчетов с использованием разностной схемы более низкого порядка.

В [Blanco et al., 2018] приведены результаты сравнения оценок ФРК с помощью одномерных и трехмерных математических моделей. Авторы заключают, что 1D-модели точно воспроизводят оценки ФРК, полученные с помощью 3D-моделей. Этот факт имеет значение для подхода к вычислительной оценке ФРК. Для сравнения была использована выборка из 20 пациентов, были построены 29 трехмерных геометрических моделей артериальных деревьев, 9 полученные с помощью коронарной компьютерной томографии (КТ) и 20 с помощью внутрисосудистой ультразвуковой ангиографии. Для обеих (3D и 1D) моделей использованы одинаковые граничные условия расхода и давления на входе. В условиях 1D потери давления при стенозах и бифуркациях учитывались с помощью конкретных сосредоточенных моделей.

Дальнейшие сравнения разных методик проводились на данных выборки из 10 пациентов [Carson et al., 2019b]. Использовалась одна 3D-методика [Morris et al., 2013] и три различные 1D-методики из Бразилии, России и Китая. Сравнение на представленной выборке показывает, что все методики дают удовлетворительное совпадение с результатами инвазивных измерений. В статье также отмечены трудности, связанные с построением пациент-ориентированных моделей. Как правило, они вызваны неудовлетворительным качеством входной информации (например, сбоями аппаратуры при проведении КТ) и сильным кальцинозом сосудов. Подробно проблемы, связанные с пациент-ориентированными моделями, рассмотрены в [Василевский и др., 2022].

Разумную альтернативу трехмерным стационарным математическим моделям представляет использование решения нестационарной системы уравнений механики сплошной среды с добавлением искусственной сжимаемости для корректного учета конечной скорости распространения пульсовых волн в системе коронарных сосудов. Подобная методика использована в данной работе для расчета функциональной значимости стеноза в индивидуальных моделях пациентов [Балахонова и др., 2024] в ФГБУ «НМИЦ кардиологии имени академика Е. И. Чазова» Минздрава России.

2. Материалы и методы

При численном решении задачи для нестационарных уравнений Навье – Стокса использован программный комплекс FlowVision [Аксенов, 2017]. Для применения к медицинским задачам проведены валидационные расчеты с использованием ПК FlowVision для двух тестовых задач FDA — о движении крови в сопле [Калугина и др., 2023] и насосе для перекачки крови [Аксёнов и др., 2023].

В качестве тестового набора данных использованы данные пациентов [Carson et al., 2019b], играющие роль бенчмарка для неинвазивного определения ФРК. Отметим, что тестирование различных методик, описанных в цитируемой работе, показывает, что математическое моделирование сходным образом определяет ФРК для всех классов используемых моделей.

Часть расчетов проводилась на кластере HPC4, находящемся в многофункциональном вычислительном комплексе (МФК) НИЦ «Курчатовский институт».

3. Математическая модель

При численном решении задачи для нестационарных уравнений Навье – Стокса использован программный комплекс FlowVision [Аксенов, 2017]. Этот комплекс основан на конечно-объемном подходе к аппроксимации уравнений движения жидкости и газа. Используется автоматическое построение расчетной сетки, основанное на методе подсеточного разрешения геометрических особенностей. Расчетная сетка вдали от границ декартовая. Около границ она превращается в неструктурированную сетку с ячейками в виде произвольных многогранников. Алгоритм построения таких ячеек-многогранников включает в себя следующие последовательные шаги. Осуществляется поиск ячеек, пересекающих границы расчетной области (фасеточной поверхности). Далее родительская ячейка делится на несколько объемов, ограниченных гранями соседних ячеек и фасетами поверхности. Определяются геометрические характеристики таких объемов и маркируются мелкие ячейки с объемом меньше 0,2 объема родительской. После чего такие ячейки удаляются, а их границы передаются соседним ячейкам [Aksenov et al., 1996]. Расчетная сетка адаптируется к геометрическим особенностям расчетной области локально и динамически. Адаптация происходит делением каждой ячейки на восемь одинаковых по размеру ячеек (каждое ребро делится пополам, первый уровень адаптации). В случае использования более высоких уровней адаптации n каждое ребро ячейки начальной сетки разбивается на 2^n отрезков.

Кровь считалась вязкой жидкостью. Для сравнительно крупных сосудов с большой скоростью тока, в частности коронарного дерева, неньютоновские эффекты имеют небольшое значение. Для моделирования движения вязкой сжимаемой жидкости использовались уравнения Навье – Стокса:

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u}\nabla)\boldsymbol{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla P + \nu\Delta\boldsymbol{u}. \tag{1}$$

Здесь $\boldsymbol{u}$ — скорость движения среды, ρ — плотность крови, P — давление, ν — коэффициент кинематической вязкости.

Геометрические характеристики коронарных сосудов получаются по данным КТ. Эти данные не содержат информации о движении стенок сосудов. Течение крови в коронарных артериях пульсирующее, на движение крови в сосуде влияют упругие свойства стенок. За счет локальной реакции сосудистой стенки на изменение давления в артерии возникает пульсовая волна. Непосредственное вычисление изменения площади поперечного сечения сосуда от локального изменения давления крайне сложно. Необходим учет механических свойства как сосудистых стенок, так и окружающих органов. Учесть их можно так же, как это сделано Н. Е. Жуковским при описании гидравлических ударов в трубах [Жуковский, 2021]. При локальном изменении давления в сосуде меняется его просвет. Для стационарных (не зависящих от времени) геометрических характеристик коронарного дерева такое изменение просвета формально можно трактовать как локальное изменение плотности крови в сечении. Действительно, массовый расход крови через переменное сечение сосуда можно представить в виде $Q_m = \rho S(t)v$. Для сосуда с постоянным сечением тот же расход можно представить как $Q_m = \rho(t)\widetilde{S}v$ и ввести зависимость «эффективной плотности» крови ρ:

$$\rho = \rho_b \frac{S}{\widetilde{S}}. \tag{2}$$

Здесь ρ_b — плотность крови, S и $\widetilde{S}$ — площадь поперечного сечения сосуда при среднем и текущем значениях давления P соответственно. Поскольку $\rho = \rho(P)$, то можно считать жидкость

сжимаемой со скоростью звука (распространения возмущений) $c = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}$. Для рассматриваемой модели эта характерная скорость и есть скорость пульсовой волны. Здесь мы пренебрегаем истинной скоростью звука в крови, так как она велика по сравнению со скоростью пульсовой волны.

Обычно скорость распространения пульсовой волны c достаточно хорошо оценивается, следовательно, можно обойтись без аккуратного ее расчета. Эта скорость индивидуальна, причем существенно зависит от возраста. У молодых людей она равна примерно 4–5 м/с, у пожилых — 6–8 м/с [Сагирова и др., 2020; Кочергина, Яскевич, 2021; Тучков и др., 2017]. Оценку скорости пульсовой волны можно получить с использованием интерполяционной формулы [Vassilevski et al., 2020; Василевский и др., 2015]:

$$c = \left(c_y + (age - age_y)\frac{c_{old} - c_y}{age_{old} - age_y}\right)\left(1 + \frac{P_{syst} - P_{norm}}{2(P_{hyp} - P_{norm})}\right). \tag{3}$$

Здесь c_y — 5 м/с, c_{old} — 6,50 м/с (для левой коронарной артерии у женщин 6 м/с), age_y — 20 лет, age_{old} — 80 лет, P_{norm} — 120 мм рт. ст., P_{hyp} — 220 мм рт. ст., P_{syst} — систолическое давление, age — возраст пациента.

Таким образом, численно решаются уравнения Навье – Стокса (1), дополненные уравнением неразрывности с учетом эффективной сжимаемости

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho divu = 0$$

и уравнением состояния, связывающим локальное давление и эффективную плотность:

$$P = \rho c^2.$$

Для решения уравнений реализованы неявные схемы конечных объемов [Аксенов, 2017].

Расчет фракционного резерва кровотока, т. е. отношения давления за стенозированным участком к давлению до стеноза, осуществлялся по формуле [Гогниева и др., 2018]:

$$\text{ФРК} = \frac{P_d}{P_0},$$

где P_d — давление, измеряемое в артерии за стенозированным участком (дистальнее стеноза); P_0 — давление, измеряемое до стенозированного участка (проксимальнее стеноза).

ФРК изменяется в диапазоне от 0 до 1. При значении ФРК $\geqslant$ 0,80 стеноз КА расценивали как гемодинамически незначимый, при ФРК $<$ 0,80 — гемодинамически значимый [Веселова и др., 2021]. Фракционный резерв кровотока имеет достаточно узкий диапазон допустимых значений в рамках нормы. При значении ФРК $<$ 0,75 стеноз, как правило, способен вызывать ишемию миокарда. Если ФРК превышает 0,80, то стеноз практически никогда не вызывает ишемию. В этом случае стентирование обычно не требуется [Барбараш и др., 2024].

4. Сетка и граничные условия

Для некоторых пациентов не было возможности восстановить полную геометрическую модель исследуемого участка, поскольку КА была отделена от аорты. В связи с этим расчет ФРК для всех пациентов проводился в отдельной КА. При построении расчетной сетки соответствующая КА отделялась от аорты (рис. 1). Давление на входе в КА считалось равным давлению в аорте.



Рис. 1. Геометрическая модель КА (показан случай с отдельным расположением фрагмента аорты и КА)

Расчетная сетка строится с учетом поверхности сосудистого дерева. Внутри области используется кубическая расчетная сетка. Вблизи границ ячейки представляют собой многогранники произвольной формы. Минимальный размер расчетных ячеек (с учетом сгущения сетки) составляет 0,0375 мм, максимальный — 0,3 мм. Необходимые размеры подобраны по результатам исследования сходимости по сетке. Использовалось локальное сгущение около сосудистых бифуркаций и в окрестности стеноза. Расчетная сетка для разных вариантов насчитывает от 0,72 до 2,55 миллионов ячеек в зависимости от вида сосудистого дерева. Шаг по времени задавался так, чтобы число Куранта, определяемое по минимальному размеру расчетной ячейки, равнялось единице.

В качестве входных условий для коронарного дерева выбирается аппроксимация данных пациента [Carson, Van Loon, 2017] — зависимость от времени давления в коронарной артерии.

На выходе сосуда поставить корректное граничное условие практически невозможно, необходимо иметь модель циркуляции крови всего организма человека. Такие подходы описаны в литературе, в частности, когда для периферического кровообращения используется модель виндкесселя [Cao, Sucosky, 2017; Alimohammadi et al., 2014; Kim et al., 2010]. Для нее характерно использование гибридных подходов, объединяющих модели пониженного и полного порядка для быстрого расчета потока. В описанной методике расчета на выходе задавались статическое давление, соответствующее 12 мм. рт. ст. Предполагалось, что на выходе КА кровь попадает в систему микрососудов, где течение реализуется при постоянном давлении от 10 до 30 мм. рт. ст. [Каро и др., 1981]. При использовании модели стационарного течения несжимаемой жидкости граничные условия на выходе оказывают влияние на всю расчетную область. При использовании модели течения сжимаемой жидкости чувствительность к граничным условиям на выходе слабее, эти условия оказывают заметное влияние лишь в одном-двух сосудах вблизи выходных сечений.

На боковых стенках сосудов ставились условия прилипания $\boldsymbol{u} = 0$. Схема постановки ГУ и зависимость давления на входе в КА от времени (кусочно-линейная интерполяция) приведены на рис. 2. Фрагменты расчетной сетки, построенной для конкретного пациента, приведены на рис. 3. Показаны расчетные ячейки в различных сечениях (верхняя панель). На нижней левой панели приведен пример адаптации расчетной сетки в окрестности локального сужения сосуда.

5. Результаты расчетов в рамках бенчмарка

В рамках бенчмарка [Carson et al., 2019b] было предложено оценить диагностическую эффективность численного моделирования для определения ФРК, используя ограниченный набор

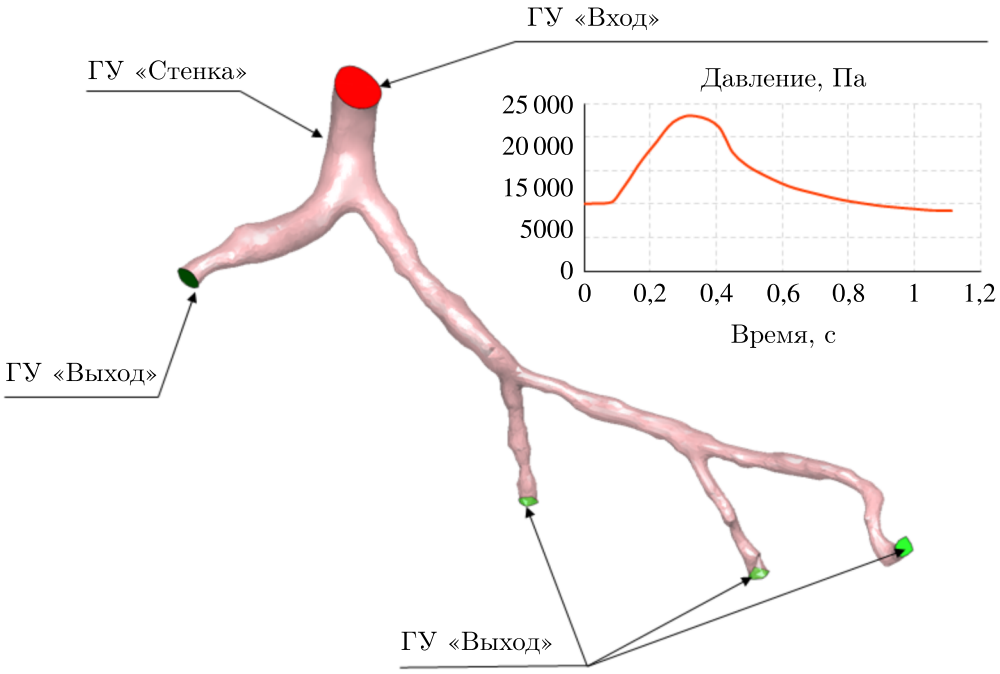


Рис. 2. Граничные условия. Давление на входе задавалось кусочно-линейной интерполяцией АД каждого пациента. Зависимость входного давления приведена на врезке к рисунку. Давление на выходе считалось постоянным и соответствовало 1596 Па (12 мм рт. ст). На стенках сосудов ставились условия прилипания

данных из 10 пациентов. В сравнительном исследовании приняли участие четыре научных коллектива из Бразилии, Великобритании, России и Китая. Три научных коллектива (коллективы № 1, 3 и 4, Бразилия, Китай и Россия соответственно) осуществляли расчеты с использованием моделей циркуляции с осреднением скорости по сечению сосуда (1D-модели), один (коллектив № 2, Великобритания) — на основе использования трехмерной стационарной модели Навье – Стокса с жесткими стенками. В цитируемой статье номер методики определения ФРК соответствовал номеру научного коллектива.

Для расчета фракционного резерва кровотока авторами [Carson et al., 2019b] была предоставлена информация о каждом пациенте, включающая в себя возраст пациента, частоту сердечных сокращений, артериальное давление в состоянии покоя (аортальное, плечевая артерия), рост, вес, индекс массы тела и пол. Информация о пациентах была анонимизирована и деидентифицирована перед отправкой исследовательским группам. КТА выполнялась каждому пациенту перед катетеризацией. Так же были известны особенности полученных изображений КТА, а именно наличие артефактов движения, кальцификаций, стентов.

Для оценки работоспособности подхода с применением ПК FlowVision на основе данных [Dataset: Supplementary Material, 2024] проведены аналогичные расчеты. Сравнение результатов методики с применением FlowVision с результатами [Carson et al., 2019b] проведено по всем параметрам.

Скорость пульсовой волны оценивалась при помощи интерполяционной формулы (3). Оценки на основе данных пациентов собраны в таблице 1.

Расчет величины ФРК проводился следующим образом. По табличным данным для каждого пациента линейной интерполяцией задавалась зависимость входного давления от времени (рис. 2). В качестве начальных условий задавались нулевое значение скорости, постоянная плотность, постоянное давление. Так как начальные и граничные условия несогласованны, то релаксационные процессы в системе устанавливаются за 2–3 сердечных цикла. ФРК оценивает-

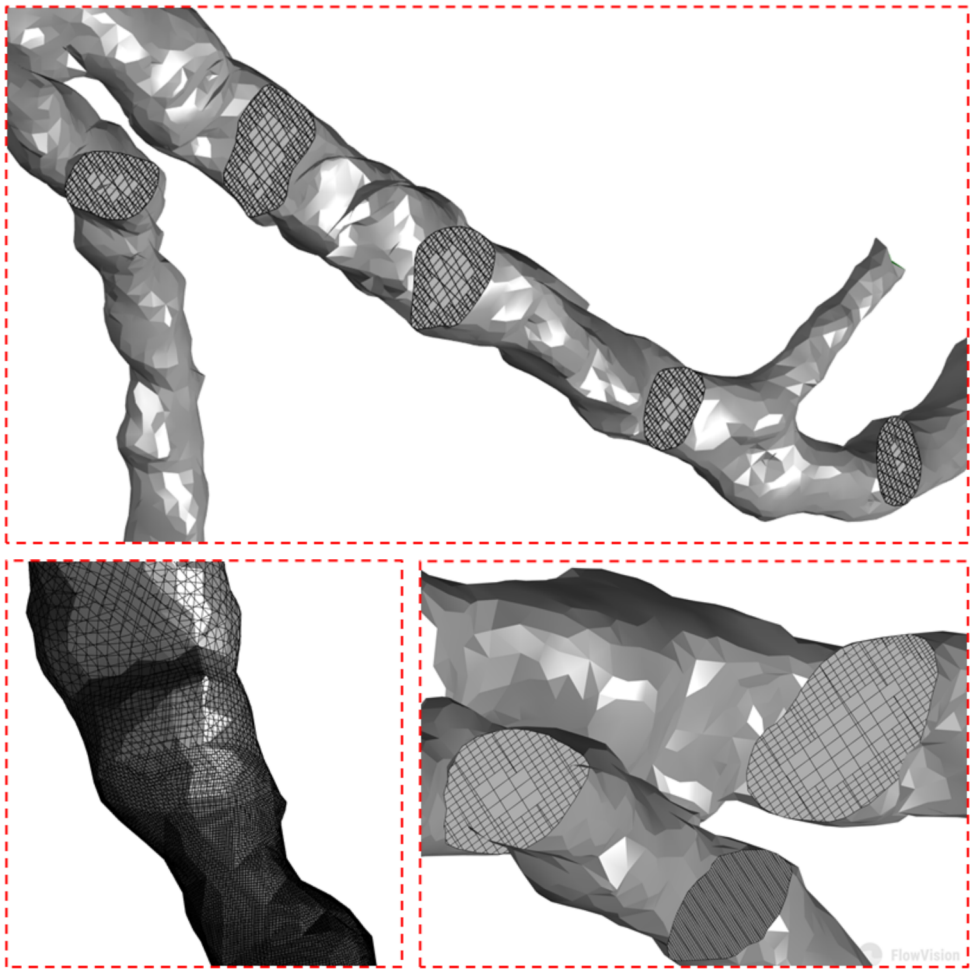


Рис. 3. Расчетная сетка, построенная для пациента № 4. Показаны фрагменты расчетной сетки в сечении КА, адаптация сетки в окрестности локального сужения сосуда и реконструкция поверхности сосуда

Таблица 1. Оценка скорости пульсовой волны по данным пациентов

	Возраст	Пол	Кальциноз	Коэффициент кальциноза	Систолическое давление, мм рт. ст.	Скорость пульсовой волны, м/с	$\frac{d\rho}{dP}$
1	80	Ж	–	1	174	7,62	0,0172
2	64	М	+	1,4	104	8,54	0,0137
3	57	Ж	+	1,4	187	11,07	0,0082
4	68	М	+	1,4	130	8,68	0,0133
5	52	Ж	+	1,4	138	7,75	0,0167
6	53	Ж	+	1,4	142	9,05	0,0122
6	53	Ж	+	1,4	142	9,05	0,0122
6	53	Ж	+	1,4	142	9,05	0,0122
7	56	М	+	1,4	140	8,26	0,0147
7	56	М	+	1,4	140	8,26	0,0147
8	50	М	–	1	133	5,75	0,0302
8	50	М	–	1	133	5,75	0,0302
9	66	М	+	1,4	111	8,61	0,0135
10	67	М	+	1,4	130	8,65	0,0134

ся по средним (по сечению сосуда) давлениям дистальнее и проксимальнее стеноза в течение четвертого расчетного сердечного цикла.

В таблице 2 представлены значения ФРК, полученные инвазивно (ФРК_инв), в ПК FlowVision (ФРК FV) и путем численного моделирования по трем методикам (ФРК методология1 – ФРК методология3), описанным в [Carson et al., 2019b]. Данные по результатам методологии 4 предоставлены по запросу.

Таблица 2. Сравнение инвазивных данных, ФРК, вычисленного с использованием FlowVision и результатами расчетов по другим методикам в рамках бенчмарка

Пациент	№ КА	КА	ФРК инв	ФРК FV	ФРК методология 1	ФРК методология 2	ФРК методология 3	ФРК методология 4
1	1	ПМЖВ	0,89	0,59	0,75	0,7	0,71	0,87
2	2	ПМЖВ	0,86	0,87	0,93	0,75	0,89	0,84
3	3	ПКА	0,88	0,84	0,81	0,95	0,85	0,83
4	4	ПМЖВ	0,82	0,71	0,85	0,59	0,84	0,78
5	5	ПМЖВ	0,82	0,93	0,85	0,77	0,71	0,95
6	6	Проксимальная часть ПМЖВ	0,9	0,89	0,96	0,97	0,97	0,92
6	7	Дистальная часть ПМЖВ	0,82	0,48	0,86	0,91	0,9	0,83
6	8	ДА	0,81	0,75	0,75	0,78	0,59	0,78
7	9	ПМЖВ	0,75	0,74	0,86	0,91	0,92	0,84
7	10	ОА	0,84	0,79	0,78	0,97	0,68	0,88
8	11	ПМЖВ	0,88	0,92	0,95	0,96	0,88	0,94
8	12	ОА	0,89	0,93	0,92	1	0,9878	0,95
9	13	ПМЖВ	0,83	0,87	0,89	0,95	0,89	0,92
10	14	ПМЖВ	0,72	0,75	0,8	0,68	0,87	0,69

По приведенным данным (таблица 2) видно, что путем инвазивных измерений гемодинамически значимый стеноз обнаружен лишь у двух пациентов (№ 7 и № 10). Гидродинамическая значимость стеноза с использованием ПК FlowVision правильно определена в 9 случаях из 14.

На рис. 4 приведены результаты сравнения значений ФРК, полученных численно с использованием FlowVision, с результатами расчетов с использованием других программных комплексов (методологии 1–4 из статьи [Carson et al., 2019b]) и инвазивными измерениями.

Два расчетных значения ФРК (для КА 1 и 7 таблицы 2), полученные с использованием ПК FlowVision, сильно отличаются от данных инвазивных измерений. Для этих случаев относительная погрешность превышает 50 %. Отметим, что и в том и в другом случаях ФРК определялось по данным, достаточно близким к выходному сечению. Никаких специальных приемов по сдвигу выходного сечения при обработке КТ не проводилось. Кроме того, у пациента 6 (КА № 7 по таблице 2) отмечен кальциноз сосудов, что влияет на качество КТ.

Очевидно, что выборка из 10 пациентов для определения ФРК недостаточна для проведения корректного статистического анализа результатов, тем более что гемодинамически значимый стеноз наблюдается лишь в 2 случаях из 14 в таблице 2. В [Carson et al., 2019b] тем не менее приведены результаты обработки данных вычисления ФРК по описанным в статье четырем методологиям. Для полноты сравнения представим аналогичные результаты и для нашей методики с использованием программного комплекса FlowVision. На рис. 5 приведен график корреляционного анализа ФРК, полученного инвазивно (ФРК_инв) и в результате численного моделирования

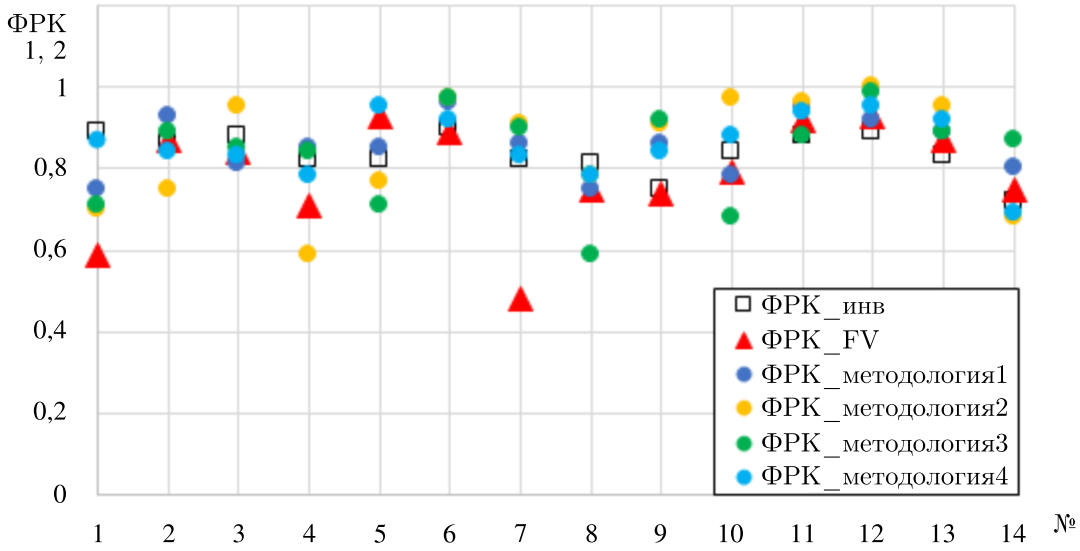


Рис. 4. Сравнение значений ФРК, полученных инвазивно (белые маркеры), полученных численно с использованием ПК FlowVision (красные маркеры) с результатами вычислений из работы [Carson et al., 2019b] для всех стенозов, представленных в таблице 1. Методология 1 — Бразилия, 1D-моделирование; методология 2 — Великобритания, 3D-моделирование; методология 3 и 4 — Китай и Россия соответственно, 1D-моделирование. Номер измерения (ось абсцисс) соответствует номеру КА таблицы 2

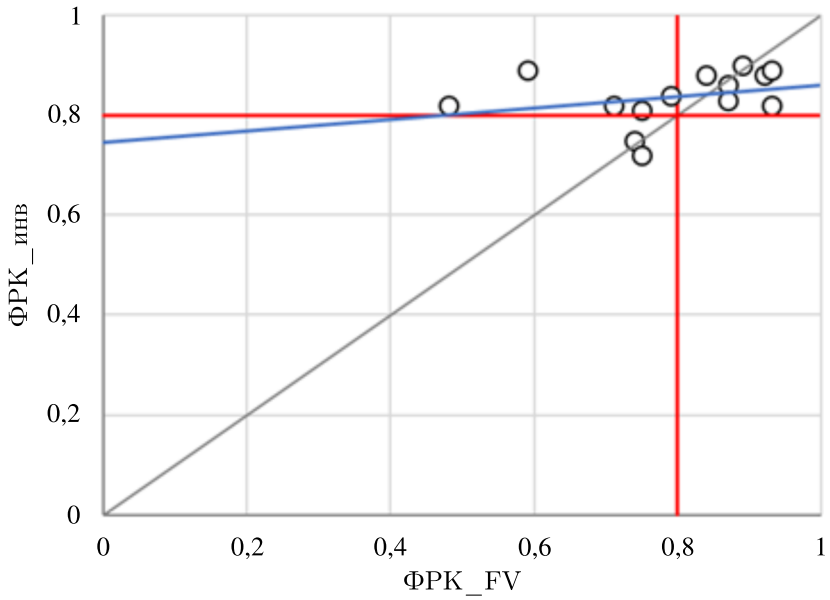


Рис. 5. Данные корреляционного анализа ФРК, оцененного с использованием ПК FlowVision. Диагностический порог 0,8 показан красными линиями, линейная корреляция — синей линией. Рисунок разделен на квадранты красной линией. Нижний левый квадрант соответствует истинно положительным прогнозам ФРК (гидродинамически значимый стеноз по данным FV соответствует значимому стенозу по данным инвазивных измерений), нижний правый — ложноположительным (гидродинамически значимый стеноз по данным FV соответствует гидродинамически незначимому стенозу по данным инвазивных измерений), верхний левый — ложноотрицательным (незначимый стеноз по данным FV соответствует значимому стенозу по данным инвазивных измерений), а верхний правый — истинно отрицательным (незначимый стеноз по данным FV соответствует незначимому стенозу по данным инвазивных измерений)

во FlowVision (ФРК_FV). Данные КА 1 и 7 таблицы 2 привели к появлению двух выпадающих из общей картины точек в ложноотрицательном квадранте.

Следует отметить, что результаты корреляционного анализа, представленные в оригинальной работе [Carson et al., 2019b], не дают полного представления о достоверности предсказания ФРК на основе расчетов. Для вычисленных коэффициентов корреляции не приведены их доверительные интервалы и p-значения, без которых в принципе корректная интерпретация результатов невозможна. Применение параметрических методов статистики, в том числе корреляции Пирсона, не рекомендуется на выборках малого объема. В таком случае предпочтение должно отдаваться непараметрическим методам. В рамках данной работы проведен корреляционный анализ значений ФРК, вычисленных как четырьмя ранее упомянутыми коллективами, так и с помощью предложенной технологии на основе Flow Vision посредством коэффициента ранговой корреляции Спирмана (табл. 3).

Таблица 3. Результаты корреляционного анализа на основе коэффициента ранговой корреляции Спирмана (вычисления выполнены в статистическом пакете IBM SPSS Statistics v.21)

Показатель	ФРК_FV	ФРК методология 1	ФРК методология 2	ФРК методология 3	ФРК методология 4
ρ Спирмана	0,425	0,394	0,534	0,265	0,576
95 % ДИ	(−0,129; 0,830)	(−0,254; 0,856)	(−0,065; 0,878)	(−0,402; 0,741)	(0,047; 0,869)
p-значение	0,130	0,163	0,049	0,36	0,031

Полученные результаты свидетельствуют об отсутствии статистически значимой линейной корреляции вычисленных значений ФРК с использованием всех методологий с инвазивно измеренными значениями. Для всех методологий было характерно включение в доверительный интервал нуля. Уровень значимости менее порогового значения $p_0 = 0{,}05$ имеет место для методологий 2 (трехмерная модель) и 4 (одномерная модель). В случае применения поправки на множественные сравнения данные результаты также нельзя будет считать статистически значимыми. Безусловно, широкие доверительные интервалы во многом обусловлены малым объемом выборки. Это подчеркивает необходимость дальнейших испытаний процедур вычисления ФРК с использованием большего числа реальных данных. По результатам публикации [Carson et al., 2019b] суждение о хорошей степени сопоставимости результатов различных методологий, включая предложенную в настоящей работе, с истинными значениями ФРК было бы преждевременным.

Существенным ограничением данной работы явилось низкое качество представления артериального дерева. Авторами работы [Carson et al., 2019b] указано, что для последующих исследований следует проводить дополнительный анализ, включающий чувствительность к обработке изображений. Стоит отметить, что в рамках методологии 2 работы [Carson et al., 2019b] (3D-моделирование на основе стационарных уравнений Навье – Стокса) использовался перенос граничного условия. Для этого в геометрической модели проводилось искусственное удлинение артерий в окрестности выходного сечения [Morris et al., 2017], которое могло оказывать влияние на получаемые результаты. В связи с этим отметим, что при применении FlowVision положительная корреляция (коэффициент Пирсона 0,24) оказалась значительно меньше, чем при применении методики [Morris et al., 2017; Carson et al., 2019a] (коэффициент Пирсона 0,38 [Carson et al., 2019b]).

Описанная выше методика была применена для расчета ФРК 20 пациентов, поступивших в ФГБУ НМИЦК им. Е. И. Чазова с болями в груди. Результаты использования FlowVision для реальных клинических случаев описаны в [Балахонова и др., 2024].

6. Ограничения

Общими ограничениями исследований, основанных на данных работы [Carson et al., 2019b] являются: небольшой объем выборки пациентов и небольшое количество пациентов с гемодинамически значимыми стенозами, отсутствие качественной геометрической модели сосудистого дерева. В результате малого объема выборки статистические показатели чувствительны к небольшим изменениям в результатах.

Автоматическое построение трехмерных моделей коронарных сосудов значительно ускорит процесс гемодинамических расчетов для верификации и совершенствования предложенной методики. Для дальнейших шагов в направлении совершенствования неинвазивных методик определения ФРК необходим большой набор данных (датасет) с проведением сегментации сосудов для машинного обучения. Такая база также позволит разработать инструмент для автоматического определения ФРК, который будет доступен для широкого клинического применения. В настоящее время обработка результатов КТ конкретных пациентов проводится вручную, что является одним из главных недостатков описанной методики. Результаты расчетов также сильно зависят от наличия в данных КТ артефактов (движения, сбоя аппаратуры и т. п.).

Сравнение с результатами других методологий показывает, что результаты примерно соответствуют данным вычисления ФРК с использованием одномерных математических моделей на графах [Василевский и др., 2022; Гогниева и др., 2018; Ge et al., 2020; Ge et al., 2021]. Описанный подход опирается на использование пакета индустриального моделирования FlowVision. В цитируемых работах для вычисления ФРК использованы исследовательские программные комплексы. Хотя промышленные пакеты имеют большую доступность для пользователей, расчет с использованием FlowVision требует гораздо больших вычислительных ресурсов (объема памяти, машинного времени).

7. Заключение, дискуссия

Предложена методика расчета фракционного резерва кровотока, основанная на введении в систему нестационарных уравнений Навье – Стокса эффективной сжимаемости. Это позволило использовать для оценки ФРК промышленный ПК FlowVision. Удалось не рассматривать задачу о циркуляции в большом фрагменте сосудистого дерева, а ограничиться лишь небольшим фрагментом КА.

Предварительный корреляционный анализ пока не дает оснований для заключения о хорошей сопоставимости результатов. Необходимы дальнейшие исследования в данном направлении. Для заключения о пригодности описанной методики необходимо значительно увеличить объем выборки. Наибольшие различия имелись для пациентов с низким качеством изображений КТ и (или) сильным кальцинозом сосудов. Если качество изображения по данным КТ относится к техническим вопросам, особый интерес представляет исследование применимости методики именно к случаям с сильным кальцинозом сосудов.

Список литературы (References)

Аксенов А. А. FlowVision: индустриальная вычислительная гидродинамика // Компьютерные исследования и моделирование. — 2017. — Т. 9, № 1. — С. 5–20.
Aksenov A. A. FlowVision: industrial'naia vychislitel'naia gidrodinamika [FlowVision: industrial computational fluid dynamics] // Computer Research and Modeling. — 2017. — Vol. 9, No. 1. — P. 5–20 (in Russian).

Аксёнов А. А., Калугина М. Д., Лобанов А. И., Каширин В. С. Численное моделирование течения жидкости в насосе для перекачки крови в программном комплексе FlowVision // Компьютерные исследования и моделирование. — 2023. — Т. 15, № 4. — С. 1025–1038.
Aksenov A. A., Kalugina M. D., Lobanov A. I., Kashirin V. S. Chislennoe modelirovanie techeniia zhidkosti v nasose dlia perekachki krovi v programmnom komplekse FlowVision [Numerical simulation of fluid flow in a blood pump using

the FlowVision software package] // Computer Research and Modeling. — 2023. — Vol. 15, No. 4. — P. 1025–1038 (in Russian).

Балахонова А. А., Веселова Т. Н., Сухинина Т. С., Благосклонова Е. Р., Калугина М. Д., Гаврилов А. В., Аксенов А. А., Лобанов А. И., Арутюнян Г. К., Певзнер Д. В., Терновой С. К. Оценка функциональной значимости стенозов коронарных артерий с помощью определения фракционного резерва кровотока на основании данных компьютерной томографической ангиографии // Системные гипертензии. — 2024. — Т. 21, № 2. — С. 43–49.

Balakhonova A. A., Veselova T. N., Sukhinina T. S., Blagosklonova E. R., Kalugina M. D., Gavrilov A. V., Aksenov A. A., Lobanov A. I., Arutyunyan G. K., Pevzner D. V., Ternovoy S. K. Ocenka funkcional'noj znachimosti stenozov koronarnyh arterij s pomosch'yu opredeleniia frakcionnogo rezerva krovotoka na osnovanii dannyh komp'yuternoj tomograficheskoj angiografii [Evaluation of the functional significance of coronary artery stenosis by determining the fractional flow reserve based on computed tomography angiography data] // Systemic hypertension. — 2024. — Vol. 21, No. 2. — P. 43–49 (in Russian).

Барбараш О. Л., Карпов Ю. А., Панов А. В., Акчурин Р. С., Алекян Б. Г., Алехин М. Н., Аронов Д. М., Арутюнян Г. К., Беленков Ю. Н., Бойцов С. А., Болдуева С. А., Бощенко А. А., Бубнова М. Г., Булкина О. С., Васюк Ю. А., Галявич А. С., Глезер М. Г., Голубев Е. П., Голухова Е. З., Гринштейн Ю. И., Давидович И. М., Ежов М. В., Завадовский К. В., Иртюга О. Б., Карпов Р. С., Каштелап В. В., Козиолова Н. А., Кореннова О. Ю., Космачева Е. Д., Кошельская О. А., Кухарчук В. В., Лопатин Ю. М., Меркулов Е. В., Миронов В. М., Марцевич С. Ю., Миролюбова О. А., Михин В. П., Недошивин А. О., Никулина Н. Н., Никулина С. Ю., Олейников В. Э., Панченко Е. П., Перепеч Н. Б., Петрова М. М., Протасов К. В., Саидова М. А., Самко А. Н., Сергиенко И. В., Синицын В. Е., Скибицкий В. В., Соболева Г. Н., Шалаев С. В., Шапошник И. И., Шевченко А. О., Ширяев А. А., Шляхто Е. В., Чумакова Г. А., Якушин С. С. Стабильная ишемическая болезнь сердца. Клинические рекомендации 2024 // Российский кардиологический журнал. — 2024. — Т. 29, № 9. — 6110.

Barbarash O. L., Karpov Yu. A., Panov A. V., Akchurin R. S., Alekyan B. G., Alekhin M. N., Aronov D. M., Harutyunyan G. K., Belenkov Yu. N., Boytsov S. A., Boldueva S. A., Boschenko A. A., Bubnova M. G., Bulkina O. S., Vasyuk Yu. A., Galyavich A. S., Glezer M. G., Golubev E. P., Golukhova E. Z., Grinstein Yu. I., Davidovich I. M., Yezhov M. V., Zavadovsky K. V., Irtyuga O. B., Karpov R. S., Koziolova V. V., Koziolova N. A., Korennova O. Yu., Kosmacheva E. D., Koshelskaya O. A., Kukharchuk V. V., Lopatin Yu. M., Merkulov E. V., Mironov V. M., Martsevich S. Yu., Mirolyubova O. A., Mikhin V. P., Nedoshivin A. O., Nikulina N. N., Nikulina S. Yu., Oleinikov V. E., Panchenko E. P., Perepech N. B., Petrova M. M., Protasov K. V., Saidova M. A., Samko A. N., Sergienko I. V., Sinitsyn V. E., Skibitsky V. V., Soboleva G. N., Shalaev S. V., Shaposhnik I. I., Shevchenko A. O., Shiryaev A. A., Shlyakhto E. V., Chumakova G. A., Yakushin S. S. Stabil'naia ishemicheskaia bolezn' serdca. Klinicheskie rekomendacii 2024 [Stable ischemic heart disease. Clinical guidelines 2024]'// Russian Journal of Cardiology. — 2024. — Vol. 29, No. 9. — 6110 (in Russian).

Белоцерковский О. М. Численное моделирование в механике сплошных сред. — М.: Наука, 1984. — 520 с.

Belotserkovsky O. M. Chislennoe modelirovanie v mehanike sploshnyh sred [Numerical modeling in continuous media mechanics]. — Moscow: Nauka, 1984. — 520 p. (in Russian).

Василевский Ю. В., Саламатова В. Ю., Симаков С. С. Об эластичности сосудов в одномерных моделях гемодинамики // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2015. — Т. 55, № 9. — С. 1599–1610. — DOI: 10.7868/S004446691509015X

Vassilevski Yu. V., Salamatova V. Yu., Simakov S. S. On the elasticity of blood vessels in one-dimensional problems of hemodynamics // Computational mathematics and mathematical physics. — 2015. — Vol. 55, No. 9. — P. 1567–1578. — DOI: 10.1134/S0965542515090134 (Original Russian paper: *Vassilevski Yu. V., Salamatova V. Yu., Simakov S. S.* Ob elastichnosti sosudov v odnomernykh modelyakh gemodinamiki // Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki. — 2015. — Vol. 55, No. 9. — P. 1599–1610. — DOI: 10.7868/S004446691509015X)

Василевский Ю. В., Симаков С. С., Гамилов Т. М., Саламатова В. Ю., Добросердова Т. К., Копытов Г. В., Богданов О. Н., Данилов А. А., Дергачев М. А., Добровольский Д. Д., Косухин О. Н., Ларина Е. В., Мелешкина А. В., Мычка Е. Ю., Харин В. Ю., Чеснокова К. В., Шипилов А. А. Персонализация математических моделей в кардиологии: трудности и перспективы // Компьютерные исследования и моделирование. — 2022. — Т. 14, № 4. — С. 911–930. — DOI: 10.20537/2076-7633-2022-14-4-911-930

Vassilevski Yu. V., Simakov S. S., Gamilov T. M., Salamatova V. Yu., Dobroserdova T. K., Kopytov G. V., Bogdanov O. N., Danilov A. A., Dergachev M. A., Dobrovolskii D. D., Kosukhin O. N., Larina E. V., Meleshkina A. V., Mychka E. Yu., Kharin V. Yu., Chesnokova K. V., Shipilov A. A. Personalization of mathematical models in cardiology: obstacles and perspectives // Computer Research and Modeling. — 2022. — Vol. 14, No. 4. — P. 911–930 (in Russian).

Веселова Т. Н., Терновой С. К., Чеповский А. М., Борисенко В. В., Гаврилов А. В., Благосклонова Е. Р., Долотова Д. Д., Миронов В. М., Арутюнян Г. К. Оценка фракционного резерва кро-

вотока по данным компьютерной томографии: сравнение расчетных показателей с результатами инвазивных измерений // Кардиология. — 2021. — Т. 61, № 7. — С. 28–35.
Veselova T. N., Ternovoy S. K., Chepovskiy A. M., Borisenko V. V., Gavrilov A. V., Blagosklonova E. R., Dolotova D. D., Mironov V. M., Arutyunyan G. K. Ocenka frakcionnogo rezerva krovotoka po dannym komp'yuternoj tomografii: sravnenie raschetnyh pokazatelej s rezul'tatami invazivnyh izmerenij [Evaluation of the fractional flow reserve by computer tomography data: Comparison of the calculated parameters with the results of invasive measurements] // Kardiologiya. — 2021. — Vol. 61, No. 7. — P. 28–35 (in Russian).

Гогниева Д. Г., Сыркин А. Л., Василевский Ю. В., Симаков С. С., Мелерзанов А. В., Liang F., Ломоносова А. А., Быкова А. А., Ел Манаа Х. Э., Копылов Ф. Ю. Неинвазивная оценка фракционного резерва коронарного кровотока с применением методики математического моделирования у пациентов с ишемической болезнью сердца // Кардиология. — 2018. — Т. 58, № 12. — С. 85–92.
Gognieva D. G., Syrkin A. L., Vassilevski Yu. V., Simakov S. S., Melerzanov A. V., Liang F., Lomonosova A. A., Bykova A. A., El Manaa H. E., Kopylov Ph. Yu. Neinvazivnaia ocenka frakcionnogo rezerva koronarnogo krovotoka s primeneniem metodiki matematicheskogo modelirovaniia u pacientov s ishemicheskoj bolezn'yu serdca [Noninvasive assessment of fractional flow reserve using mathematical modeling of coronary flow] // Kardiologiya. — 2018. — Vol. 58, No. 12. — P. 85–92 (in Russian).

Жуковский Н. Е. О гидравлическом ударе в водопроводных трубах. — М.: Изд-во Либроком, 2021. — 105 с.
Zhukovsky N. E. O gidravlicheskom udare v vodoprovodnyh trubah [On hydraulic shock in water pipes]. — Moscow: Librokom Publishing House, 2021. — 105 p. (in Russian).

Калугина М. Д., Каширин В. С., Лобанов А. И. Валидационные расчеты задач гемодинамики с использованием программного комплекса FlowVision в режиме распараллеливания // Вычислительные методы и программирование. — 2023. — Т. 24, № 2. — С. 132–141.
Kalugina M. D., Kashirin V. S., Lobanov A. I. Validaczionnye raschety zadach gemodinamiki s ispolzovaniem programmnogo kompleksa FlowVision v rezhime rasparallelivaniya [Validation calculations of hemodynamic problems using the FlowVision software package in parallel mode] // Numerical Methods and Programming. — 2023. — Vol. 24, No. 2. — P. 132–141 (in Russian).

Каро К., Педли Т., Шротер Р., Сид У. Механика кровообращения / пер. с англ. Е. В. Лукошковой, А. Н. Рогозы; под ред. С. А. Регирера, В. М. Хаютина. — М.: Мир, 1981. — 624 с.
Caro C. G., Pedley T. J., Schroter R. C., Seed W. A. The mechanics of the circulation. — Oxford University Press, 1978. (Russ. ed.: *Karo K., Pedli T., Shroter R., Sid U.* Mekhanika krovoobrashcheniya / per. s angl. E. V. Lukoshkovoi, A. N. Rogozy; pod red. S. A. Regirera, V. M. Khayutina. — Moscow: Mir, 1981. — 624 p.)

Кочергина К. Н., Яскевич Р. А. Скорость распространения пульсовой волны у молодых людей как фактор риска развития сердечно-сосудистых заболеваний // Вестник Смоленского государственного медицинского университета. — 2021. — Т. 19, № 2. — С. 1–7.
Kochergina K. N., Yaskevich R. A. Skorost' rasprostraneniia pul'sovoj volny u molodyh lyudej kak faktor riska razvitiia serdechno-sosudistyh zabolevanij [Pulse wave velocity in young people as a risk factor for cardiovascular disease development] // Vestnik Smolenskogo gosudarstvennogo meditsinskogo universiteta. — 2021. — Vol. 19, No. 2. — P. 1–7 (in Russian).

Сагирова Ж. Н., Кузнецова Н. О., Ларионов В. Б., Чомахидзе П. Ш., Копылов Ф. Ю., Сыркин А. Л. Параметры пульсовой волны в оценке систолической функции левого желудочка // Кардиология и сердечно-сосудистая хирургия. — 2020. — Т. 13, № 3. — С. 253–257.
Sagirova Zh. N., Kuznetsova N. O., Larionov V. B., Chomakhidze P. Sh., Kopylov F. Yu., Syrkin A. L. Parametry pul'sovoj volny v ocenke sistolicheskoj funkcii levogo zheludochka [Pulse wave parameters in assessment of left ventricular systolic function] // Russian Journal of Cardiology and Cardiovascular Surgery. — 2020. — Vol. 13, No. 3. — P. 253–257 (in Russian).

Симаков С. С., Холодов А. С. Численное исследование содержания кислорода в крови человека при низкочастотных воздействиях // Математическое моделирование. — 2008. — Т. 20, № 4. — С. 87–102.
Simakov S. S., Kholodov A. S. Chislennoe issledovanie soderzhaniya kisloroda v krovi cheloveka pri nizkochastotnyh vozdejstviyah [Computational study of oxygen concentration in human blood under low-frequency disturbances] // Mathematical Models and Computer Simulations. — 2008. — Vol. 20, No. 4. — P. 87–102 (in Russian).

Терновой С. К., Веселова Т. Н., Борисенко В. В., Благосклонова Е. Р., Гаврилов А. В., Долотова Д. Д., Чеповский А. М., Серова Н. С. Неинвазивная оценка фракционного резерва коронарного кровотока по данным компьютерной томографии коронарных артерий с использованием гидродинамических расчетов // Российский электронный журнал лучевой диагностики. — 2020. — Т. 10, № 2. — С. 71–77.

Ternovoy S. K., Veselova T. N., Borisenko V. V., Blagosklonova E. R., Gavrilov A. V., Dolotova D. D., Chepovsky A. M., Serova N. S. Neinvazivnaya ocenka frakcionnogo rezerva koronarnogo krovotoka po dannym komp'yuternoj tomografii koronarnyh arterij s ispol'zovaniem gidrodinamicheskih raschetov [Non-invasive assessment of fractional coronary blood flow reserve based on computed tomography of the coronary arteries using hydrodynamic calculations] // Russian Electronic Journal of Radiation Diagnostics. — 2020. — Vol. 10, No. 2. — P. 71–77 (in Russian).

Тучков А. А., Гоголашвили Н. Г., Яскевич Р. А. Особенности влияния кратковременной терапии высокими дозами статинов на характеристики пульсовой волны у пожилых больных с ИБС // Клиническая геронтология. — 2017. — № 9–10. — С. 68–70.

Tuchkov A. A., Gogolashvili N. G., Yaskevich R. A. Osobennosti vliianiia kratkovremennoj terapii vysokimi dozami statinov na harakteristiki pul'sovoj volny u pozhilyh bol'nyh s IBS [Features of the influence of short-term therapy with high doses of statins on the characteristics of the pulse wave in elderly patients with coronary heart disease] // Clinical Gerontology. — 2017. — No. 9–10. — P. 68–70 (in Russian).

Aksenov A. A., Dyadkin A. A., Gudzovsky A. V. Numerical simulation of car tire aquaplaning // Computational Fluid Dynamics '96 / J.-A. Desideri, C. Hirsch, P. Le Tallec, M. Pandolfi, J. Periaux (eds.). — John Wiley & Sons, 1996. — P. 815–820.

Alimohammadi M., Aguado-Sierra J., Stefanovska A., Murphy K., Francis C., Krams R., Maynard C., Xu X. Y. Hemodynamically driven deposition of platelets induces von Willebrand factor release and enhances thrombus formation in type 2B von Willebrand disease // Medical Engineering & Physics. — 2014. — Vol. 36, No. 4. — P. 275–284.

Blanco P. J., Bulant C. A., Müller L. O., Talou G. D. M., Bezerra C. G., Lemos P. A., Feijóo R. A. Comparison of 1D and 3D models for the estimation of fractional flow reserve // Scientific Reports. — 2018. — Vol. 8, No. 1. — Art. 17275.

Bulant C. A., Blanco P. J., Maso Talou G. D., Bezerra C. G., Lemos P. A., Feijóo R. A. A head-to-head comparison between CT- and IVUS-derived coronary blood flow models // Journal of Biomechanics. — 2017. — Vol. 51. — P. 65–76.

Cao K., Sucosky P. Aortic valve leaflet wall shear stress characterization revisited: impact of coronary flow // Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering. — 2017. — Vol. 20, No. 5. — P. 468–470.

Carson J., Lewis M., Rassi D., Van Loon R. A data-driven model to study utero-ovarian blood flow physiology during pregnancy // Biomechanics and Modeling in Mechanobiology. — 2019a. — Vol. 18, No. 4. — P. 1155–1176.

Carson J., Van Loon R. An implicit solver for 1D arterial network models // International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering. — 2017. — Vol. 33, No. 7. — Art. e2837.

Carson J. M., Pant S., Roobottom C., Alcock R., Blanco P. J., Bulant C. A., Vassilevski Y., Simakov S., Gamilov T., Pryamonosov R., Liang F., Ge X., Liu Y., Nithiarasu P. Non-invasive coronary CT angiography-derived fractional flow reserve: a benchmark study comparing the diagnostic performance of four different computational methodologies // International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering. — 2019b. — Vol. 35, No. 10. — P. 1–22.

Dataset: Supplementary Material. Figshare. — [Electronic resource]. — https://figshare.com/articles/dataset/Supplementary_Material/8047742/2?file=14994971 (accessed: 14.12.2024).

Gamilov T. M., Kopylov P. Y., Pryamonosov R. A., Simakov S. S. Virtual fractional flow reserve assessment in patient-specific coronary networks by 1D hemodynamic model // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modeling. — 2015. — Vol. 30, No. 5. — P. 269–276.

Ge X., Liu Y., Tu S., Simakov S., Vassilevski Y., Liang F. Model-based analysis of the sensitivities and diagnostic implications of FFR and CFR under various pathological conditions // International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering. — 2021. — Vol. 37, No. 11. — Art. e3257.

Ge X., Liu Y., Yin Z., Tu S., Fan Y., Vassilevski Y., Simakov S., Liang F. Comparison of instantaneous wave-free ratio (iFR) and fractional flow reserve (FFR) with respect to their sensitivities

to cardiovascular factors: a computational model-based study // Journal of Interventional Cardiology. — 2020. — Vol. 2020. — Art. 4094121.

Gognieva D., Mitina Y., Gamilov T., Pryamonosov R., Vasilevskii Y., Simakov S., Liang F., Ternovoy S., Serova N., Tebenkova E., Sinitsyn V., Pershina E., Abugov S., Mardanian G., Zakarian N., Kirakosian V., Betelin V., Shchekochikhin D., Syrkin A., Kopylov P. Noninvasive assessment of the fractional flow reserve with the CT FFRc 1D method: final results of a pilot study // Global Heart. — 2021. — Vol. 16, No. 1. — Art. 48.

Hashemi J., Patel B., Chatzizisis Y. S., Kassab G. S. Real time reduced order model for angiography fractional flow reserve // Computer Methods and Programs in Biomedicine. — 2022. — Vol. 216. — Art. 106674.

Kalugina M. D., Kashirin V. S., Lobanov A. I. Validation calculations of hemodynamic problems using the FlowVision software package in parallel mode // Numerical Methods and Programming. — 2023. — Vol. 24, No. 2. — P. 132–141.

Kim H. J., Vignon-Clementel I. E., Coogan J. S., Figueroa C. A., Jansen K. E., Taylor C. A. Patient-specific modeling of blood flow and pressure in human coronary arteries // Annals of Biomedical Engineering. — 2010. — Vol. 38, No. 10. — P. 3195–3209.

Krivovichev G. V. Comparison of non-Newtonian models of one-dimensional hemodynamics // Mathematics. — 2021. — Vol. 9, No. 19. — P. 1–16.

Morris P. D., Ryan D., Morton A. C., Lycett R., Lawford P. V., Hose D. R., Gunn J. P. Virtual fractional flow reserve from coronary angiography: modeling the significance of coronary lesions // JACC: Cardiovascular Interventions. — 2013. — Vol. 6, No. 2. — P. 149–157.

Morris P. D., Silva Soto D. A., Feher J. F. A., Rafiroiu D., Lungu A., Varma S., Lawford P. V., Hose D. R., Gunn J. P. Fast virtual fractional flow reserve based upon steady-state computational fluid dynamics analysis: results from the VIRTU-fast study // JACC: Basic to Translational Science. — 2017. — Vol. 2, No. 4. — P. 434–446.

Morris P. D., van de Vosse F. N., Lawford P. V., Hose D. R., Gunn J. P. “Virtual” (computed) fractional flow reserve: current challenges and limitations // JACC: Cardiovascular Interventions. — 2015. — Vol. 8, No. 8. — P. 1009–1017.

MultiVox. — [Electronic resource]. — https://multivox.ru (accessed: 07.09.2024).

Newman T., Borker R., Aubinière-Robb L., Hendrickson J., Choudhury D., Halliday I., Fenner J., Narracott A., Hose R., Gosling R., Gunn J. P., Morris P. D. Rapid virtual fractional flow reserve using 3D computational fluid dynamics // European Heart Journal — Digital Health. — 2023. — Vol. 4, No. 4. — P. 283–290.

Simakov S. S., Gamilov T. M., Kopylov F. Y., Vasilevskii Y. V. Evaluation of hemodynamic significance of stenosis in multiple involvement of the coronary vessels by mathematical simulation // Bulletin of Experimental Biology and Medicine. — 2016. — Vol. 162, No. 1. — P. 111–114.

Skiadopoulos A., Neofytou P., Housiadas C. Comparison of blood rheological models in patient specific cardiovascular systems // Journal of Hydrodynamics. — 2017. — Vol. 93, No. 2. — P. 293–304.

*Taylor C. A., Fonte T. A., Min J. K.*C omputational fluid dynamics applied to cardiac computed tomography for noninvasive quantification of fractional flow reserve // Journal of the American College of Cardiology. — 2013. — Vol. 61, No. 22. — P. 2233–2241.

Tonino P. A., De Bruyne B., Pijls N. H., Siebert U., Ikeno F., Veer M., Klauss V., Manoharan G., Engstrom T., Oldroyd K. G., Lee P. N., MacCarthy P. A., Fearon W. F. Fractional flow reserve versus angiography for guiding percutaneous coronary intervention // The New England Journal of Medicine. — 2009. — Vol. 360, No. 3. — P. 213–224.

Vassilevski Y., Olshanskii M., Simakov S., Kolobov A., Danilov A. Personalized computational hemodynamics: models, methods, and applications for vascular surgery and antitumor therapy. — Cambridge, MA: Academic Press, 2020.